

$$u_t = a^p u_{nn} + t \quad 0 < x < \pi \quad t > 0$$

$$\text{fixed } \rightarrow u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t > 0$$

$$\text{initial } \rightarrow u(x, 0) = 1 \quad 0 < x < \pi$$

مرحله ۱

$$v(t) = At + B$$

پیدا کردن یک تابع خاص

$$u_{nn} = 0 \quad \left(\Rightarrow \right) A = a^p \cdot 0 = t = t$$

برقاریر بودن است

پیدا کردن ثابت و ضرایب از شرایط

$$v_{nn} = 0, \quad v_t = 2ct + D$$

$$\text{فرض کنیم } v(t) = ct^2 + Dt$$

$$\text{معادله می شود } 2ct + D = t \quad \text{با مقایسه ضرایب} \quad \left(\begin{array}{l} 2c = 1, c = \frac{1}{2} \\ D = 0 \end{array} \right)$$

$$v(t) = \frac{1}{2} t^2$$

پس

اما این تابع را باید بررسی کرد که آیا در مرزها $u(\pi, t) = 0$ و $u(0, t) = 0$ را ندارد زیرا این تابع وابسته نیست به x و اینجاست که شرط مرزها را نمی توانیم از این تابع خاص استفاده کنیم و باید تابع دیگری تطبیق دهیم

$$w(x, t) = u(x, t) - v(t) = u(x, t) - \frac{1}{2} t^2$$

مرحله ۲

و پس

$$w_t = u_t - t = (a^p u_{nn} + t) - t = a^p u_{nn} = a^p w_{nn}$$

$$w_t = a^p w_{nn} \quad \text{پس } w \text{ هم معادله موج را برآورده می کند}$$

مر ۲ از تغییر که برای این عملیات می توانیم جواب را بصورت سری سینوسی بنویسیم.

$$t = \sum_1^{\infty} b_n t \sin(n\pi)$$

$$b_n(t) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(n\pi) d\pi = \frac{rt}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\pi) d\pi = \frac{rt}{\pi}$$

$$\left[-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{rt}{\pi} \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{rt}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$ $\Rightarrow b_n(t) = \frac{rt}{n\pi} (1 - (-1)^n)$

مفروضه کنیم

$$u(n, t) = \sum_1^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi)$$

مطابق اول $u(n, 0) = \sum_1^{\infty} T_n(0) \sin(n\pi) = 1$

مقدار $T_n(0) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(n\pi) d\pi = \frac{r}{\pi} \left[-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{r}{n\pi}$

$$\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{r}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

$T_n(t) \sin(n\pi) = \sum_1^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi) \Rightarrow u_t = \sum_1^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi) \Rightarrow \sum_1^{\infty} -n^2 T_n(t) \sin(n\pi)$

پس $\sum_1^{\infty} T_n(t) \sin(n\pi) = \sum_1^{\infty} (-n^2 T_n(t) \sin(n\pi)) + \sum_1^{\infty} b_n(t) \sin(n\pi)$

No

Date . . .

قريب

$$T_n(t) = -a^n r T_n(t) + b_n(t)$$

$$\sqrt{e} \Rightarrow b_n(t) = \frac{rt}{na} (1 - (-1)^n)$$

 $\leftarrow T_n(t)$

$$T_n(t) + a^n r T_n(t) = \frac{r(1 - (-1)^n)}{na} t$$

هذا هو المطلوب
 $\Rightarrow r t = e^{a^n r t}$

$$T_n(t) = e^{-a^n r t} \left[\int_0^t e^{a^n r s} \frac{r(1 - (-1)^n)}{na} ds + C \right]$$

في البداية، $T_n(0) = \frac{r}{na} (1 - (-1)^n)$

$$\int e^{a^n r s} s ds$$

$u = s, du = e^{a^n r s} ds$
 $du = ds, v = \frac{1}{a^n r} e^{a^n r s}$

$$\Rightarrow \int e^{a^n r s} s ds = \frac{s}{a^n r} e^{a^n r s} - \int \frac{1}{a^n r} e^{a^n r s} ds =$$

$$= \frac{s}{a^n r} e^{a^n r s} - \frac{1}{(a^n r)^2} e^{a^n r s} + C = \frac{e^{a^n r s}}{a^n r} \left(s - \frac{1}{a^n r} \right) + C$$

$$\rightarrow \int_0^t e^{a^n r s} s ds = \left[\frac{e^{a^n r s}}{a^n r} \left(s - \frac{1}{a^n r} \right) \right]_0^t = \quad \text{Gnab 1}$$

$$= \frac{e^{a^n r t}}{a^n r} \left(t - \frac{1}{a^n r} \right) - \frac{1}{a^n r} \left(0 - \frac{1}{a^n r} \right) =$$

$$= \frac{e^{a^n r t}}{a^n r} \left(t - \frac{1}{a^n r} \right) + \frac{1}{(a^n r)^2}$$

$$\text{Gnab 2} \quad T_n(t) = \frac{r(1-(-1)^n)}{n\pi} \left[\frac{1}{a^n r} \left(t - \frac{1}{a^n r} \right) + \frac{e^{-a^n r t}}{(a^n r)^2} \right] + C$$

$$- a^n r t$$

$$\leq T_n(0) = \frac{r}{n\pi} (1-(-1)^n)$$

GL/1


$$T_n(0) = \frac{r(1-(-1)^n)}{n\pi} \left[\frac{1}{a^n r} \left(0 - \frac{1}{a^n r} \right) + \frac{1}{(a^n r)^2} \right] + C =$$

$$\frac{r(1-(-1)^n)}{n\pi} \left[-\frac{1}{(a^n r)^2} + \frac{1}{(a^n r)^2} \right] + C = C$$

$$\text{Gnab 3} \quad C = \frac{r}{n\pi} (1-(-1)^n)$$

$$\text{Gnab 4} \quad T_n(t) = \frac{r(1-(-1)^n)}{n\pi} \left[\frac{1}{a^n r} \left(t - \frac{1}{a^n r} \right) + \frac{e^{-a^n r t}}{(a^n r)^2} \right] +$$

$$\frac{r(1-(-1)^n)}{n\pi} e^{-a^n r t}$$

$$\text{Gnab 5} \quad u(n, t) = \sum T_n(t) \sin(n\pi x)$$

$$T_n(t) = \frac{r(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

$$\text{Gnab 6} \quad \left[\frac{t}{a^n r} + \left(1 - \frac{1}{a^n r} \right) e^{-a^n r t} + \frac{1}{(a^n r)^2} (e^{-a^n r t} - 1) \right]$$