توجه:

زمان تحویل پروژه ۳۰ بهمن ماه ۱۴۰۱می باشد. لطفا پاسخ تمرینات تایپ شده باشند.

۱. فرض کنید برای $0 < \alpha < 1$ و نقاط متساوی الفاصله $t_k = k\tau$ و $\tau = \frac{T}{N}$ تقریب مشتق کسری کاپوتو به صورت زیر باشد

$$\left[{}_0^C D_t^\alpha v(t)\right]_{t=t_n} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1}\left(v(t_{k+1}) - v(t_k)\right), \qquad b_k = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left[(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}\right].$$

با توجه به این طرح معادله زیر را گسسته کرده و برنامه کامپیوتری آن را بنویسید.

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(t) + u''(t) = \Gamma(2+\alpha)t + \alpha(\alpha+1)t^{\alpha-1}, & 1 < t < 2, \\ \\ u(1) = 1 \qquad u(1) = 2^{\alpha+1}, \end{cases}$$

جواب واقعی نیز برابر $u(t) = t^{1+\alpha}$.

۲. فرض کنید برای $1 < \alpha < 2$ و نقاط متساوی الفاصله $t_k = k\tau$ و $\tau = \frac{T}{N}$ تقریب مشتق کسری ریمان-لیوویل به صورت زیر باشد

$$\left[{}_0^{RL} D_t^\alpha f(t)\right]_{t=t_n} = \frac{t_n^{-\alpha} f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{t_n^{1-\alpha} f'(0)}{\Gamma(2-\alpha)} + \sum_{k=-1}^{n} W_k f(t_{n-k}),$$

به طوریکه

$$W_k = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \begin{cases} 1, & k = -1 \\ 2^{2-\alpha} - 3, & k = 0 \\ (k+2)^{2-\alpha} - 3(k+1)^{2-\alpha} + 3k^{2-\alpha} - (k-1)^{2-\alpha}, & 1 \le k \le n-2 \\ -2n^{2-\alpha} + 3(n-1)^{2-\alpha} - (n-2)^{2-\alpha}, & k = n-1, \\ n^{2-\alpha} - (n-1)^{2-\alpha}, & k = n, \end{cases}$$

معادله زیر را با استفاده از طرح بالا گسسته کنید

$$\begin{cases} u''(t) - a_0^{RL} D_t^\alpha u(t) - bu(t) = 8, & 0 < t < 1, \\ \\ u(0) = 0 \qquad u'(0) = 0, \end{cases}$$

و برنامه کامپیوتری آن را بنویسید. جواب واقعی این معادله برابر است با

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{8a^j b^{k-j}}{\Gamma(2k-j\alpha+3)}t^{2k+2-j\alpha}.$$

۳. (آ) فرض کنید $x_i=a+ih$ برای $i=0,1,\ldots,M$ و $h=\dfrac{b-a}{M}$ نقاط متساوی الفاصله باشند و برای تقریب مشتق کسری ریس از طرح عددی زیر استفاده کنیم

$$\left.\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial|x|^\alpha}\right|_{x=x_i}=-h^{-\alpha}\sum_{k=-m+i}^{i}g_k u(x_{i-k})+O(h^2),\qquad 1<\alpha\le 2,$$

بطوریکه

$$g_k=\frac{(-1)^k\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-k+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+k+1\right)}.$$

معادله گرما زیر را با استفاده از طرح بالا گسسته کرده و یک طرح صریح استخراج کنید

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial|x|^\alpha}+f(x,t), & a<x<b,\quad t>0,\\[2ex] u(x,0)=g(x),\\[2ex] u(a,t)=p(t), \qquad u(b,t)=q(t).\end{cases}$$

(ب) از طرح بالا برای حل عددی معادله زیر استفاده کرده و برنامه کامپیوتری آن را بنویسید

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial|x|^\alpha}+f(x,t), & 0<x<1,\quad t>0,\\[2ex] u(x,0)=x^2(1-x)^2,\\[2ex] u(0,t)=0, \qquad u(1,t)=0.\end{cases}$$

$$f(x,t)=(1+t)^{-1+\alpha}(-1+x)^2x^2\alpha+\frac{1}{\Gamma(5-\alpha)}x^{-\alpha}\left(\left(\frac{1+t}{1-x}\right)^\alpha(-1+x)^2x^\alpha\left(12x^2-6x\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1+\alpha)\alpha\right)+(1+t)^\alpha x^2(12(-1+x)^2+(-7+6x)\alpha+\alpha^2)\right)\sec\left(\tfrac{\pi\alpha}{2}\right).$$

و جواب واقعی به صورت

$$u(x,t)=(1+t)^\alpha x^2(1-x)^2.$$

۴. با استفاده از طرح عددی سوال ۳ برای مشتق کسری ریس، معادله زیر را با استفاده از یک طرح ضمنی گسسته کنید و برنامه کامپیوتری آن را بنویسید

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + \dfrac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial |x|^{\alpha}} + f(x,t), & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x^2(2-x)^2, \\ u(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0. \end{cases}$$

به طوریکه

$$f(x,t) = 4e^{-t}\sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left(\frac{3\left[x^{4-\alpha}+(2-x)^{4-\alpha}\right]}{\Gamma(5-\alpha)} - \frac{3\left[x^{3-\alpha}+(2-x)^{3-\alpha}\right]}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{\left[x^{2-\alpha}+(2-x)^{2-\alpha}\right]}{\Gamma(3-\alpha)}\right).$$

با جواب واقعی $u(x,t) = e^{-t}x^2(2-x)^2$.

۵. معادله غیرخطی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha} y(t) + ty^2(t) = -\sin(t) + t\sin^2(t), & 1 < \alpha \leq 2, \\ y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) 1. \end{cases}$$