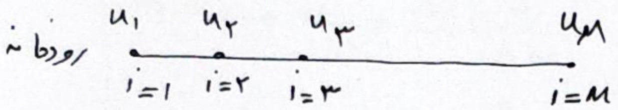
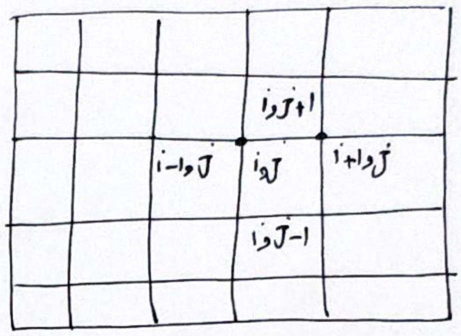
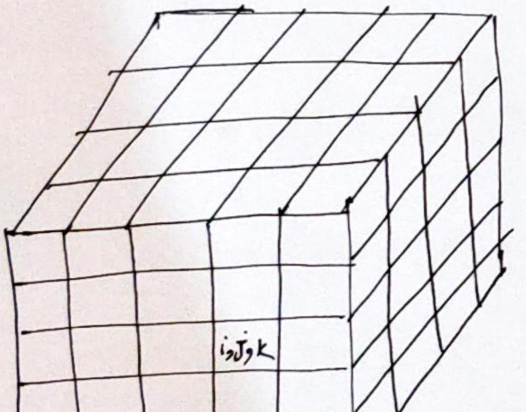
حل عددی معادلات به روش تفاضلهای محدود یا Finite difference

۱- روش گسسته سازی میدان حل که در این قسمت میدان حل به تعدادی نقطه و یا گره تقسیم می شود. در حالت یک بعدی یک اندیکس u_i ، در حالت دو بعدی دو اندیکس مثل $u_{i,j}$ و در حالت ۳ بعدی $u_{i,j,k}$ مشخص کننده ویژگی های تابع در هر نقطه از میدان حل می باشد.



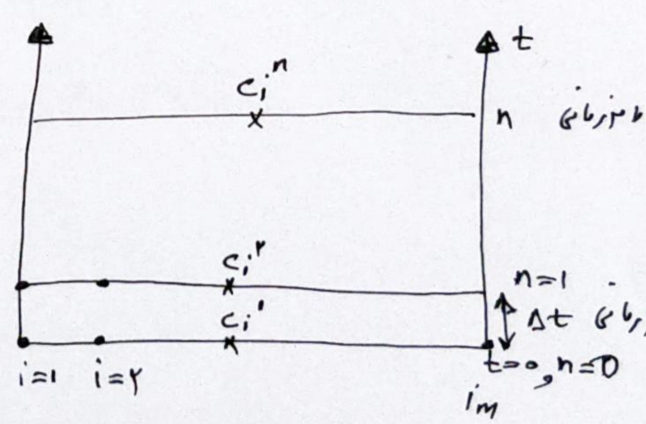


۲ بعدی

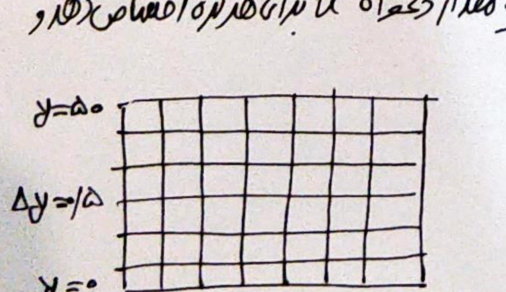


۳ بعدی

** علاوه بر گسسته سازی مکانی میدان حل ، گسسته سازی زمانی نیز با اندیکس k یا n ظاهر می شود. (حل یک تغییرات مکانی دارد و یک تغییرات زمانی)



EX-1) یک برنامه کامپیوتری در محیط متلب بنویسید که برای میدان حل زیر گره ها را تولید و یک مقدار دلخواه u برای هر گره اختصاص دهد و سطر ۵۰ ام این ماتریس را به صورت یک بردار نشان دهد



$u(i,j) = 10i + 5j + 1$

$u(50,j) =$ * نمایش می دهد

گام ۲: گسسته سازی معادلات حاکم

در جلسات قبل گفته شد در حل عددی به روش تفاضل محدود یا F.D، معادلات یا مشتقات موجود در معادلات بر حسب مقادیر تابع در گره ها جایگزین می گردد. که برای اینکار از بسط سری تیلور استفاده کردیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \begin{cases} \rightarrow F.D \\ \rightarrow B.D \\ \rightarrow C.D \end{cases}$$

$$F.D \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^{n} - u_{i}^{n}}{\Delta x} + T.E(\Delta x)$$

$$B.D \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i}^{n} - u_{i-1}^{n}}{\Delta x} + T.E(\Delta x)$$

$$C.D \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}}{2\Delta x} + T.E(\Delta x^{2})$$

* اگر بخواهیم مشتق زمانی را گسسته کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \begin{cases} \rightarrow F.D \\ \rightarrow B.D \\ \rightarrow C.D \end{cases}$$

«وقتی مشتق رو در زمان داریم گسسته می کنیم اندیس n+1 یا اندیس زمان جابجا می شود.»

خطای برشی

$$F.D \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i}^{n+1} - u_{i}^{n}}{\Delta t} + T.E(\Delta t)$$

$$B.D \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i}^{n} - u_{i}^{n-1}}{\Delta t} + T.E(\Delta t)$$

$$C.D \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i}^{n+1} - u_{i}^{n-1}}{2\Delta t} + T.E(\Delta t^{2})$$

u_i^n: $n \rightarrow$ زمان، $i \rightarrow$ مکان

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1}^{n} - 2u_{i}^{n} + u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2} + T.E(\Delta x^2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{u_{i}^{n+1} - 2u_{i}^{n} + u_{i}^{n-1}}{\Delta t^2} + T.E(\Delta t^2) \end{aligned}}$$

روش عمومی برای هر حالتی بتوانیم مشتق را حساب کنیم:

روش عمومی یا General Teaching برای بدست آوردن فرم اختلاف محدود

(امتحانی است)

EX: مطلوبست $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_i$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_i$ بر حسب مقادیر u در نقاط i ، $i+1$ و $i+2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a u_i + b u_{i+1} + c}{\Delta x} \longrightarrow$$ از این تساوی می‌خواهیم ضرایب (a, b, c) را بدست آوریم.

* با کمک این روش می‌توانیم فرم اختلاف محدود هر تابعی با شکلی را بدست آوریم *

① ضرایب *

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}\left(a u_i + b u_i + b \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots\right) + c\left(u_i + 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots\right)$$

* حالا ۲ طرف تساوی را ضرایب جملات مشابه با هم قرار می‌دهیم. *

$$a + b + c = 0$$

* $b + 2c = 1$ * برابر با ضریب $\frac{\partial u}{\partial x}$ باشد باید ① *

$$\frac{b}{2} + 2c = 0 \longrightarrow$$ از حل اینها

$$a = -\frac{3}{2}$$

b منفی $b = 2$ $\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-3u_{i+1} + 4u_i - u_{i+2}}{2\Delta x}$

$$c = -\frac{1}{2}$$

در واقع می‌توانیم جملات باقیمانده را بنویسیم و T.E را بدست آوریم:

$$T.E = \underbrace{\left(\frac{b}{6} + \frac{8c}{6}\right)\Delta x^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}_{\text{اولین جمله}} + \dots$$ باقی جملات

اولین جمله خیلی مهم (که دقت حل عددی را برای ما مشخص می‌کند)

دقت کنید به اولین جمله خطای برشی که تعیین کننده‌ی دقت حل عددی می‌باشد leading term می‌گویند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a u_i + b u_{i+1} + c u_{i+2}}{\Delta x^2} \longrightarrow (a،b،c) =$$ را بدست آورید :

<leading term>

$$= a u_i + \overbrace{b\left(u_i + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots\right)}^{\text{سری تیلور } u_{i+1}} + \overbrace{c\left(u_i + 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots\right)}^{\text{سری تیلور } u_{i+2}}$$

جملات مشابه را با هم جمع می‌کنیم :

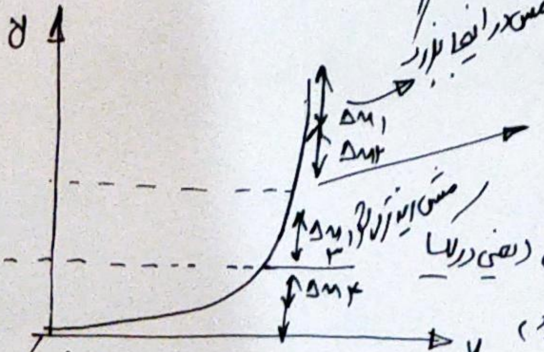
$$\left.\begin{aligned} a+b+c&=0 \\ b+2c&=0 \\ b+4c&=1 \end{aligned}\right| \longrightarrow a،b،c \Rightarrow \left|\begin{aligned} c&=1/2 \\ b&=-1 \\ a&=1/2 \end{aligned}\right.$$

(Ex-2) leading term مربوط به خطای برشی را بدست آورید :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{(a+b+c)\,u_i}{\Delta x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{(b+2c)\Delta x}{\Delta x^2}}_{0}\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\left(\frac{b}{2} + \frac{4c}{2}\right)}_{1}\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

تعیین فرم اختلاف محدود برای شبکه‌بندی غیر یکنواخت .

در حل عددی مسائل "ما" در جاهایی که گرادیان خیلی زیاد باشد نیاز است که ابعاد مش ریزتر و کوچکتر انتخاب گردد.



مش در اینجا بزرگ

گرادیان کم است

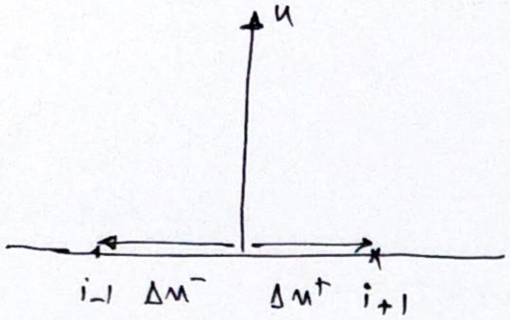
مش در اینجا ریز

در نزدیکی سطح گرادیان خیلی شدید است (یعنی در یک فاصله کوتاهی سرعت خیلی تغییر می‌کند)

مثلاً بر روی سرعت یا بر روی غلظت در یک جریان می‌خواهیم بررسی کنیم.

$\Delta x_1 > \Delta x_2 > \Delta x_3 > \dots$

در این حالت بایستی فرم گسسته شده بصورت جداگانه محاسبه گردد:



$$\frac{\Delta x^+}{\Delta x^-}=\alpha \quad \Delta x^- = \Delta x \;\Big|\; \rightarrow \Delta x^+ = \alpha \Delta x$$

بسط سری تیلور را بر حسب
این ها را بسط ها بدست
آوریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a u_{i-1} + b_i + c u_{i+1}}{\Delta x}$$

General Technic

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\left(u_i - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + b u_i + c\left(u_i + \alpha \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\alpha \Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \right)\Big) \times \frac{1}{\Delta x}$$

$$a+b+c=0$$

$$-a+\alpha c = 1, \qquad \frac{a}{2} + \frac{\alpha^2}{2}c = 0$$

$\xrightarrow{a \text{ و } b \text{ و } c}$
را بر حسب α بدست بیاوریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} + (\alpha^2-1)u_i - \alpha^2 u_{i-1}}{\alpha(\alpha+1)\Delta x} - \frac{\alpha}{6}\Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$\text{if } \alpha = 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

اگر شبکه بندی یکنواخت بود بایستی مجدداً فرم گسسته را بدست آوریم.

(۶)

بقیه جملات

مشتق مرتبه دوم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u_{i+1} - (\alpha+1)u_i + \alpha u_{i-1}}{\alpha(\alpha+1)\Delta x^2} + \underbrace{\frac{1}{3}(\alpha-1)\Delta x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\alpha^3+1}{12(\alpha+1)}\Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots}_{\text{T.E }(\Delta x)\text{ order}}$$

(ثابت) if $\alpha = 1 \rightarrow$

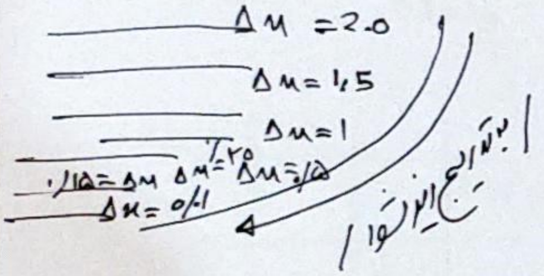
$$T.E = -\frac{2}{12\times 2}\Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots \qquad T.E(\Delta x^2)$$

ارور از مرتبه ۲ است.

if $\alpha \neq 1 \rightarrow T.E(\Delta x)$

* مشاهده می‌گردد در صورت غیریکنواختی مش یا non uniformity، دقت یا مرتبه گسسته‌سازی کاهش می‌یابد. لذا در مدلسازی عددی توصیه می‌گردد. تغییرات مش به صورت Smooth (یا نرم) تدریجی رخ دهد.

کدهای تجاری موجود در مدلسازی این موضوع را رعایت می‌کنند.



فرم تفاضل محدود مشتقات ترکیبی یا مشتقات مخلوط است.

به عنوان مثال مشتقات $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ را چگونه گسسته کنیم.

برای به دست آوردن فرم تفاضل محدود مشتقات ترکیبی ۲ روش استفاده از بسط سری تیلور و تحلیل مشتق‌ها وجود دارد

که روش دوم را که ساده‌تر است با هم بررسی می‌کنیم.

مختلطی هستند و نوع تغییر می‌کند

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{C.D}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^n_{i,j+1} - u^n_{i,j-1}}{2\Delta y}\right) =$$

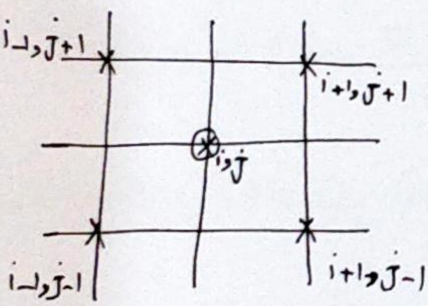
به روش C.D گسسته می‌کنیم

$$= \Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} u^n_{i,j+1}}_{C.D} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} u^n_{i,j-1}}_{C.D}\Big]\frac{1}{2\Delta y} =$$

گسسته می‌کنیم.

$$= \left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta x}\right]\frac{1}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + T.E(\Delta x^2, \Delta y^2)$$



* این ۴ گره برای گسسته‌سازی مشتق در این ⊗ گره درگیر شده‌اند.

: Quiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \longrightarrow \begin{matrix} F.D \\ B.D \end{matrix} \longrightarrow$$ گسسته‌سازی نمایید

پیشرو
پس رو

F.D

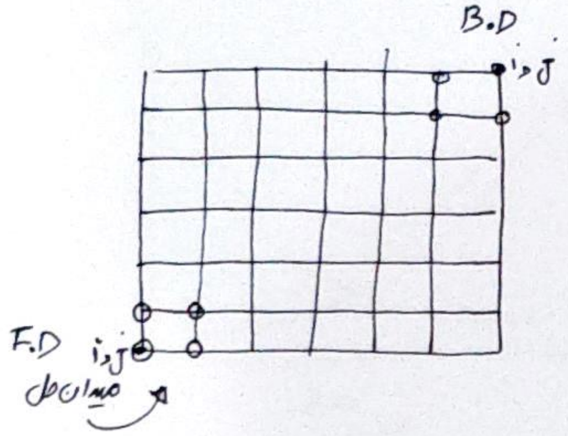
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^n_{i,j+1} - u^n_{i,j}}{\Delta y}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(u^n_{i,j+1}) - \frac{\partial}{\partial x} u^n_{i,j}\right]\frac{1}{\Delta y} =$$

$$= \left[\frac{u^n_{i+1,j+1} - u^n_{i,j+1}}{\Delta x} - \frac{u^n_{i+1,j} - u^n_{i,j}}{\Delta x}\right]\frac{1}{\Delta y} =$$

$$= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j}}{\Delta x \Delta y}$$

برای گره‌های محدوده مرز مانمی‌توانیم

باید حتماً از گسسته سازی F.D استفاده کنیم



Ex-3) برای مرز B.D در گره گوشه‌ی انتهای سمت بالا فرم گسسته شده $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ را بدست آوریم.

روش‌های صریح یا explicit در مقابل روش‌های ضمنی (implicit) هستند. اگر مقدار مشتق بصورت صریح دیگر مرحله‌ای برحسب مقادیر تابع در گره‌های مجاور بدست آید روش را صریح می‌نامیم

بعنوان مثال ←

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$ روش صریح

$$u'_i = \frac{8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2} - u_{i+2}}{12\Delta x} + T.E(\Delta x^4)$$

در مقابل روش‌های صریح، روش‌های ضمنی implicit مطرح هستند که برای بدست آوردن مقدار مشتق باید یک دستگاه معادلات حل گردد

$$u'_{i+1} + 4u'_i + u'_{i-1} = \frac{3}{\Delta x}\left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

در معادله فوق مقدار u'_i به مقادیر مشتق در گره‌های مجاور مرتبط گردیده است این روش‌ها را روش‌های عددی ضمنی می‌نامند.

* خطای گرد کردن Round of Error در مقابل خطای برشی یا Trancation Error

در حل‌های عددی ما با دو نوع خطا سروکار داریم:

۱. خطای گرد کردن ناشی از دقت نمایش عدد در محاسبات کامپیوتری

$1,543456,\ldots \simeq 1,5434$

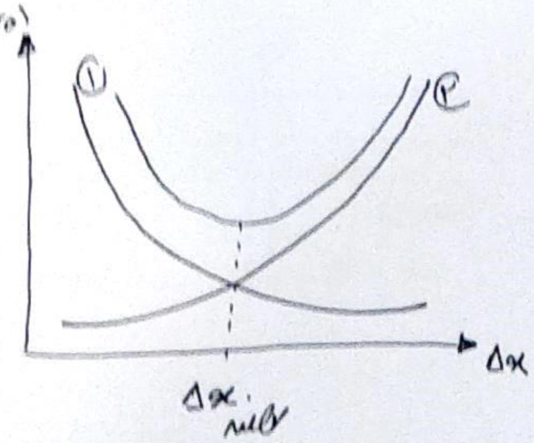
۲. خطای برشی ناشی از گسسته سازی مشتقات هست

Δ

y (نمایش عدد توسط کامپیوتر) + RoE = y (نمایش حقیقی عدد)

y (نمایش حقیقی عدد) + T.E = y (عدد دقیق و کامل)

راهکار این دو نوع خطا با هم متفاوت می باشد :



* هرچه ابعاد مش کوچکتر می شود خطاها در روش ① بزرگتر می شود یا بالعکس *

هرچه مش بزرگتر باشد تعداد عملیات کمتر می شود در نتیجه خطا کمتر می شود. ROE

* با افزایش تعداد نقاط شبکه یا کاهش اندازه گام مکانی حجم محاسبات یا عملیات بیشتر شده و خطای ناشی از عدم دقت کامپیوتر (خطای گرد کردن) بیشتر می شود و همچنین متقابلاً با کاهش ابعاد مش خطای برشی کاهش می یابد.

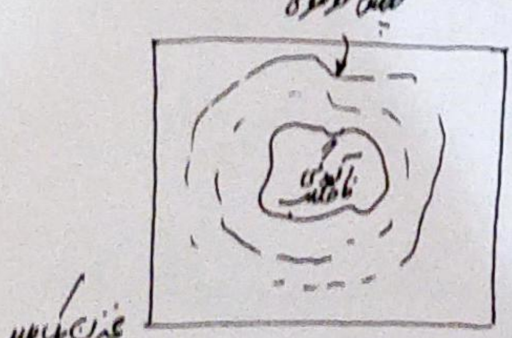
Ex-4) تعاریف مربوط به mesh dependency و mesh convergency چیست و هدف از انجام آنها در حل های عددی چیست ؟

حل عددی معادلات سهموی :

ساده ترین نوع معادلات سهموی که در این نقش به دنبال حل عددی آنها هستیم، معادلات پخش یا دیفیوژن مولکولی می باشد.

نمونه ی مثال های عملی این پدیده می تواند :

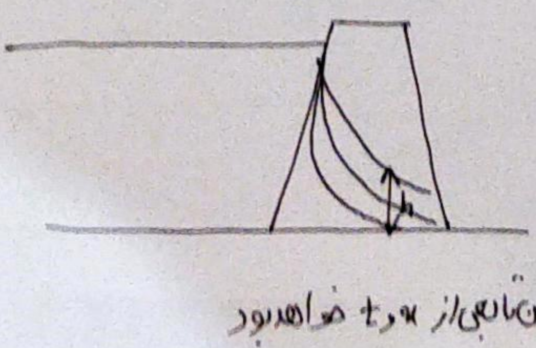
۱- پخش غیردائمی آلودگی در مخزن یک سد



$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

۲- در مراحل اولیه آبگیری یک سد خاکی

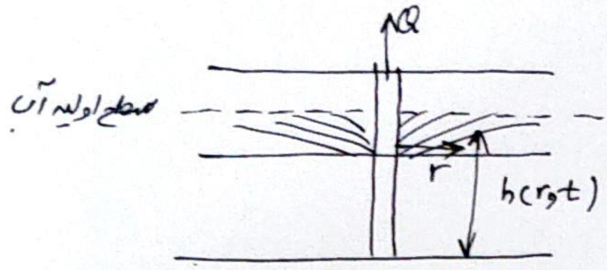
خط نشت یا seepage line یک سد خاکی در مراحل اولیه آبگیری



$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \longrightarrow h(x,t)$$

هدف از این به دست آوردن h به عنوان تابعی از x و t خواهد بود

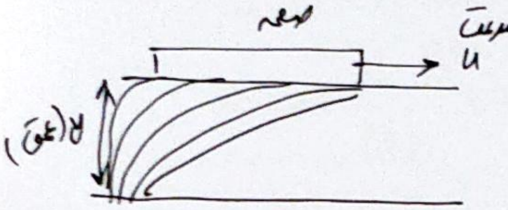
۳- پمپاژ چاه از یک آبخوان تحت فشار



$$\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$$

از حل این معادله می‌توانیم $h(r,t)$ را بدست آوریم.

۴- با فرض سیال نیوتنی یک توزیع سرعت خطی فرض می‌گردد



$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{u-0}{y-0}$$

تنش برشی

با فرض توزیع سرعت خطی

اما توزیع سرعت از صفحه به داخل سیال بواسطه ی لزجت از حل معادله ی دیفیوژن بدست می‌آید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ①$$

برای حل معادله ی ① از روش F.D (تفاضل محدود) بایستی به جای مشتقات فرم گسسته شده را جایگزین نماییم

از روش F.D برای مشتق زمانی و C.D برای مشتق مکانی استفاده می‌کنیم.

$$② \ F.T \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + T.E(\Delta t)$$

$$③ \ C.D \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + T.E(\Delta x^2)$$

$$②,③ \xrightarrow{①} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \underbrace{T.E(\Delta t)}_{0} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \underbrace{T.E(\Delta x^2)}_{0}$$

* اگر از خطاها ی برشی صرف نظر کنیم

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$