س ۱

$u(x,t) = w(x,t) + \phi(x,t)$

$u_{xx} = u_t + x \xrightarrow[u = w+\phi]{\text{جایگذاری}} (w_{xx} + \phi''(x)) = w_t + x$

$w_{xx} = w_t + x - \phi''(x)$

برای همگن شدن معادله باید $\Rightarrow x - \phi''(x) = 0 \rightarrow \phi''(x) = x$

شرایط مرزی $\Rightarrow u(0,t) = 1 = w(0,t) + \phi(0)$

$u(2,t) = 1 = w(2,t) + \phi(2).$

برای همگن شدن شرایط مرزی w، می‌خواهیم $w(0,t) = 0$ و $w(2,t) = 0$

پس $\rightarrow \phi(0) = 1$ و $\phi(2) = 1$

همچنین شرط اولیه $\Rightarrow u(x,0) = e^x = w(x,0) + \phi(x).$

پس شرط اولیه برای W: $w(x,0) = e^x - \phi(x)$

حال ϕ را از معادله $\phi''(x) = x$ و شرایط مرزی $\phi(0) = 1$ و $\phi(2) = 1$ پیدا می‌کنیم

$\phi'(x) = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1$

با اعمال شرط $\rightarrow \phi(0) = C_2 = 1$

$\phi(2) = \frac{1}{6}(8) + C_1 \cdot 2 + 1 = \frac{8}{6} + 2C_1 + 1 = \frac{4}{3} + 2C_1 + 1 = \frac{7}{3} + 2C_1 = 1$

$\Rightarrow 2C_1 = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow C_1 = -\frac{2}{3}$

$\phi(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x + 1$

ادامه س ۱

با اعمال شرایط $\Rightarrow \quad Q(0) = c_2 = 1$

$$Q(2) = \frac{1}{6}(8) + c_1 \cdot 2 + 1 = \frac{8}{6} + 2c_1 + 1 = \frac{4}{3} + 2c_1 + 1 =$$

$$\frac{7}{3} + 2c_1 = 1$$

$$\Rightarrow 2c_1 = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow c_1 = -\frac{2}{3}$$

پس $\Rightarrow$

$$Q(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x + 1$$