

۵-۲-۴ روش جزء به جزء

فرمول محاسبه انتگرال با این روش به صورت $\int u dv = uv - \int v du$ است. به این صورت که تابعی که مشتق آن ساده‌تر است را u می‌نامیم و تابعی که انتگرال آن به سادگی قابل محاسبه باشد را dv می‌گیریم به طوریکه در نهایت $\int v du$ قابل محاسبه باشد. به جدول زیر (که در آن آرگومان توابع بر حسب x خطی هستند) توجه کنید.

گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳
توابع لگاریتمی		توابع نمایی
توابع معکوس مثلثاتی	چند جمله‌ای	توابع سینوس و کسینوس
توابع معکوس هیپربولیک		مثلثاتی و هیپربولیک



در موارد زیر معمولاً از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

(۱) در انتگرال‌گیری از توابع گروه (۱)

(۲) در انتگرال‌گیری از توابع حاصلضرب گروه (۲) در گروه (۱)

(۳) در انتگرال‌گیری از توابع حاصلضرب گروه (۲) در گروه (۳)

(۴) در انتگرال‌گیری از توابع حاصلضرب گروه (۳) در یکدیگر

(۵) در انتگرال‌گیری از توانهای فرد $\sec x$ و $\csc x$

به خاطر داشته باشید که در موارد (۱) تا (۴) همواره u را از گروه با شماره کمتر انتخاب می‌کنیم. (در مورد (۴) تفاوتی در انتخاب u و dv وجود ندارد و نیاز به دوبار استفاده از روش جزء به جزء داریم.) در مورد (۵) باید $\sec^2 x$ یا $\csc^2 x$ را به عنوان dv و عبارت باقیمانده را u فرض کنیم تا به رابطه‌ای بازگشتی برسیم.

تذکره ۸. در محاسبه انتگرال به روش جزء به جزء اگر $u = f(x)$ ، $dv = g(x)dx$ فرمول انتگرال جزء به جزء به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\underbrace{\left(\int g(x)dx\right)}_{G(x)} - \int f'(x)G(x)dx$$

مثال ۱۰. حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $\int x \ln x dx$ (ب) $\int \sec^2 x dx$ (ج) $\int e^x \sin x dx$ (د) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(الف) با انتخاب $u = \ln x$ و $dv = x dx$ داریم $du = \frac{dx}{x}$ و $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

(ب) با توجه به این که تابع اولیه $\sec^2 x$ قابل محاسبه است، قرار دهید $u = \sec x$ و $dv = \sec^2 x dx$ و

$$v = \tan x \text{ و } du = \sec x \tan x dx$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sec^3 x dx = \int \sec x (\sec^2 x dx) = \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx = \sec x \tan x - \int \underbrace{\sec x (\sec^2 x - 1)}_{\sec^3 x - \sec x} dx
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \sec x \tan x - I + \int \sec x dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + c$$

ج) در ضرب عبارت نمایی و مثلثاتی دوبار از جزء به جزء استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $u = e^x$ و $dv = \sin x dx$ ولذا $du = e^x dx$ و $v = -\cos x$

$$\begin{aligned}
 I &= \int e^x (\sin x dx) = -e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx = -e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_u \underbrace{(\cos x dx)}_{dv} \\
 &= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int \sin x e^x dx \right) = e^x (\sin x - \cos x) - I \\
 \Rightarrow I &= \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c
 \end{aligned}$$

د) ابتدا از تغییر متغیر $x = t^2$ و $dx = 2t dt$ استفاده می‌کنیم.

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int \underbrace{t}_u \underbrace{(e^t dt)}_{dv} = 2te^t - 2 \int e^t dt = 2te^t - 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + c$$

تعمیم روش جزء به جزء

مشتق‌ها	انتگرال‌ها
$f(x)$	$g(x)$
$f'(x)$	$G_1(x)$
$f''(x)$	$G_2(x)$
$f'''(x)$	$G_3(x)$

$$\int f(x) g(x) dx =$$

$$f(x) G_1(x) - f'(x) G_2(x) + f''(x) G_3(x) - \int f'''(x) G_3(x) dx$$

این جدول میتواند در هر مرحله‌ای متوقف شود

کاربرد اول جدول: وقتی $f(x)$ چندجمله‌ای است و مشتق آن در یک مرحله صفر می‌شود.

مشتق‌ها	انتگرال‌ها
$x^r + a$	e^{rx}
rx	$\frac{1}{r} e^{rx}$
r	$\frac{1}{r^2} e^{rx}$
0	$\frac{1}{r^3} e^{rx}$

$$\int (x^r + a) e^{rx} dx =$$

$$\frac{1}{r} (x^r + a) e^{rx} - \frac{1}{r} x e^{rx} + \frac{1}{r^2} e^{rx}$$

کاربرد دوم جدول

مشتق‌ها	انتگرال‌ها
e^x	$\cos x$
e^x	$\sin x$
e^x	$-\cos x$

$$\int e^x \cos x dx. \quad \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{\text{step 0}} = \underbrace{(+1)(e^x)(\sin x)}_{j=0} + \underbrace{(-1)(e^x)(-\cos x)}_{j=1} + \underbrace{\int (+1)(e^x)(-\cos x) dx}_{i=2}$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C,$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} (e^x (\sin x + \cos x)) + C, \quad \text{در نتیجه}$$