ارائه یک مدل بهینه‌سازی یکپارچه برای تخصیص لکوموتیو و زمانبندی قطار از طریق یک شبکه‌ی مکان-زمان-وضعیت

*مسعود یقینی[۱]، حسین‌علی هزاره‌ای[۲]**

[۱] تهران ، دانشگاه علم و صنعت، دانشکده راه‌آهن ، هیات علمی دانشگاه، دانشیار

[۲] تهران ، دانشگاه علم و صنعت، دانشکده راه‌آهن ،دانشجوی کارشناسی ارشد حمل و نقل ریلی

پست الکترونیکی نویسنده مسئول: hossein_hezarehee@rail.iust.ac.ir

چکیده

در این مقاله یک مدل بهینه‌سازی جامع ارائه شده است که به طور همزمان تخصیص لوکوموتیو به قطارها، زمانبندی قطارها و مسیرهایی که لکوموتیو به طور سبک (جابجایی بدون قطار) می‌پیماید، را تعیین می‌کند. همچنین لکوموتیوها بعد از رساندن قطارها به مقاصد مورد نظر، از قطار جدا شده و مورد بازرسی قرار می‌گیرند. برای حل این مساله یک شبکه سه بعدی مکان-زمان-وضعیت ارائه شده است. در این شبکه «وضعیت» نشان می‌دهد که لکوموتیو به کدام قطار متصل است. این مساله بوسیله جریان شبکه چند کالایی فرموله شده که کالاها نشان دهنده لکوموتیوها هستند که از گره مبدا (ایستگاه آغازین) به گره مقصد (ایستگاه مقصد) حرکت می‌کنند. در این شبکه چند کالایی علاوه بر محدودیت های شبکه (عرضه، تقاضا و تعادل)، محدودیت‌های شبکه ریلی ارائه شده است.

کلمات کلیدی: تخصیص لکوموتیو؛ زمانبندی قطار؛ شبکه چند کالایی؛ بهینه‌سازی.

۱- مقدمه

به علت پیچیدگی برنامه ریزی راه آهن، در اغلب موارد این این برنامه ریزی ها بصورت جداگانه و در یک توالی مشخص انجام می شود. بطور مثال در برنامه ریزی حرکت قطار، مسیریابی و زمانبندی قطار قبل از تخصیص لکوموتیو انجام می گیرد. به عبارت دیگر زمانبندی قطار بدون در نظر گرفتن برنامه ریزی تخصیص لکوموتیو انجام می شود. این نوع برنامه ریزی سلسله مراتبی یک عیب مشخص دارد و آن این است که هنگامیکه خروجی بهینه‌ی یک برنامه‌ریزی به عنوان ورودی در برنامه‌ریزی بعدی استفاده می‌شود، نمی‌توان نتیجه گرفت که به یک جواب بهینه سراسری دست یافته‌ایم. بنابراین تفکیک زمانبندی قطار و تخصیص لکوموتیو از یکدیگر باعث یک هماهنگی ضعیف بین این دو می‌شود که ممکن است سبب تاخیر در ورود لکوموتیو به ایستگاه اعزام قطار و تاخیر در اعزام قطار شود که در این صورت لازم است در مورد برنامه زمانبندی تجدید نظر شود. این هماهنگی ضعیف همچنین می تواند سبب شود که با اولین ورود لکوموتیوها به ایستگاه اعزام قطار، نتوانیم از منابع در دسترس بطور کامل استفاده کنیم.

در راه آهن، تعداد لوکوموتیوها معمولاً کمتر از تعداد قطارهای برنامه ریزی شده می‌باشد که دلیل این موضوع صرفه جویی در هزینه های سرمایه گذاری است. دو چالش عمده در برنامه‌ریزی راه آهن، محدودیت های خطوط راه آهن و لکوموتیو می‌باشد که شامل این موارد می‌باشد:

۱- چگونه قطارها را طوری برنامه ریزی کنیم که یک سری محدودیت های ایمنی برآورده شوند.
۲- چگونه لکوموتیوهای موجود را تخصیص دهیم تا همه‌ی قطارهای برنامه‌ریزی شده را پوشش دهیم.

هدف از مسئله زمانبندی قطار تعیین زمان ورود و اعزام قطارها در هر ایستگاه می‌باشد. از آنجا که شبکه ریلی معمولاً توسط گروهی از قطارها که در یک بازه زمانی مشخص به سمت مسیرهای مختلف در حال حرکت هستند، اشغال می شود، احتمال برخورد قطارها وجود دارد. از آنجا که سبقت و تلاقی قطارها فقط در ایستگاه‌ها مجاز است، باید ایستگاه‌های مناسبی برای عملیات سبقت و تلاقی درنظر گرفته شود، که سبب دشواری در پیدا کردن جواب بهینه و حتی شدنی می‌شود. همچنین قطارها قبل از ترک ایستگاه مبدا، باید از لحاظ سازگاری با لکوموتیو مطابقت داشته باشد، که سازگاری به معنای الزامات قطار مانند تناژ و اسب بخار می‌باشد که باید توسط لکوموتیو تخصیص داده شده تأمین شود. اگر هیچ لوکوموتیو در مبدا قطار موجود نباشد، قطار باید در ایستگاه منتظر بماند تا قطارهای ورودی از راه برسند و از لکوموتیوهای آن قطارها استفاده کند.

تحقیقات زیادی در مورد برنامه ریزی لوکوموتیو در ادبیات موجود است. بعضی از محققین مانند قصیری و قنادپور (۲۰۱۰) لکوموتیوها را همگن در نظر گرفته‌اند. بولر (۱۹۸۰)، رایت (۱۹۸۹) و فوربس و همکاران (۱۹۹۱) چندین نوع لکوموتیو درنظر گرفته‌اند که هر قطار فقط توسط یک لکوموتیو کشیده می‌شود. در مطالعات فلورین و همکاران (۱۹۷۶)، زیارتی و همکاران (۱۹۹۷)، زیارتی و همکاران (۱۹۹۹)، آهوجا و همکاران (۲۰۰۵) و وادیاناتان و همکاران (۲۰۰۸) چندین لکوموتیو می‌توانست به یک قطار متصل شود. کوردوو و همکاران (۲۰۰۰) شرایطی را مطالعه کردند که همزمان لکوموتیوها و واگن‌های مناسب را به قطارهای مسافری زمانبندی شده اختصاص می‌داد. آنها در سال ۲۰۰۱ با معرفی امکان جایگزینی تجهیزات ، محدودیتهای نگهداری و جریمه‌های تعویض واگن مطالعه قبلی خود را توسعه دادند. گادوین و همکاران در سال ۲۰۰۶ یک روش ابتکاری برای تخصیص لکوموتیو به قطارهای باری ارائه دادند که در آن تخصیص لکوموتیو و برنامه‌ریزی قطارهای باری در دو فاز جداگانه انجام می‌شد.

در سال‌های اخیر توجه بیشتری به مدلهای ترکیبی در این زمینه شده است. این دسته از مدل‌ها به دو صورت مطرح شده‌اند، مدل‌هایی که در آن‌ها تخصیص لکوموتیو و واگن به صورت همزمان صورت می‌گیرد و مدل‌هایی که هدف آن‌ها تخصیص همزمان لکوموتیو و برنامه‌ریزی حرکت قطار است. کردئو و همکاران در سال ۲۰۰۱ روشی جدید برای حل مساله‌ی مربوط به تخصیص همزمان واگن و لکوموتیو در قطارهای مسافری ارائه کردند. در مطالعه‌ی آنها انواع مختلفی از واگن، لکوموتیو و قطار موجود بود که به روش‌های مختلف به هم متصل می‌شدند و یک مجموعه قطار را تشکیل می‌دادند. لینگایا و همکارانش در سال ۲۰۰۲ یک مدل بهینه‌سازی برای تخصیص همزمان لکوموتیو و واگن به قطارهای مسافری ارائه کردند. هدف مدل حداقل کردن هزینه‌ی عملیاتی تخصیص تمام تجهیزات موجود به قطارهای زمان‌بندی شده بود. ملیولی و سول در سال ۲۰۰۷ مدلی مبتنی بر جریان‌های چند کالایی برای قطارهای مسافری آلمان ارائه کردند. هدف، یافتن ترکیب بهینه لکوموتیو و واگن بود. ژو و همکاران در سال ۲۰۱۵ یک راه‌آهن تک خطه دو طرفه را مورد بررسی قرار دادند که از دو ایستگاه مبدا و مقصد و چندین ایستگاه میانی تشکیل شده بود. دو نوع قطار رفت و برگشت در این مسیر تردد می‌کرد. مقصد قطارهای رفت، مبدا قطارهای برگشت بود و بلعکس. در این صورت این امکان وجود داشت که قطار خروجی از ایستگاه بتواند از لکوموتیو قطارهای ورودی به ایستگاه استفاده کند که به آن ارتباط قطار به قطار گفته می‌شد. این نوع ارتباط قطار به قطار باعث افزایش بهره‌وری و کاهش تعداد لکوموتیوهای مورد نیاز می‌شد. آنها در سال ۲۰۱۷ مدل قبلی خود را توسعه داد و یک مدل برنامه‌ریزی صحیح مختلط ارائه دادند. مدل ریاضی آنها شامل دو وضعیت برای تخصیص لکوموتیو بود، در وضعیت سخت‌گیرانه که شدنی بودن جواب را تضمین می‌کرد، هر لکوموتیو فقط می‌تواند به حداکثر به دو قطار سرویس دهد ولی در وضعیت سهل گیرانه هر لکوموتیو می‌تواند به سه قطار یا بیشتر سرویس دهد. آنها برای هر دو وضعیت محدودیت‌های مسئله را بیان کردند و دو مدل ریاضی ارائه دادند. با وجود اینکه در وضعیت سهل‌گیرانه یک جواب نشدنی تولید می‌شد اما یک حد پایین خوب برای مسئله اصلی محسوب می‌شد. ژو و همکاران در سال ۲۰۱۸ یک مدل ریاضی دیگر برای تخصیص

همزمان لکوموتیو زمان‌بندی قطار ارائه دادند. این مدل مشابه مساله مسیریابی وسیله نقلیه با بارگیری و تحویل و محدودیت پنجره زمانی بود که وسیله نقلیه و مشتری نشان‌دهنده لکوموتیو و قطار می‌باشد. البته محدودیت‌های دیگری نظیر ظرفیت خط و حداقل هدوی به مساله اضافه شده است. آنها یک شبکه وضعیت مکان زمان ارائه دادند و توسط الگوریتم آزادسازی لاگرانژ، مساله را حل کردند که این شبکه اولین بار توسط محمودی و ژاوو در سال ۲۰۱۶ برای مساله $VRPPDTW$ ارائه شده بود. با این وجود بر خلاف مدل محمودی و ژاوو که وضعیت نشان دهنده‌ی یک بردار باینری بود در مدل ژوو و همکاران وضعیت نشان‌دهنده یک عدد صحیح می‌باشد و در روش حل نیز محدودیت‌های عملیاتی قطار مانند محدودیت‌های هدوی و ظرفیت خط نیز به مدل اضافه شده است که به صورت کمان‌های ناهمگن در شبکه نشان داده است.

۲- تعریف مسئله و مفروضات مسئله

۲-۱- تابع هدف و محدودیت‌ها

در مسئله‌ی مطالعه شده هدف تخصیص همزمان لکوموتیو و زمانبندی قطارها و تعیین مسیر لکوموتیوها می‌باشد، بطوری که مجموع هزینه‌ها حداقل شود. شروع حرکت هر لکوموتیو باید از ایستگاه مبدا لکوموتیو آغاز شود و در ایستگاه مقصد لکوموتیو به پایان برسد و ممکن است یک لکوموتیو از یک ایستگاه چندین بار عبور کند. محدودیت‌های مسئله که باید رعایت شوند به شرح زیر است:

- محدودیت‌های تخصیص قطار: به هر قطار k یک لکوموتیو سازگار تخصیص داده می‌شود یا قطار کنسل می‌شود. هر لکوموتیو l باید قطارهایی را که به آن تخصیص داده شده است را یکی پس از دیگری سرویس دهد. هنگامیکه لکوموتیو l به قطار k سرویس می‌دهد باید به قطار k در ایستگاه مبدا o_k متصل شود و پس از طی ایستگاه‌های میانی در مقصد d_k از قطار جدا شود.
- محدودیت‌های پنجره زمانی: هر لکوموتیو l در ابتدا در ایستگاه o_l قرار دارد و بعد از زمان p_l در دسترس می‌باشد و باید عملیات خود را زودتر از زمان q_l در ایستگاه d_l به پایان رساند. هر قطار k تخصیص داده شده به لکوموتیو l باید در پنجره زمانی $[p_k، p'_k]$ حرکت خود را از مبدا شروع کرده و پس از طی مسیر خود در پنجره زمانی $[q_k، q'_k]$ وارد ایستگاه پایانی شود.
- محدودیت‌های هدوی در ایستگاهها: برای هر ایستگاه i اگر دو لکوموتیو از یک خط وارد ایستگاه شوند باید با حداقل اختلاف زمانی g_i این ورود به ایستگاه انجام شود و همچنین اعزام دو لکوموتیو از ایستگاه i به یک خط باید با حداقل اختلاف زمانی h_i انجام شود.
- محدودیت‌های ظرفیت خط: در یک خط لکوموتیو یا قطار نمی‌تواند از یک لکوموتیو یا قطار دیگر سبقت بگیرد.

۲-۲- مفروضات

مفروضات مسئله به شرح زیر است:

۱- خطوط راه‌آهن یکطرفه در نظر گرفته شده است.
۲- ظرفیت ایستگاهها نامحدود می‌باشد.
۳- مسیریابی قطارها انجام شده است اما زمانبندی قطارها باید تعیین شود.
۴- ایستگاه مبدا و مقصد هر لکوموتیو مشخص است.
۵- هر قطار برای حرکت تنها به یک لکوموتیو نیاز دارد.
۶- لکوموتیوها بعد از پایان سرویس دهی به یک قطار می‌تواند به ایستگاه دیگر حرکت کند. (جابجایی سبک)
۷- یک قطار می‌تواند کنسل شود که شامل جریمه کنسلی می‌شود.

۳- شبکه مکان-زمان-وضعیت و مدل ریاضی

در این قسمت مسئله را توسط جریان شبکه چند کالایی و با در نظر گرفتن محدودیت‌های مختص شبکه راه‌آهن فرموله می‌کنیم، بطوریکه کالاها در این شبکه نشان‌دهنده لکوموتیوها می‌باشد.

۳-۱- ارائه شبکه مکان زمان وضعیت

برای هر لکوموتیو وضعیت نشان‌دهنده آن است که لکوموتیو در حال سرویس‌دهی به کدام قطار است. اگر لکوموتیو در وضعیت 0 قرار بگیرد بدین معنی است که لکوموتیو هیچ قطاری را سرویس نمی‌دهد(جابجایی سبک، توقف در ایستگاه بدون قطار). وقتی لکوموتیو در وضعیت k قرار بگیرد بدین معنی است که لکوموتیو در حال سرویس‌دهی به قطار k ام می‌باشد(اتصال به قطار، کشیدن قطار، توقف در ایستگاه، جدا شدن از قطار). اگر فرض کنیم:

$$\bar{K} = \{0\} \bigcup K$$

در اینصورت $\bar{K}$ برابر است با تمام حالت‌های ممکن برای بعد وضعیت در این شبکه‌ی سه بعدی G. بعد زمان شامل افق زمانی در نظر گرفته شده $\{0,1,..,T\}$ می‌باشد. بعد مکان شبکه‌ی G شامل ایستگاهها می‌باشد که برای بیان هر ایستگاه در شبکه از دو گره استفاده می‌کنیم.

$$\bar{S} = \{\rho(i) \mid i \in S\} \bigcup \{\rho'(i) \mid i \in S\}$$

که ρ_i بیانگر ورود به ایستگاه i و ρ'_i بیانگر خروج از ایستگاه i می‌باشد.
مجموعه گره‌های ممکن برای شبکه G برابر است با:

$$V = \{\bar{o}, \bar{d}\} \bigcup \{(k,r,t) \mid k \in \bar{K}, r \in \bar{S}, t = 0,1,...,T\}$$

نقاط $\bar{d}, \bar{o}$ به ترتیب نقاط مبدا و مقصد مجازی برای شبکه چندکالایی محسوب می‌شود. یک مسیر در این شبکه از نقطه $\bar{o}$ شروع می‌شود و پس از عبور از نقاط مختلف در نقطه $\bar{d}$ به پایان می‌رسد. هر نقطه یا گره در این شبکه با تغییر در مکان، زمان یا وضعیت ایجاد می‌شود. مجموعه کمان‌های شبکه‌ی G شامل کمان‌های مختلفی می‌شود که هر کمان هزینه‌ی مربوط به خود را در شبکه ایجاد می‌کند. کمان $u \to v \in A$ و هزینه‌ی $\xi^l_{u,v}$ نشان می‌دهد که اگر لکوموتیو l از گره‌ی u به گره‌ی v برود این هزینه به شبکه تحمیل می‌شود. همانطور که بیان شد کمان‌های مختلفی در شبکه وجود دارد که در ادامه این کمان‌ها معرفی می‌کنیم:

۱- کمان شروع: برای هر $i \in S$ و $t = 0,1,...,T$ کمان $\bar{o} \to (0, \rho(i), t)$ وجود دارد اگر حداقل یک لکوموتیو وجود داشته باشد بطوریکه $i = o_l$ ، $t \geq p_l$ که در این صورت $\xi^l_{\bar{o},(0,\rho(i),t)} = 0$ در غیر این صورت $\xi^l_{\bar{o},(0,\rho(i),t)} = \infty$

توسط این کمان لکوموتیو l می‌تواند عملیات خود را از ایستگاه o_l و در زمان p_l یا بعد از آن آغاز کند.

۲- کمان پایانی: برای هر $i \in S$ ، $t = 0,1,...,T$ کمان $(0, \rho'(i), t) \to \bar{d}$ وجود دارد اگر حداقل یک لکوموتیو وجود داشته باشد بطوریکه $i = d_l$ ، $t \leq q_l$ که در این صورت $\xi^l_{(0,\rho'(i),t),\bar{d}} = 0$ در غیر این صورت $\xi^l_{(0,\rho'(i),t),\bar{d}} = \infty$

توسط این کمان لکوموتیو l می‌تواند عملیات خود را در ایستگاه d_l و در زمان q_l یا قبل از آن پایان دهد.

۳- کمان اتصال: برای هر $k \in K$ ، $t = 0,1,...,T$ کمان $(0, \rho'(o_k), t) \to (k, \rho(o_k), t')$ وجود دارد اگر حداقل یک لکوموتیو

وجود داشته باشد بطوریکه $l \in \theta_k$ ، $t \geq p_l$ ، $t' = t + ptime_{l,k} \leq q_l$

در این صورت $\xi^l_{(0,p'(o_k),t),(k,\rho(o_k),t')} = f_{lk} + c'_l(t'-t) - \pi_k$ در غیر این صورت $\xi^l_{(0,p'(o_k),t),(k,\rho(o_k),t')} = \infty$

توسط این کمان لکوموتیو l می‌تواند در ایستگاه o_k به قطار k متصل شود و وضعیت را از 0 به k تغییر دهد و در نتیجه قطار k کنسل نمی‌شود که باعث کاهش هزینه π_k از تابع هدف می‌شود.

۴-کمان انفصال: برای هر $k \in K$ ، $t,t' = 0,1,...,T$ کمان $(k, \rho'(d_k), t) \to (0, \rho(d_k), t')$ وجود دارد اگر حداقل یک لکوموتیو وجود داشته باشد که بطوریکه $l \in \theta_k$ ، $t \geq p_l$ ، $t' = t + dtime_{l,k} \leq q_l$

در این صورت $\xi^l_{(k,\rho(d_k),t),(0,\rho(d_k),t')} = c'_l(t'-t)$ در غیر این صورت $\xi^l_{(k,\rho(d_k),t),(0,\rho(d_k),t')} = \infty$

توسط این کمان لکوموتیو l می‌تواند در ایستگاه d_k از قطار k جدا شود و وضعیت را از k به 0 تغییر دهد.

۵-کمان جابجایی سبک: برای هر $i \to j \in E$ ، $t,t' = 0,1,...,T$ کمان $(0, \rho'(i), t) \to (0, \rho(j), t')$ وجود دارد اگر حداقل یک لکوموتیو وجود داشته باشد بطوریکه $l \in L$ ، $t \geq p_l$ ، $t' = t + ltime^l_{ij}$

در این صورت $\xi^l_{(0,\rho'(i),t),(0,\rho(j),t')} = c_l(t'-t)$ در غیر این صورت $\xi^l_{(0,\rho'(i),t),(0,\rho(j),t')} = 0$

توسط این کمان لکوموتیو l می‌تواند به صورت سبک (بدون قطار) از ایستگاه i به ایستگاه j منتقل شود.

۶-کمان جابجایی با قطار: برای هر $k \in K$ ، $i \to j \in E$ ، $t,t' = 0,1,...,T$ کمان $(k,\rho'(i),t) \to (k,\rho(j),t')$ وجود دارد اگر حداقل یک لکوموتیو وجود داشته باشد بطوریکه

- $l \in \theta_k$
- $t \geq p_l$
- $t' = t + \max(ltime_{ij}^l, trtime_{i,j}^k) \leq q_l$
- $S_1 = o_k, S_n = d_k \qquad i \to j \subseteq S_1, S_2, ..., S_n$
- اگر $i = S_1$ در این صورت $p_k \leq t \leq p_k'$
- اگر $j = S_n$ در این صورت $q_k \leq t' \leq q_k'$

توسط این کمان قطار k می‌تواند از ایستگاه i به ایستگاه j منتقل شود.

۷-کمان توقف با قطار: برای هر $k \in K$ ، $i \in S$ ، $t,t' = 0,1,...,T$ کمان $(k,\rho(i),t) \to (k,\rho'(i),t')$ وجود دارد اگر

$$l \in \theta_k \text{ ، } t \geq p_l \text{ ، } t' = t + dwtime_{ki} \leq q_l \text{ ، } i \in \{S_1, S_2, ..., S_n\}$$

در این صورت $\xi^l_{(k,\rho(i),t),(k,\rho'(j),t')} = c_l'(t'-t)$ در غیر این صورت $\xi^l_{(k,\rho(i),t),(k,\rho'(j),t')} = \infty$

توسط این کمان قطار k می‌تواند حداقل توقف مجاز را در ایستگاه i انجام دهد تا مسافران بتوانند در ایستگاه پیاده یا سوار شوند.

یک کمان توقف دیگر نیز برای می‌توان در نظر گرفت $(k,\rho'(i),t) \to (k,\rho'(i),t+1)$ اگر $p_l \leq t \leq q_l - 1$

که در این صورت $\xi^l_{(k,\rho'(i),t),(k,\rho'(i),t+1)} = c'$

۸-کمان توقف بدون قطار: برای هر $i \in S$ ، $p_l \leq t \leq q_l$ کمان $(0,\rho(i),t) \to (0,\rho'(i),t')$ وجود دارد اگر $l \in L$

$p_l \leq t \leq q_l$ در این صورت $\xi^l_{(0,\rho(i),t),(0,\rho'(i),t')} = c'(t'-t)$ در غیر این صورت $\xi^l_{(0,\rho'(i),t),(0,\rho'(i),t+1)} = \infty$

توسط این کمان لکوموتیو می‌تواند در ایستگاه i توقف کند بدون آنکه به قطاری سرویس دهد. یک کمان دیگر نیز می‌توان در نظر گرفت $(0,\rho(i),t) \to (0,\rho'(i),t)$، توسط این کمان لکوموتیو می‌تواند حالت ورود به ایستگاه را به حالت خروج از ایستگاه تغییر دهد که در این صورت $\xi^l_{(0,\rho(i),t),(0,\rho'(i),t)} = 0$

۹- کمان بازرسی: برای هر $i \in S$ ، $t = 0,1,...,T$ کمان $(0,\rho(i),t) \to (0,\rho'(i),t')$ وجود دارد اگر $p_l \leq t \leq q_l$

در این صورت $\xi^l_{(0,\rho(i),t),(0,\rho(i),t')} = -cm_l(t'-t)$ در غیر این صورت $\xi^l_{(0,\rho(i),t),(0,\rho(i),t')} = \infty$

توسط این کمان لکوموتیو بعد از جدا شدن از قطار، عملیات بازرسی بر روی آن انجام می‌شود. اگرچه عملیات بازرسی هزینه بر می‌باشد و همچنین لکوموتیو برای مدتی غیر قابل دسترس می‌شود اما با توجه به افزایش عمر لکوموتیو، در مجموع این عملیات باعث کاهش هزینه‌های سیستم می‌شود.

۳-۲- محدودیت‌های شبکه راه‌آهن

هر جواب شدنی در شبکه مکان زمان وضعیت ارائه شده باید محدودیت‌های پنجره زمانی را رعایت کند اما ممکن است محدویت‌های هدوی و محدودیت‌های ظرفیت خط را در نظر گرفته نشود. همچنین ممکن است کمان‌های اتصال به قطار و بازرسی به دلیل صرفه جویی در هزینه‌ها چندین بار پیموده شوند. بنابراین علاوه بر محدویت‌های جریان شبکه چند کالایی باید محدودیت‌هایی زیر نیز به مسئله اضافه می‌شوند.

- محدویت اتصال به قطار: هر زمان که لکوموتیو به قطار متصل می‌شود هزینه π_k صرفه‌جویی می‌شود. به همین دلیل امکان دارد کمان اتصال به قطار به ازای هر قطار چندین بار پیموده شود. ما محدودیتی وضع می‌کنیم که کمان اتصال به قطار به ازای هر قطار فقط یک بار پیموده شود.

$$C_K^1 = A \cap \{(0,\rho(i),t) \to (0,\rho'(j),t') \mid t,t' = 0,1,...,T\}$$

- محدودیت‌های هدوی ورودی: اختلاف زمانی بین ورودها به ایستگاه j باید کمتر از هدوی ورود g_j نباشد. پس به ازای هر $i \to j \in E$ و به ازای $t_1 = 0,1,...,T - g_j + 1$ بیشتر از یک لکوموتیو نمی‌تواند در بازه زمانی $[t_1, t_1 + g_i - 1]$ کمان $i \to j \in E$ را بپیماید. بنابراین محدودیتی وضع می‌کنیم که تمام جریان‌های جابجایی با قطار و جابجایی سبک در زیر مجموعه زیر حداکثر یکی باشد.

$$C_{i,j,t_1}^2 = A \cap \{(k,\rho'(i),t) \to (k,\rho(j),t') \mid k \in \overline{K}, t,t' = 0,1,...,T; t_1 \le t' \le t_1 + g_j - 1\}$$

- محدودیت‌های هدوی اعزام: اختلاف زمانی بین اعزام‌ها از ایستگاه j نباید کمتر از هدوی اعزام h_j باشد. پس به ازای هر $i \to j \in E$ و به ازای هر $t_1 = 0,1,...,T - h_j + 1$ نباید بیشتر از یک لکوموتیو در بازه زمانی $[t_1, t_1 + h_j - 1]$ کمان $i \to j \in E$ را بپیماید. بنابراین محدودیتی وضع می‌کنیم که تمام جریان‌های جابجایی با قطار و جابجایی سبک در زیر مجموعه زیر حداکثر یکی باشد.

$$C_{i,j,t_1}^2 = A \cap \{(k,\rho'(i),t) \to (k,\rho(j),t') \mid k \in \overline{K}, t,t' = 0,1,...,T; t_1 \le t' \le t_1 + h_j - 1\}$$

- محدودیت‌های ظرفیت خط: یک لکوموتیو یا قطار مجاز نیست از لکوموتیو یا قطار دیگر در یک خط سبقت بگیرد. بنابراین به ازای هر $i \to j \in E$ و چهار نقطه زمانی متفاوت $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4 \le T$ محدودیتی وضع می‌کنیم که تمام جریان‌های جابجایی با قطار و جابجایی سبک در زیر مجموعه زیر حداکثر یکی باشد.

$$C_{ijt_1t_2t_3t_4}^4 = A \cap [\{(k,\rho'(i),t_1) \to (k,\rho(j),t_4) \mid k \in \overline{K}\} \cup \{(k,\rho'(i),t_2) \to (k,\rho(j),t_3) \mid k \in \overline{K}\}]$$

- محدودیت بازرسی: به دلیل اینکه کمان بازرسی باعث کاهش هزینه‌ها می‌شود این امکان وجود دارد این کمان چندین بار پیموده شود. ما محدودیتی وضع می‌کنیم که کمان بازرسی به ازای هر قطار فقط یک بار پیموده شود.

$$C_K^5 = A \cap \{(0,\rho(i),t) \to (0,\rho'(j),t') \mid t,t' = 0,1,...,T\}$$

۳-۳- مدل ریاضی

به ازای $l \in L$ و $u \to v \in A$ متغیر $x^l_{u \to v}$ اگر کمان $u \to v$ توسط لکوموتیو l پیموده شود ۱ و در غیر این صورت ۰ می‌باشد بنابراین مسئله جریان شبکه چند کالایی معرفی شده با محدودیت‌های شبکه راه‌آهن به صورت زیر فرموله می‌شود.

$$Min(\sum_{k \in K} \pi_k + \sum_{l \in L} \sum_{u \to v \in A} \xi^l_{u,v} x^l_{u,v}) \quad (1)$$

s.t

$$\sum_{v:\bar{o} \to v \in A} x^l_{\bar{o},v} = 1, \forall l \in L \quad (2)$$

$$\sum_{u:u \to \bar{d} \in A} x^l_{u,\bar{d}} = 1, \forall l \in L \quad (3)$$

$$\sum_{u:u \to v \in A} x^l_{u,v} = \sum_{w:v \to w \in A} x^l_{v,w}, \forall l \in l, v \in V \setminus \{\bar{o}, \bar{d}\} \quad (4)$$

$$\sum_{u \to v \in A} \sum_{l \in L} x^l_{u,v} \le 1, \forall c \in C \quad (5)$$

$$x^l_{u,v} \in \{0,1\}, l \in L, u \to v \in A \quad (6)$$

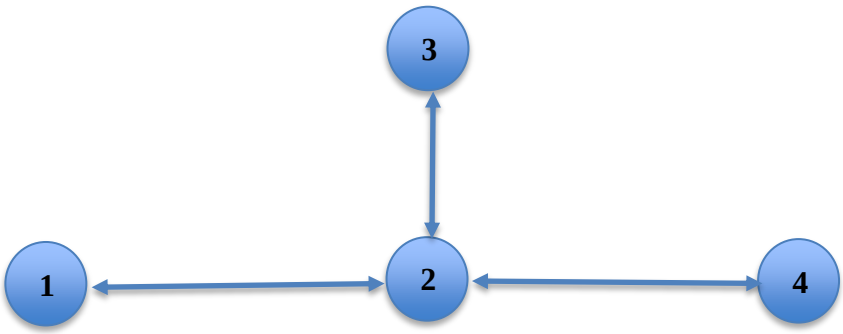
(۱) تابع هدف از دو قسمت تشکیل شده است قسمت اول مقداری ثابت و هزینه‌های کنسلی قطار می‌باشد و قسمت دوم مجموع هزینه‌های عملیاتی می‌باشد. محدودیت‌های (۲) تا (۴) محدودیت‌های عرضه، تقاضا و تعادل در شبکه چندکالایی می باشد. محدودیت (۵) شامل محدودیت‌های شبکه راه‌آهن می‌باشد که در قسمت ۳-۲ ارائه شده است. محدودیت (۶) محدودیت باینری بودن متغیر تصمیم می‌باشد.

جدول ۱. نمادهای مدل ریاضی

نماد	توضیحات
S	مجموعه‌ی ایستگاه‌ها
E	مجموعه کمان‌ها
L	مجموعه لکوموتیوها
K	مجموعه قطارها
g_i	حداقل هدوی بین ورودها از یک خط یه ایستگاه i
h_i	حداقل هدوی بین اعزام‌ها به یک خط از ایستگاه i
S_n	مجموعه ایستگاه‌های در مسیر قطار n ام
o_k	ایستگاه مبدا قطار k ام
d_k	ایستگاه مقصد قطار k ام
$[p_k, p'_k]$	پنجره زمانی برای اعزام قطار k ام از ایستگاه مبدا
$[q_k, q'_k]$	پنجره زمانی برای ورود قطار k ام به ایستگاه مقصد
$trtime^k_{i,j}$	حداقل زمان سفر قطار k ام از ایستگاه i ام به ایستگاه j ام
$dwtime_{k,i}$	حداقل زمان توقف قطار K ام در ایستگاه i ام
θ_k	مجموعه لکوموتیوهای سازگار برای قطار k ام
π_k	جریمه کنسل شدن قطار k ام
o_l	مبدا لکوموتیو l ام
d_l	مقصد لکوموتیو l ام
p_l	زودترین زمان شروع عملیات لکوموتیو l ام
q_l	دیرترین زمان پایان عملیات لکوموتیو l ام
$litime^l_{i,j}$	زمان سفر لکوموتیو l از ایستگاه i به ایستگاه j در حالت جابجایی سبک(بدون قطار)
c_l	هزینه عملیاتی در واحد زمان وقتی که لکوموتیو l در حال حرکت است
c'_l	هزینه عملیاتی در واحد زمان وقتی که لکوموتیو l در حال توقف است
$f_{l,k}$	هزینه ثابت تخصیص لکوموتیو l به قطار k
$ptime_{l,k}$	زمان مورد نیاز برای اتصال لکوموتیو l به قطار k
$dtime_{l,k}$	زمان مورد نیاز برای انفصال لکوموتیو l از قطار k
$x^l_{u\to v}$	متغیر باینری اگر لکوموتیو l کمان $u \to v$ را بپیماید ۱ در غیر اینصورت ۰

۴- یک مثال

شبکه ریلی در شکل ۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۱. یک شبکه فرضی ریلی

داده‌های ورودی قطارها و لکوموتیوها به صورت زیر است:

مسیر قطار ۱ به ترتیب ایستگاههای ۱و۲و۴، مسیر قطار ۲ به ترتیب ایستگاههای ۴و۲و۳ و مسیر قطار ۳ ایستگاههای ۲و۱ می‌باشد. پنجره زمانی برای شروع سفر قطارهای ۱و۲ بازه زمانی [۱،۲] و برای قطار ۳ بازه زمانی [۸،۹] می‌باشد. پنجره زمانی برای پایان سفر قطارهای ۱و۲ بازه زمانی [۵،۶] و برای قطار ۳ بازه زمانی[۱۰،۱۱] می‌باشد. زمان سفر قطارها در ایستگاهها یک واحد زمانی می‌باشد و قطارهای ۱و۲ در ایستگاه ۲ یک واحد زمانی توقف دارند. هزینه‌ی کنسل شدن قطارها ۱۰۰۰۰ واحد، هزینه ثابت تخصیص لکوموتیوها ۱۰۰۰واحد و هزینه متغیر ۱۰واحد به ازای هر واحد زمانی در نظر گرفته شده است. مبدا لکوموتیو ۱ ایستگاه ۱ و مبدا لکوموتیو ۲ ایستگاه ۴ می‌باشد و مقصد لکوموتیو ۱ ایستگاه ۴ و مقصد لکوموتیو ۲ ایستگاه ۱ می‌باشد. زودترین زمان شروع عملیات لکوموتیوها زمان ۰ و دیرترین زمان اتمام عملیات لکوموتیوها زمان ۱۲ می‌باشد. زمان مورد نیاز برای اتصال یا انفصال لکوموتیوها از قطارها یک واحد زمانی می‌باشد. قطار ۱ فقط توسط لکوموتیو ۱ می‌تواند سرویس داده شود، قطار ۲ فقط توسط لکوموتیو ۲ سرویس داده می‌شود و قطار ۳ توسط هر دو لکوموتیو سرویس داده می‌شود.

$path = [[1,2,4],[4,2,3],[2,1]]$

$[p_k, p'_k] = [[1,2],[1,2],[8,9]]$ $[q_k, q'_k] = [[5,6],[5,6],[10,11]]$

$trtime = [[1,1],[1,1],[1]]$ $litime = [1,1,1]$ $dwtime = [[0,1,0],[0,1,0],[0,0]]$

$\pi_k = [10000,10000,10000]$ $f_{l,k} = [[1000,1000,1000],[1000,1000,1000]]$ $\theta_k = [[1],[2],[1,2]]$

$o_l = [1,4]$ $d_l = [4,1]$ $p_l = [0,0]$ $q_l = [12,12]$ $ptime = [[1,1],[1,1],[1,1]]$ $dtime = [[1,1],[1,1],[1,1]]$

با استفاده از داده‌های ورودی و مدل ریاضی ارائه شده و استفاده از نرم‌افزار زیر مسئله حل شده است.

Python MIP/CBC MILP solver/ version:devel Built Date: Nov 15 2020

جواب مثال به صورت است:

$$loc1: \bar{o} \to [0, \rho(1), 0] \to [0, \rho'(1), 0] \to [1, \rho(1), 1] \to [1, \rho'(1), 1] \to [1, \rho(2), 2] \to$$
$$[1, \rho'(2), 3] \to [1, \rho(4), 4] \to [1, \rho'(4), 4] \to [0, \rho(4), 5] \to [0, \rho(4), 6] \to [0, \rho'(4), 6] \to \bar{d}$$

$$loc2: \bar{o} \to [0, \rho(4), 0] \to [0, \rho'(4), 0] \to [2, \rho(4), 1] \to [2, \rho'(4), 1] \to [2, \rho(2), 2] \to [2, \rho'(2), 3]$$

$$\to [2, \rho(3), 4] \to [2, \rho'(3), 4] \to [0, \rho(3), 5] \to [0, \rho(3), 6] \to [0, \rho'(3), 6] \to [0, \rho(2), 7] \to [0, \rho'(2), 7]$$
$$\to [3, \rho(2), 8] \to [3, \rho'(2), 8] \to [3, \rho(1), 9] \to [3, \rho'(1), 9] \to [0, \rho(1), 10] \to [0, \rho(1), 11] \to [0, \rho'(1), 11] \to \bar{d}$$

لکوموتیو ۱ از مبدا و توسط کمان شروع کار خود را آغاز کرده و بعد از پیمودن کمان توقف بدون قطار به قطار ۱ در زمان ۱متصل شده است، با قطار به ایستگاه ۲ وارد شده و یک واحد زمانی توقف داشته است. بعد به ایستگاه ۴ رفته و در این ایستگاه در زمان ۵ از قطار جدا شده و پس از طی کردن کمان بازرسی در زمان ۶ به مقصد رسیده است.

لکوموتیو ۲ از ایستگاه ۴ کار خود را آغاز کرده و قطار ۲ را به ایستگاه ۲ رسانده، یک واحد زمانی توقف داشته سپس وارد ایستگاه ۳ شده است. لکوموتیو بعد از جدا شدن از قطار ۲ و انجام بازرسی بدون قطار(جابجایی سبک) در زمان ۷ به ایستگاه ۲ بازگشته است. پس از اتصال به قطار ۳ به ایستگاه ۱ وارد شده است و در این ایستگاه از قطار جدا شده و پس از بازرسی در زمان ۱۱ به مقصد رسیده است.

۵- نتیجه گیری و تحقیقات آینده

در این مقاله یک مدل جامع برای تخصیص لکوموتیو و زمانبندی قطار ارائه شد. تابع هدف مسئله، حداقل کردن هزینه‌های عملیاتی و هزینه کنسل شدن قطارها بود. در محدودیت‌های مسئله علاوه بر محدویت‌های شبکه چند کالایی (تقاضا، عرضه و تعادل) محدودیت‌های شبکه راه‌آهن نیز ارائه شده است. در مدل ارائه شده، عملیات بازرسی بر روی لکوموتیوها بعد از جدا شدن از قطار انجام می‌شود. بطور کلی مدل‌های جامع به دلیل اینکه در واقع از دو مدل تشکیل شده‌اند، حجم محاسبات بیشتری دارند و نیاز به زمان بیشتری برای حل دارند. مدل ارائه شده نیز از این قاعده مستثنی نیست و برای مسائل بزرگتر در دنیای واقعی نیاز به استفاده از روش‌های فراابتکاری است. لذا پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آتی، برای حل مسائل بزرگتر از روش‌های فراابتکاری استفاده شود. در روش‌های حل فراابتکاری اگرچه جواب بدست آمده ممکن است با جواب بهینه اختلاف ناچیزی داشته باشد اما زمان قابل قبولی برای حل مسائل در ابعاد بزرگ دارند.

مراجع

[1] مومنی, جلال؛ بابک امین نژاد؛ داود صداقت شایگان و حسن احمدی، ۱۳۸۸، مروری بر اهمیت حمل ونقل ریلی و برخی از اجزء تشکیل‌دهنده راه‌آهن، اولین کنفرانس ملی مهندسی و مدیریت زیر ساختها، تهران، دانشگاه تهران

[2] یقینی، مسعود و هزاره ای، حسین علی،۱۳۹۸،مدل های بهینه سازی تخصیص لکوموتیو،ششمین کنفرانس بین المللی پیشرفتهای اخیر در مهندسی راه آهن،تهران

[3] Cordeau, J.F., Desaulniers,G., Lingaya,N., Soumis, F., Desrosiers, J., 2001. Simultaneous locomotive and car assignment at VIA Rail Canada. Transportation Research Part B: Methodological 35, 767–787.

[4] Lingaya, N., Cordeau, J.F., Desaulniers, G., Desrosiers, J., Soumis, F., 2002. Operational car assignment at VIA Rail Canada. Transportation Research Part B: Methodological 36, 755–778.

[5] Ramani, K.V., 1981. An information system for allocating coach stock on Indian railways. Interfaces 11, 44–51.

[6] Ill´es,T., Makai, M.,Vaik, Z., 2005.Railway engine assignment models based on combinatorial and integer programming— operations research report 2005-04. Technical Report, E¨otv¨os Lor´and University of Sciences— Operations Research Department, Budapest, Hungary.

[7] Paoletti, B., Cappelletti, S., 2007. The optimization model for locomotive rostering in the fleet planning project. The Proceedings of the Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications. Institute of Electrical and Electronics Engineers—IEEE, Beijing, China freeabs.

[8] Ahuja, R.K., Cunha, C.B., Sahin,G., 2005a. Network models in railroad planning and scheduling. Tutorials in Operations Research 1, 54–101.

[9] Vaidyanathan, B., Ahuja, R.K., Liu, J., Shughart, L.A., 2008a. Real-life locomotive planning: new formulations and computational results. Transportation Research Part B: Methodological 42, 147–168. Transportation Science 37, 183–197.

[10] Assad, A. A. (1980). Modelling of rail networks: Toward a routing/makeup model. Transportation Research Part B: Methodological, 14(1), 101–114.

[11] Cordeau, P. Toth, and D. Vigo, "A Survey Of Optimization Models For Train Routing And Scheduling", Transportation Science, vol. 32, pp. 380-404, 1998.

[12] Booler, J.M.P., 1980. The solution of a railway locomotive scheduling problem. Journal of the OperationalResearch Society.

[13] Wright, M.B., 1989. Applying stochastic algorithms to a locomotive scheduling problem. Journal of the Operational Research Society 40, 187–192.

[14] Forbes M.A., Holt J.N.,Watts A.M., 1991. Exact solution of locomotive scheduling problems. Journal of the Operational Research Society 42, 825–831.

[15] F¨ugenschuh, A., Homfeld, H., Huck, A., Martin, A., 2006. Locomotive and wagon scheduling in freight transport.In Jacob, R., M¨uller-Hannemann, M. (eds) ATMOS 2006—6th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways. Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum f ¨ur Informatik (IBFI), Z¨urich, Switzerland.

[16] Florian, M., Bushell, G., Ferland, J., Guerin, G., Nastansky, L., 1976. The engine scheduling problem in a railway network. INFOR 14, 121–138.

[17] Ziarati, K., Soumis, F., Desrosiers, J., Gelinas, S., Saintonge, A., 1997. Locomotive assignment with heterogeneous consists at CN North America. European Journal of Operational Research 97, 281–292.

[18] Ziarati, K., Soumis, F., Desrosiers, J., Solomon, M.M., 1999. A branch-first, cut-second approach for locomotive assignment. Management Science 45, 1156–1168.

[19] پ. کریمی پور، «مساله تخصیص لکوموتیو به قطار، مطالعه موردی راه‌آهن ایران»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۰

[20] Ahuja, R.K., Cunha, C.B., Sahin,G., 2005a. Network models in railroad planning and scheduling. Tutorials in Operations Research 1, 54–101.

[21] Rouillon, G. Desaulniers, and F. Soumis, "An Extended Branch-And-Bound Method For Locomotive Assignment", Transportation Research, vol. 40, pp. 404-423, 2006.

[22] Ghoseiri, K., Ghannadpour, S.F., 2010. A hybrid genetic algorithm for multi-depot homogenous locomotive assignment with time windows. Applied Soft Computing 10, 53–65.

[23] Cordeau, J.F., Desaulniers,G., Lingaya,N., Soumis, F., Desrosiers, J., 2001. Simultaneous locomotive and car assignment at VIA Rail Canada. Transportation Research Part B: Methodological 35, 767–787.

[24] Lingaya, N., Cordeau, J.F., Desaulniers, G., Desrosiers, J., Soumis, F., 2002. Operational car assignment at VIA Rail Canada. Transportation Research Part B: Methodological 36, 755–778.

[25] Godwin, R. Gopalan, and T. T. Narendran, "Locomotive Assignment And Freight Train Scheduling Using Genetic Algorithms", International Transactions In Operational Research, vol. 13, pp. 299–332, 2006.

[26] Mellouli,T. and L. Suhl, "Rotation Planning of Locomotive and Carriage Groups with Shared Capacities", Springer-Verlag, pp. 276-294, 2007.

[27] Xu, X., & Li, K. (2015, December). Cooperation research for locomotives assignment and train scheduling problems. In 2015 4th International Conference on Computer Science and Network Technology (ICCSNT) (Vol. 1, pp. 100-104). IEEE.

[28] Xu, X., Li, K., & X. Lu (2017). Simultaneous locomotive assignment and train scheduling on a single-track railway line: A simulation-based optimization approach. Computers & Industrial Engineering.

[29] Mahmoudi M., Zhou X., 2016. Finding optimal solutions for vehicle routing problem with pickup and delivery services with time windows: a dynamic programming approach based on state-space-time network representations. Transp. Res. Part B 89, 19–42.

[30] Xu, X., Li, C. L., & Xu, Z. (2018). Integrated train timetabling and locomotive assignment. Transportation Research Part B: Methodological, 117, 573-593.

[31] Piu, F., & Speranza, M. G. (2014). The locomotive assignment problem: a survey on optimization models. International Transactions in Operational Research, 21(3), 327-352.

[32] جان نثاری، ابراهیم؛ مسعود یقینی؛ محمد زنوزاده و الهام هنری، ۱۳۹۲، مدل چند هدفه ترکیبی مسائل زمانبندی حرکت قطارها و تخصیص لکوموتیو، دهمین کنفرانس بین المللی مهندسی صنایع، تهران، انجمن مهندسی صنایع ایران، دانشگاه صنعتی امیر کبیر،

[33] قصیری، کیوان و سمیه نکوئی شهرکی، ۱۳۸۸، مسأله تخصیص لکوموتیو چندهدفه، دومین کنفرانس بین المللی پیشرفتهای اخیر در مهندسی راه آهن، تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران،