



Mass Transfer_Lecture_05

نفوذ مولکولی در حالت ناپایدار و جا به جا به جایی در انتقال جرم

مدرس: علیرضا همتی

Alireza_hemmati@iust.ac.ir

1

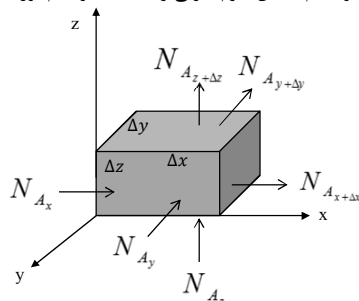


معادله پیوستگی Continuity

یک جزء حجمی سیال در حال حرکت را در نظر بگیرید:

✓ برای به دست آوردن معادله پیوستگی، باید موازنه مواد را بر حسب شدت جریان برای هر یک از اجزای سازنده سیال بنویسیم.

✓ اگر موازنه را به صورت جزئی بنویسیم، بیان جرم جزئی را بدست خواهیم آورد.



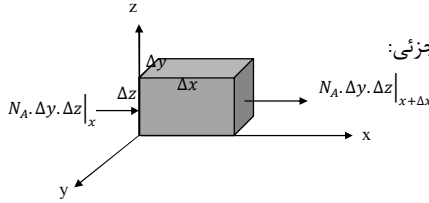
شدت انباشتگی در المان = (شدت تولید در داخل المان) + (شدت خروج از المان) - (شدت ورود به المان)

2



معادله پیوستگی Continuity

معادله اساسی بیلان جرم جزئی:



برای جزء A:

$$N_A \Delta z \Delta y \Big|_x - N_A \Delta z \Delta y \Big|_{x+\Delta x} + N_A \Delta x \Delta z \Big|_y - N_A \Delta x \Delta z \Big|_{y+\Delta y} + N_A \Delta x \Delta y \Big|_z - N_A \Delta x \Delta y \Big|_{z+\Delta z} + \Delta x \Delta y \Delta z R_A = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{dC_A}{dt} \rightarrow$$

R_A : سرعت تولید سازنده A در اثر واکنش شیمیایی هموژن ($\frac{mol}{volume \ time}$)

نکته: زمانی که واکنش هموژن نداریم (فصل قبل)، ترم gen را نیز نخواهیم داشت.

$$-\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow -\left[\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \right] + R_A = \frac{dC_A}{dt} \quad (1)$$

3



معادله پیوستگی Continuity

حال می‌خواهیم بدانیم که N_A از چه نوعی است؟

$$N_{A_{x,y,z}} = J_{A_{x,y,z}} + C_A V_{x,y,z} \quad (2)$$

سیالیتی در Diff-Conv

✓ زمانی که سرعت سیالیتی داریم، از سرعت نفوذ صرف نظر میکنیم.

$$N_A : \begin{cases} J_A \\ C_A V \end{cases} *$$

✓ اگر مسئله فقط از نوع نفوذ باشد، معادله درست نیست. ولی معادله فوق برای مسائل نفوذ-جا به جایی و جا به جایی درست است.

4



معادله پیوستگی Continuity

با جایگذاری رابطه ۲ در رابطه ۱ خواهیم داشت:

$$-\left[\frac{\partial J_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial J_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial J_{Az}}{\partial z}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x}(C_A V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(C_A V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(C_A V_z)\right] + R_A = \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

نکته:

$$C_A \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{for incompressible fluid where } \rho = cte)$$

$$J_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x}, J_{Ay} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y}, J_{Az} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

5



معادله پیوستگی Continuity

بعد از ساده سازی خواهیم داشت:

$$D_{AB} \left[\frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} \right] + R_A = \frac{\partial C_A}{\partial t} + V_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + V_y \frac{\partial C_A}{\partial y} + V_z \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

$$\Rightarrow D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A = \frac{\partial C_A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C_A$$

$D_{AB} \nabla^2 C_A$: انتقال جرم ناشی از نفوذ

R_A : سرعت واکنش هموژن

$\frac{\partial C_A}{\partial t}$: انتقال جرم ناپایا

$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} C_A$: انتقال جرم ناشی از حرکت توده سیال

6



قانون دوم فیک Fick's second law

در معادله انتقال جرم به دست آمده در صفحه قبل، اگر فرضیات زیر را در نظر بگیریم:
 ۱- حرکت توده ای سیال نداشته باشیم ($V=0$).
 ۲- واکنش هموزن شیمیایی نداشته باشیم.

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 C_A$$

- این رابطه به قانون دوم فیک معروف است.
- از آنجایی که قانون اول فیک (با شرط غلظت مولی کل ثابت) به صورت $J_A = -D_{AB} \nabla C_A$ تعریف می شود، می توان قانون دوم فیک را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = -\nabla J_A$$

7



قانون دوم فیک Fick's second law

- این قانون برای هر سیستمی قابل استفاده نیست. علاوه بر ۲ شرط ذکر شده، باید $v^* = 0$ باشد و یا نفوذ در جامدات (مایعات با ویسکوزیته بالا) و یا نفوذ متقابل باشد.
- مهم ترین کاربرد قانون دوم فیک در مسائل نفوذ ناپایدار در جامدات (مثل فرایند خشک کردن) است. در پدیده خشک کردن چون ضرایب نفوذ بسیار کوچک است بنابراین تقریباً $v^* = 0$ است.

8



قانون دوم فیک Fick's second law

نتیجه قانون دوم فیک
مطابق با قانون دوم فیک زمان لازم برای یک تحول (مثل زمان برای خشک شدن) با مجذور ضخامت تناسب دارد.

$$D_{AB} \nabla^2 C_A = \frac{\partial C_A}{\partial t} \rightarrow D_{AB} \frac{C_A}{L^2} = \frac{C_A}{t}$$

$$t \propto \frac{L^2}{D_{AB}}$$

9



جا به جایی

convection



جا به جایی convection

مسائلی که فرم غالب آن جا به جایی است را در نظر میگیریم.
اگر توده سیال دارای حرکت به مفهوم سیالاتی باشد، جا به جایی مکانیزم غالب انتقال جرم است و شار انتقال جرم به دو روش قابل محاسبه است:

۱- روش اول:

از روابط مشابه روابط نفوذ استفاده می کنیم. در این حالت به جای ترم $\frac{D_{AB}C}{\delta}$ در معادلات نفوذ، از ضریب انتقال جرم F استفاده می شود. لذا خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } \sum N_i \neq 0 \rightarrow N_A = \frac{N_A}{\sum N_i} F \ln \left[\frac{\frac{N_A}{\sum N_i} - \frac{C_{A2}}{C}}{\frac{N_A}{\sum N_i} - \frac{C_{A1}}{C}} \right] \\ \text{if } \sum N_i = 0 \rightarrow N_A = F \left(\frac{C_{A1}}{C} - \frac{C_{A2}}{C} \right) \end{array} \right.$$

11



جا به جایی convection

- ضریب انتقال جرم F را ضریب انتقال جرم عمومی نیز می نامند (زیرا بر خلاف ضرایب k که در ادامه بررسی می شود، بر اساس نیروی محرکه خاصی تعریف نشده است).

- اگر بخواهیم روابط ضریب انتقال جرم F را برای فاز گاز بکار ببریم، از F_G و برای فاز مایع از F_L استفاده می کنیم.

$$F_G = \frac{D_{AB}C}{\delta} = \frac{P_t D_{AB}}{RT \delta}$$

$$F_L = \frac{D_{AB}C}{\delta} = \frac{\left(\frac{\rho}{M}\right)_{\text{avg}} D_{AB}}{\delta}$$

- واحد F مشابه N_A است.

$$F = \frac{D_{AB}C}{\delta} \rightarrow [F] = \frac{\left(\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}\right) \times \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)}{\text{m}} = \frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

12



جا به جایی convection

۲- روش دوم:

روابط شار انتقال جرم جا به جایی به تقلید از روابط انتقال حرارت جا به جایی ($q = h \Delta T$) نوشته می شود.

نیروی محرکه غلظت $\times$ ضریب انتقال جرم = شار انتقال جرم

با توجه به تنوع نیروی محرکه انتقال جرم (گرادیان غلظت، گرادیان فشار، اختلاف کسر مولی)، ضرایب انتقال جرم نوع k دارای تنوع زیادی هستند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{if } \sum N_i \neq 0: \begin{cases} \text{for gas: } N_A = k_C \Delta C_A = k_y \Delta y_A = k_G \Delta P_A \\ \text{for liquid: } N_A = k_L \Delta C_A = k_x \Delta x_A \end{cases} \\ \text{if } \sum N_i = 0: \begin{cases} \text{for gas: } N_A = k'_C \Delta C_A = k'_y \Delta y_A = k'_G \Delta P_A \\ \text{for liquid: } N_A = k'_L \Delta C_A = k'_x \Delta x_A \end{cases} \end{array} \right.$$

✓ بنابراین یکی از نکات مهم در جا به جایی، تشابه است.

13



جا به جایی convection

✓ واحد ضرایب انتقال جرم k در SI

ضریب انتقال جرم	واحد در سیستم SI
k_C, k'_C	$\frac{m}{s}$
k_G, k'_G	$\frac{mol}{m^2 s Pa}$
k_y, k'_y	$\frac{mol}{m^2 s}$
k_L, k'_L	$\frac{m}{s}$
k_x, k'_x	$\frac{mol}{m^2 s}$

به طور مثال:

$$N_A = k_L \Delta C \rightarrow [k_L] = \frac{mol / m^2 s}{mol / m^3} = \frac{m}{s}$$

14



جا به جایی convection

✓ F و k برای جا به جایی در جرم می باشند، که F برای تشابه نفوذ و جا به جایی و k برای تشابه با حرارت کاربرد دارد.

✓ ضرایب انتقال جرم نوع F برای شدت های زیاد انتقال جرم و ضرایب انتقال جرم نوع k برای شدت های کم انتقال جرم به کار می روند.

✓ برای بدست آوردن رابطه تشابه جا به جایی در نفوذ و جا به جایی حرارتی خواهیم داشت:

نفوذ در جزء ساکن

$$\begin{cases} N_A = k_G (P_{A1} - P_{A2}) \\ N_A = F \ln \frac{1 - \frac{P_{A2}}{P_t}}{1 - \frac{P_{A1}}{P_t}} \end{cases} \rightarrow F = k_G \frac{P_{B2} - P_{B1}}{\ln \frac{P_{B2}}{P_{B1}}} \rightarrow F = k_G P_{BM}$$

15



جا به جایی convection

جمع بندی:

روابط میان ضرایب انتقال جرم k و k'

$$\begin{cases} \text{نفوذ در جزء ساکن} & F = k_G P_{BM} = k_y y_{BM} = k_C C_{BM} = k_L C_{BM} = k_x x_{BM} \\ \text{نفوذ متقابل} & F = k'_G P_t = k'_y = k'_C C = k'_L C = k'_x \end{cases}$$

16

تمرین



چرا ضرایب انتقال جرم از نوع k برای شدت های کم انتقال قابل استفاده اند؟

صفحه زیر را در نظر می گیریم:

T_{∞} 

T_w 

$h(T_w - T_{\infty})$ جا به جایی حرارتی



لایه چسبیده به سطح

$-k \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0}$ نفوذ حرارتی

• چون لایه ساکن است فقط هدایت داریم.

17

تمرین

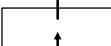


برای انتقال جرم:

$C_{A\infty}$ 

C_{Aw} 

$k_c(C_{Aw} - C_{A\infty})$ مانند حرارت جا به جایی



$N_{A,Diff} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dy} + \frac{C_A}{C} \sum N_i$

$\frac{C_A}{C} \sum N_i \approx 0$

✓ اگر $\frac{C_A}{C} \sum N_i$ زیاد باشد، شدت انتقال جرم خیلی زیاد می شود.

$\frac{C_A}{C} \sum N_i$ خاص انتقال جرم است که در حرارت نیست.

18



جابه جایی convection

بنابراین

k زمانی می تواند استفاده گردد که:

$$\left. \begin{array}{l} \text{۱- شدت انتقال جرم کم باشد: } \sum N_i \approx 0 \\ \text{۲- محلول رقیق باشد: } \frac{C_A}{C} \approx 0 \end{array} \right\} \quad \frac{C_A}{C} \sum N_i \approx 0$$

• k' چون $\frac{C_A}{C} \sum N_i$ را ندارد، محدودیت های k را ندارد (k' برای نفوذ متقابل می باشد و $\sum N_i = 0$ است).

19



جابه جایی convection

$$\left\{ \begin{array}{l} N_A = F \ln \frac{1 - \frac{P_{A2}}{P_t}}{1 - \frac{P_{A1}}{P_t}} \\ N_A = k_G (P_{A1} - P_{A2}) \end{array} \right. \quad F = k_G \cdot P_{BM} \quad \text{نفوذ در جزء ساکن}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_A = F \left(\frac{P_{A1}}{P_t} - \frac{P_{A2}}{P_t} \right) \\ N_A = k'_G (P_{A1} - P_{A2}) \end{array} \right. \quad F = k'_G \cdot P_t \quad \text{نفوذ متقابل}$$

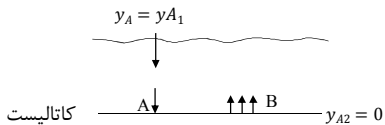
نکته برای محلول های رقیق ← $C_{BM} = C_t$ و $P_{BM} = P_t$

20



تمرین

$A \rightarrow 3B$
 رابطه ی k_y با F را در واکنش بسیار سریع و هتروژن مقابل بدست آورید.



21



تمرین

22



تمرین

23



تمرین

➤ رابطه k_G با k_y را بدست آورید ؟

24



تمرین

تذکر مهم:

برای یافتن رابطه بین k یا k' با یکدیگر، کافیتست گرادیانی که باعث ایجاد شار می گردد را بدست آورد و اگر رابطه F و k یا F و k' را بخواهند باید برای N_A, F اصلی را نوشت.

25



Homework 12

- یک حباب اکسیژن به قطر 0.1 cm به داخل یک محفظه آب مخلوط شده تزریق می شود. بعد از 7 دقیقه قطر این حباب به 0.054 cm کاهش می یابد. اگر غلظت اشباع اکسیژن در آب 1.5×10^{-3} مولار باشد، ضریب انتقال جرم آن را بدست آورید.

26

جمع بندی



نحوه محاسبه ضرایب انتقال جرم جا به جایی (k)

مکانیک سیالات - به کمک C_f

انتقال حرارت - به کمک h یا Nu

}

۱- راه حل اول: تشابه

روش های تئوری

روش های تجربی

}

۲- راه حل دوم: عدم استفاده از تشابه

27

