مثالی از طراحی و بهینه سازی یک سیستم چند مرحله ای ذخیره سازی توسط هوای فشرده

(Design and Optimization of Multistage Compressed Air Energy Storage System)

شرح مسئله : جریان گازی با شدت جریان جرمی N مول در ساعت با فشار ۱ اتمسفر (atm) به میزان فشار ۶۴ اتمسفر با استفاده از یک دستگاه کمپرسور سه مرحله ای مطابق با شکل ذیل فشرده (متراکم) شده است. فرض کنید که عملیات فشرده سازی یا تراکم بصورت برگشت پذیر و آدیاباتیک رخ داده و پس از هر مرحله از فشرده سازی گاز به درجه حرارت اولیه آن به مقدار T سرد شده است.

طراحی و بهینه سازی سیستم انرژی : با انتخاب مقادیر فشارهای بین مرحله ای، برای به حداقل رساندن تابع هدف میزان مصرف انرژی این سیستم ذخیره سازی را بدست آورید.

حل:

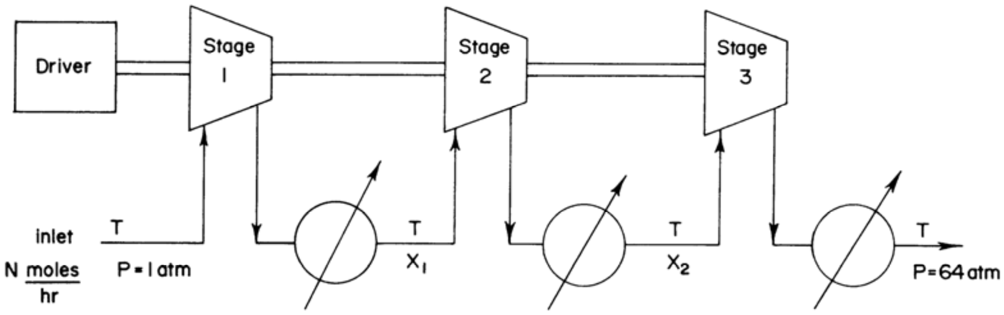
برای تراکم آدیاباتیک برگشت پذیر با خنک کردن تا درجه حرارت ورودی سیستم (T) ، مقدار کار انجام شده بصورت رابطه ذیل محاسبه می شود:

$$W = NRT\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right)^{(k-1)/k} - NRT\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

که در این رابطه مقادیر $k=C_p/C_v$ نسبت ظرفیت گرمائی ویژه و R ثابت عمومی گاز ایده آل می باشند.

برای تراکم سه مرحله ای سیستم مقدار تابع کلی کار انجام شده بصورت رابطه ذیل خواهد بود:

$$W_{\text{total}} = NRT\left(\frac{k}{k-1}\right)\left\{\left(\frac{x_1}{1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{64}{x_2}\right)^{\alpha} - 3\right\}$$



شکل۱: طرح شماتیک سیستم تراکم چندمرحله ای

در رابطه فوق: $\alpha = \frac{k-1}{k}$

x_1= مقدار فشار خروجی از مرحله اول

x_2= مقدار فشارخروجی از مرحله دوم

اگر برای گاز مورد نظر در مسئله مقدار عددی $\alpha=1/4$ باشد، در این صورت برای مقادیر T و N ثابت و معین مقادیر فشارهای بهینه x_1 و x_2 با حل مسئله مذکور به صورت یک مسئله بهینه سازی تابع هدف به فرم کلی ذیل تعیین خواهد شد:

$$\text{Minimize} \quad f(x) = x_1^{1/4} + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/4} + \left(\frac{64}{x_2}\right)^{1/4}$$

$$\text{Subject to} \quad x_1 \geqslant 1 \qquad x_2 \geqslant x_1 \qquad 64 \geqslant x_2$$

که در آن محدودیت های اعمال شده برای اطمینان از اینکه فشار گاز انتخاب شده بطور یکنواخت از ورودی به خروجی افزایش خواهد یافت ، لحاظ شده است.این مسئله در واقع یک مسئله خطی دارای محدودیت ها (NLP) می باشد و می تواند با استفاده از الگوریتم فرانک- ولف (Frank–Wolfe) حل شود. در این شرائط و برای حل مسئله و به عنوان فرض اولیه ما از مقادیر $x_1^0=2$ و $x_2^0=10$ به عنوان برآورداولیه استفاده می کنیم. به این ترتیب همچنین مشتق توابع f(x) مذکور و در نقطه x^0 نیز محاسبه خواهد شد.

ادامه شرح و توضیح مراحل حل مسئله بصورت ذیل خواهد بود:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.25x_1^{-3/4}(1 - x_2^{1/4}x_1^{-1/2}) = -3.83 \times 10^{-2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.25x_2^{-3/4}[x_1^{-1/4} - (64)^{1/4}x_2^{-1/2}] = -2.38 \times 10^{-3}$$

Assuming that these values are not sufficiently close to zero, we continue with step 2: Solve the LP problem

$$\text{Minimize} \quad -3.83 \times 10^{-2}y_1 - 2.38 \times 10^{-3}y_2$$

$$\text{Subject to} \quad y_1 \geqslant 1 \qquad y_2 \geqslant y_1 \qquad 64 \geqslant y_2$$

The minimum will clearly occur when y_1 and y_2 are as large as possible, namely $y_1^0 = y_2^0 = 64$.

Step 3. Search the line

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 64 \\ 64 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$$

for $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Using, say, an interpolation method, we find that the optimum occurs at $\alpha = 0.02732$.

Step 4. The new point is

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + 0.02732\begin{pmatrix} 62 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.694 \\ 11.475 \end{pmatrix}$$

As shown in Figure 2, the point $x^{(1)}$ is an interior point of the feasible region. Since the search clearly has not yet converged, the iterations resume with step 1.

Step 1.

$$\nabla f(x^{(1)}) = (3.97 \times 10^{-3}, -4.56 \times 10^{-3})$$

Step 2. The LP subproblem becomes

$$\text{Minimize} \quad +3.97 \times 10^{-3} y_1 - 4.56 \times 10^{-3} y_2$$

$$\text{Subject to} \quad y_1 \geqslant 1 \qquad y_2 \geqslant y_1 \qquad 64 \geqslant y_2$$

The minimum is attained at the corner point at which y_1 is as small and y_2 is as large as possible; thus,

$$y_1^{(1)} = 1 \qquad \text{and} \qquad y_2^{(1)} = 64$$

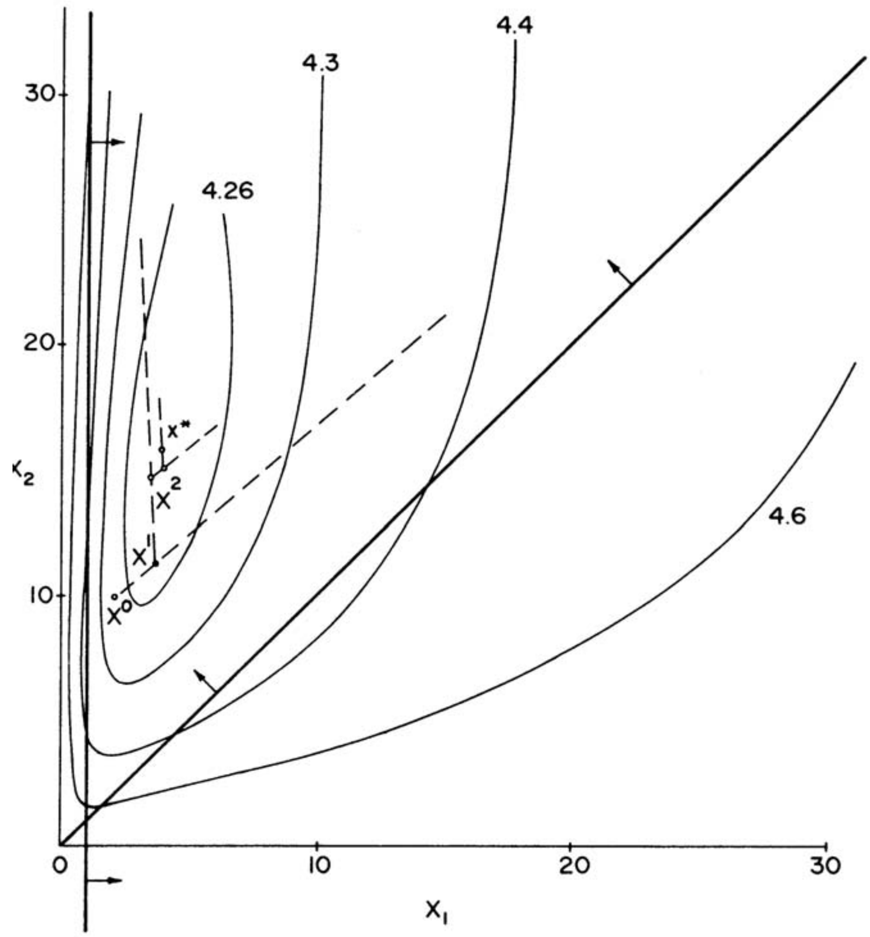


Figure. 2 Feasible region, Example

Step 3. Search the line

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.694 \\ 11.475 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 64 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.694 \\ 11.475 \end{pmatrix}\right)$$

for $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ such that $f(x(\alpha))$ is minimized. The optimum occurs at $\alpha = 0.06225$.

Step 4. The new point is

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.694 \\ 11.475 \end{pmatrix} + 0.06225\begin{pmatrix} -2.694 \\ 52.525 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.526 \\ 14.745 \end{pmatrix}$$

From Figure 8.2, this point is also an interior point. Moreover, it is still sufficiently distant from the optimum. The process continues with the points

$$x^{(3)} = (3.924,\ 15.069) \qquad x^{(4)} = (3.886,\ 15.710)$$

and so on, until suitably tight convergence tolerances are met.

نتائج نهائی:

با توجه به شکل ۲ مشخص است که با بهینه سازی درونی (دور از مرزها یا کرانه های سیستم) الگوریتم فرانک- ولف پیشرفت ها، بسیار مشابه با روش گرادیان نامحدود خواهد بود.

در واقع، مراحل مارپیچی به همراه مجموعه ای محدود از جهات به عنوان نمونه از روش گرادیان معمولی می باشد.

اگر هر دو نقطه شروع و راه حل نقاط مرزی در نظر گرفته شوند و سپس مراحل جستجو انجام گیرد در نهایت مراحل جستجو بصورت یک دنباله به فقط یک پارامتر جستجو در محدودیت ها کاهش خواهد یافت.

قسمت دوم مثال:

Example

Suppose that the compressor system of the previous example is constrained to satisfy the additional condition

$$x_2 \leqslant 14 \text{ atm}$$

Obtain the new optimum using as initial estimate $x^0 = (14, 14)$.

Solution. The given initial point is a corner point of the modified feasible region, as shown in Figure 8.3. At x^0,

$$\nabla f(x^0) = (1.67 \times 10^{-2}, -8.25 \times 10^{-3})$$

The corresponding LP subproblem is

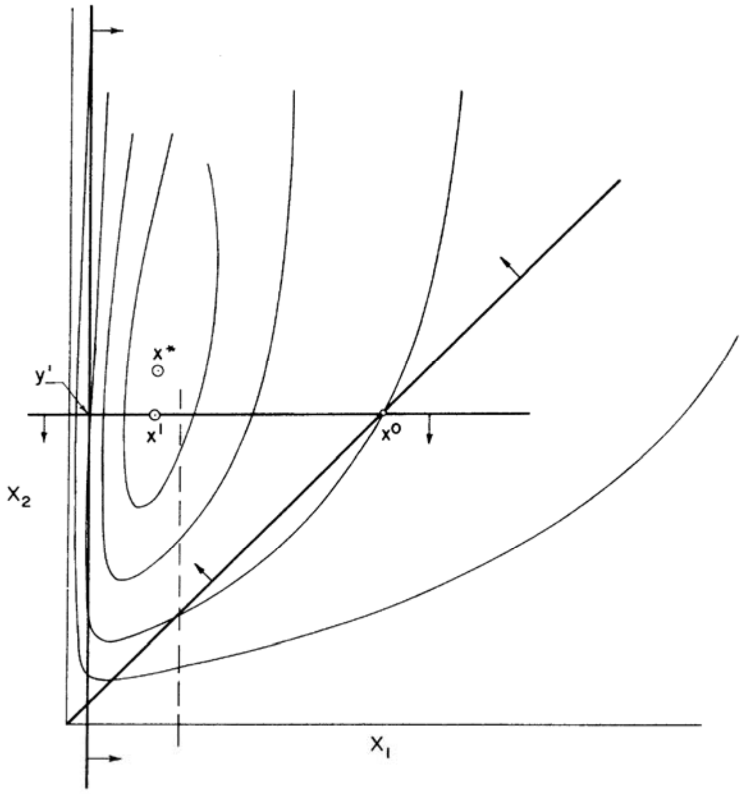


Figure 8.3. Feasible region, Example 8.2.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & 1.67 \times 10^{-2} y_1 - 8.25 \times 10^{-3} y_2 \\ \text{Subject to} & y_1 \geqslant 1 \qquad y_2 \geqslant y_1 \qquad 14 \geqslant y_2 \end{array}$$

The solution is obtained when y_1 is as small and y_2 is as large as possible. Thus,

$$y_1^0 = 1 \qquad \text{and} \qquad y_2^0 = 14$$

Step 3, the line search, involves finding α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, such that

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix} + \alpha\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}\right)$$

and $f(x(\alpha))$ is minimized. This amounts to a search on the constraint $y_2 = 14$. The solution is

$$\alpha = 0.7891$$

and the new point is

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.7417 \\ 14.0 \end{pmatrix}$$

At this point, $\nabla f(x^{(1)}) = (0, -1.275 \times 10^{-3})$. This is the optimal solution and, as shown in Figure 8.3, it lies in the middle of the constraint $y_2 = 14$. Note that if the additional constraint $x_1 \geqslant 5$ were imposed (dashed line in Figure 8.3), then the optimal solution would be the corner point (5, 14).

From the example, it is clear that even for boundary points the Frank–Wolfe algorithm amounts to a gradient search projected onto the constraint surfaces. Convergence to a Kuhn–Tucker point from any feasible starting point can readily be proved (see Zangwill [2] or Wolfe [3]) under reasonable assumptions: continuously differentiable $f(x)$, bounded feasible region, and accurate LP and line search subproblem solutions. If $f(x)$ is convex, clearly the solution will be the global minimum. It is awkward to analyze the rate of convergence because of the involvement of the vertex points in the definition of the descent direction. However, it is sufficiently clear that there are no grounds to expect a better rate than that of the ordinary gradient method.

Finally, it is interesting to note that with the Frank–Wolfe algorithms (in fact with any algorithm that uses a subproblem with a linearized objective function), if the objective function is convex, then after each subproblem solution it is possible to obtain a very convenient estimate of the remaining improvement yet to be achieved in the value of the objective function. Recall that for a convex function linearized at any point $x^{(t)}$

$$f(x) \geqslant f(x^{(t)}) + \nabla f(x^{(t)})(x - x^{(t)}) \equiv \tilde{f}(x; x^{(t)})$$

for all points x. But this inequality implies that over all feasible points

$$\min f(x) \geqslant \min \tilde{f}(x; x^{(t)}) \equiv \tilde{f}(y^{(t)}; x^{(t)})$$

Hence, the value of $\tilde{f}(y^{(t)}; x^{(t)})$ is a lower bound estimate of the value of $f(x)$ at the minimum point. On the other hand, $f(y^{(t)})$, or better yet $f(x^{(t+1)})$, is an upper bound estimate of the minimum value of $f(x)$. Thus, after each cycle of the algorithm, the difference

$$f(x^{(t+1)}) - \tilde{f}(y^{(t)}; x^{(t)})$$

gives a conservative estimate of the attainable improvement in the objective function value. This difference can thus be used as a good termination criterion, supplementing those defined in step 5 of the Frank–Wolfe algorithm.

With this basic introduction to the use of direct linearization in solving the special case of linearly constrained NLP problems, we continue with a discussion of the general case.