حل عددی معادلات سهموی (parabolic)

در این بخش به دنبال نحوه حل عددی معادلات سهموی هستیم - نمونه‌ای از این معادلات - پخش غیردائمی هر متغیر در طبیعت می‌باشد

بعنوان مثال:

۱- پخش غیردائمی و تبادل حرارت یک میله با محیط اطراف

۲- پخش غیردائمی یک آلاینده (غلظت) در مخزن یک سد

۳- تراز سطح آب زیرزمینی در اثر پمپاژ در حالت غیردائمی (تغییرات)

۴. مسئله هد داخل بدنه یک سد خاکی در مراحل اولیه آبگیری به واسطه نفوذ یا تخلخل محیط

۵. توزیع سرعت در داخل سیال به واسطه حرکت یک صفحه و انتقال سرعت به واسطه لزجت سیال

موارد فوق نمونه‌های عملی از معادلات سهموی می‌باشند که فرم عمومی این معادلات بصورت

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t}}_{\text{تغییرات زمانی } c} = \underbrace{D}_{\text{ضریب پخش}} \underbrace{\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}}_{\text{تغییرات مکانی } c} \quad (1) \longrightarrow$$

معادله سهموی یا پخش غیردائمی

ضریب پخش: Diffusion cofficient

پس هدف حل عددی معادله (1) می‌باشد. معادله فوق برای برخی شرایط اولیه و شرایط مرزی دارای حل تحلیلی یا حل دقیق می‌باشد اما در حالت کلی و عمومی فاقد حل تحلیلی است.

پیشرو در زمان و مرکزی در فضا

برای حل عددی معادله‌ی (1) ابتدا به سراغ روش صریح FTCS (Forward time central space) می‌رویم.

مشتق زمانی
$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + T.E(\Delta t)$$

گسسته سازی پیشرو مشتق زمانی
Forward time discritization

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{\Delta x^2} + T.E(\Delta x^2)$$

گسسته سازی مرکزی مشتق مکانی
central space discritization

با جایگذاری گسسته سازی مکانی در معادله (1) خواهیم داشت:

$$\frac{c_i^{n+1}-c_i^{n}}{\Delta t} + \cancel{T.E(\Delta t)}_{\to 0} = D\,\frac{c_{i+1}^{n}-2c_i^{n}+c_{i-1}^{n}}{\Delta x^2} + \cancel{T.E(\Delta x^2)}_{\to 0} \qquad (۲)$$

با صفر منظور نمودن از خطای برشی در معادله ۲ اولین تقریب در حل عددی معادلات ظاهر می‌شود. لذا همواره حل های عددی حل های تقریبی می باشند.

* «اگر یک حل عددی با درصد خطای صفر داشته باشیم قطعاً حل عددی صحیح نمی باشد.»

لذا معادله $\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ تبدیل به معادله فوق می‌شود ←

$$\frac{c_i^{n+1}-c_i^{n}}{\Delta t} = D\,\frac{c_{i+1}^{n}-2c_i^{n}+c_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}$$

اصطلاحاً می‌گوییم:

partial differential Eq $\longrightarrow$ Finite difference Eq

معادله دیفرانسیل جزئی

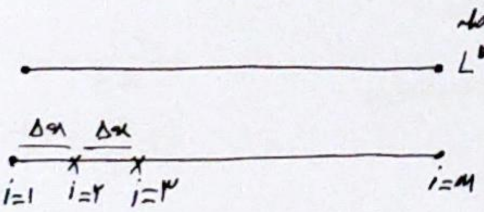
حل گسسته: درصورتیکه از F.D.E ها می‌توانیم حل مسئله را بصورت c_i^n در گره ها و زمان های مختلف بصورت گسسته بدست آوریم.

اگر P.D.E ها حل دقیق داشته باشد از این معادله می‌توانیم حل پیوسته $C(x,t) =$ غلظت در زمان ها و مکان های مختلف را بصورت پیوسته بدست آوریم.

• همه معادله دارای حل تحلیلی نمی باشند P.D.E $\longrightarrow$ (لذا به سراغ حل عددی می رویم)

« یعنی یک حل پیوسته برای یک معادله دیفرانسیل جزئی همواره وجود نخواهد داشت »

* بعنوان مثال: یک میدان حل یک بعدی را در نظر می‌گیریم:



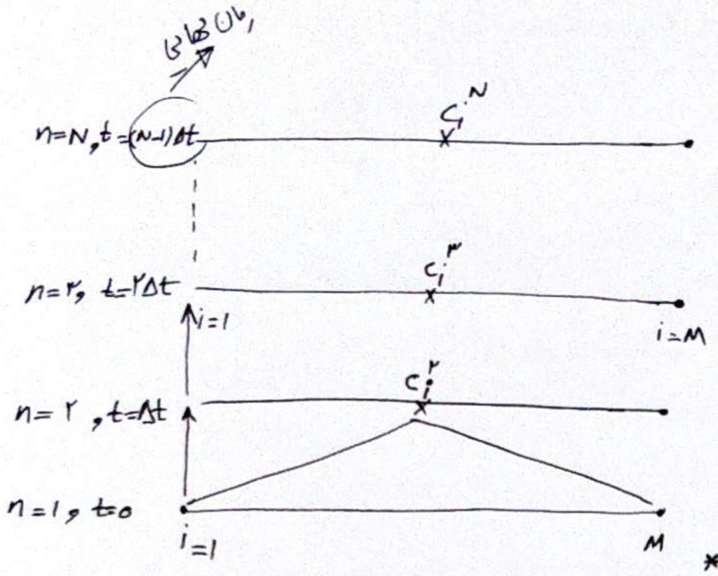
$$M = \frac{L}{\Delta x} + 1$$

تعداد گره های مکانی
node space

c_i^n: n گره زمانی، i گره مکانی $\longrightarrow$ هدف تعیین c_i^n می باشد

که شامل M گره مکانی و n گره زمانی است.

حال گره زمانی چگونه به مشکل می آید :



در حل های یک پیشروی در مکان $c_i \quad i=1, M$

و یک پیشروی در زمان c^n $n=1 \ldots N$ بایستی

انجام شود .

ابتدا بایستی پیشروی مکانی انجام شود .

برای زمان $n=1$ یا $t=0$ $\longrightarrow$ $(I.C)^*$ از روی

* که مسئله به ما می دهد *

مقادیر c_i از روی شرایط اولیه

مسئله تعیین خواهد شد . (که می تواند هر شکلی داشته باشد می تواند سینوسی باشد که ما فرض می کنیم توزیع مثلثی است)

ابتدا بایستی پیشروی مکانی انجام شود و پس از تعیین مقادیر c_i^n در هر گام مکانی زمانی n وارد گام زمانی بعدی می شود لذا بایستی

یک ماتریس از مقادیر برای $M \times N$ گره تعیین گردد .

تعداد گره های مکانی

تعداد گره زمانی

« ابتدا مکانی ، سپس زمانی »

طول میدان حل

$$M = \frac{L}{\Delta x} + 1$$

$$N = \frac{T}{\Delta t} + 1$$

زمان نهایی

« اگر میدان حل بجای یک بعدی به ۲ بعد تبدیل شود تعداد گره های مکانی

به $M_x \times M_y$ افزایش می یابد و تعداد کل گره ها برابر $M_x \times M_y \times N$ می باشد »

$$M_x = \frac{L_x}{\Delta x} + 1$$

$$M_y = \frac{L_y}{\Delta y} + 1$$

یعنی در حل عددی بجای داشتن حل پیوسته $C(x,t)$ یک حل گسسته C_i^n خواهیم داشت.

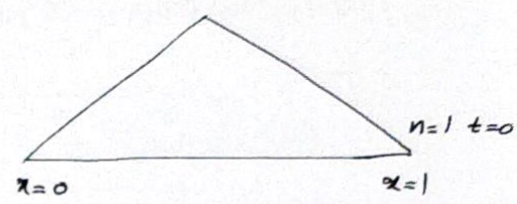
به عنوان مثال: برای شرایط مرزی و شرایط اولیه معادله عمومی زیر حل عددی را بدست آورید:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

I.C
شرایط اولیه

$$C(x,0) = \begin{cases} 2x & \text{اگر } 0 \le x \le 1/2 \\ 2(1-x) & \text{اگر } 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

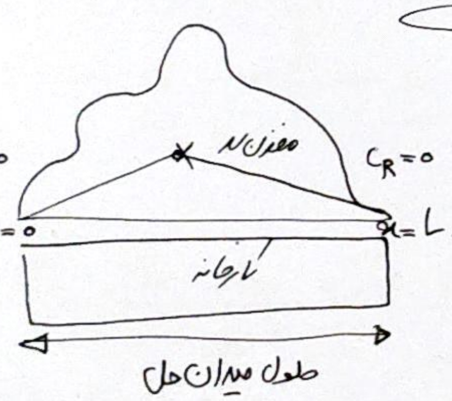
به شکل خطی



حل های عددی به شدت وابسته به شرایط مرزی و شرایط اولیه هستند یعنی حتماً بایستی شرایط مرزی و شرایط اولیه برای آنها تعریف گردد.

«شرایط مرزی و شرایط اولیه بایستی منطبق بر فیزیک مسأله باشند»

به عنوان مثال یک کارخانه در مجاورت مخزن یک سدی قرار گرفته است



طول میدان حل را می توان به اندازه طولی از کارخانه در تماس با مخزن است مشخص کنید.

B.C $\quad C(\underset{x}{0}, t) = C(\overset{\text{به اندازه}}{L=1.0}, t) = 0$

«I.C و B.C منطبق بر فیزیک مسأله است»

می خواهیم به روش FTCS با انتخاب $\Delta t = 0.001$ و $\Delta x = 0.1$ مسأله را حل نمائیم.

انتخاب Δx و Δt توسط کاربر انجام می شود

تعداد گام های مکانی یا گره های مکانی

اولین بار همین M است

$$M = \frac{L}{\Delta x} + 1 = \frac{1.0}{0.1} + 1 = 11 \rightarrow \text{گام مکانی}$$

(فرض کنیم زمان پایان حل 10 ثانیه است)

$$N = \frac{T}{\Delta t} + 1 = \frac{10}{0.001} + 1 = 10001 \rightarrow \text{گام زمانی}$$

گام های زمانی گره های زمانی

معادله‌ی حاکم ←

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{بعد از گسسته‌سازی}} \frac{\overset{\text{مجهول}}{C_i^{n+1}} - \overset{\text{معلوم}}{C_i^{n}}}{\Delta t} = D\,\frac{\overset{\text{معلوم}}{C_{i+1}^{n}} - \overset{\text{معلوم}}{2C_i^{n}} + \overset{\text{معلوم}}{C_{i-1}^{n}}}{\Delta x^2} \qquad (۳)$$

<< در معادله (۳) تمامی مقادیر C_i^n تماماً مقادیر معلوم (مربوط به گام زمانی قبل) معلوم و C_i^{n+1} مجهول می‌باشد >>

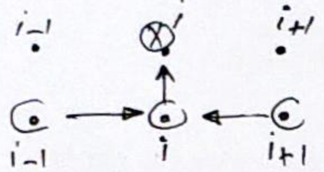
حال می‌توانیم معادله را به شکل زیر بنویسیم:

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \underbrace{\frac{D\,\Delta t}{\Delta x^2}}_{r}\left(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n\right) = \boxed{r\,C_{i+1}^n + (1-2r)\,C_i^n + r\,C_{i-1}^n} \qquad (۴)$$

→ با جایگذاری در معادله (۴) مقادیر C_i^{n+1} برای $M \times N$ گره بدست آوریم:

(برای اینجا) → $\boxed{11 \times 1001}$ ← بایستی برای این مقدار گره

مقادیر C را بدست آوریم:



گام زمانی n+1

گام زمانی n

<< اطلاعات از سه گره ○ می‌آید و در این گره ⊗ محاسبه می‌شود. >>

t	n	i=1, x=0	i=2, x=Δx	i=3, x=2Δx	i=4, x=0.3	i=5, x=0.4	i=6, x=0.5	i=7, x=0.6	i=8, x=0.7	i=9, x=0.8	i=10, x=0.9	i=11, x=1
0	1	$C_1^1=$	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
Δt = 0.001	2	$C_1^2=$	$C_2^2=0.2$	$C_3^2=0.4$	0.6	0.8	0.96	0.8	0.6	0.4	0.2	0
2Δt = 0.002	3	0	0.2	0.4	0.6	0.796	0.928	0.796	0.6	0.4	0.2	0
3Δt = 0.003	4	0	0.2	0.4	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896				0
	⋮	0										
	⋮	0										
(N-1)Δt	N	0										

از روی I.C مسئله بدست می‌آید

سطر اول جدول مورد نظر از روی شرایط اولیه تعریف شده در مسأله بدست می آید :

$$C(x,0) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

گره های اول و گره های آخر از روی شرایط مرزی تعریف شده در مسأله تعیین می گردد :

$$C(0,t) = C(1,t) = 0$$

همچنین گره آخر همواره صفر است .

حال از معادله (۴) $C_2^2 = 0/1\,C_3^1 + 0/8\,C_2^1 + 0/1\,C_1^1 = 0/1 \times 0/4 + 0/8 \times 0/2 + 0/1 \times 1 = 0/2$ بدست می آید .

کلیه های سطرهای جدول فوق را می توان به کمک رابطه ی (۴) تعیین نمود :

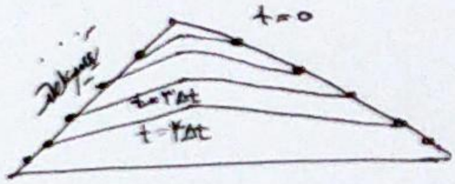
$$C_3^2 = 0/1 \times 0/6 + 0/8 \times 0/4 + 1 \times 0/2$$

به کمک جدول فوق می توان مقادیر C_i^n برای $m \times n$ گره زمانی و مکانی بدست آورد.

با توجه به آنکه این عملیات برای هر گره تکراری می باشد لذا برای حل این نوع مسائل به سراغ برنامه نویسی می رویم .

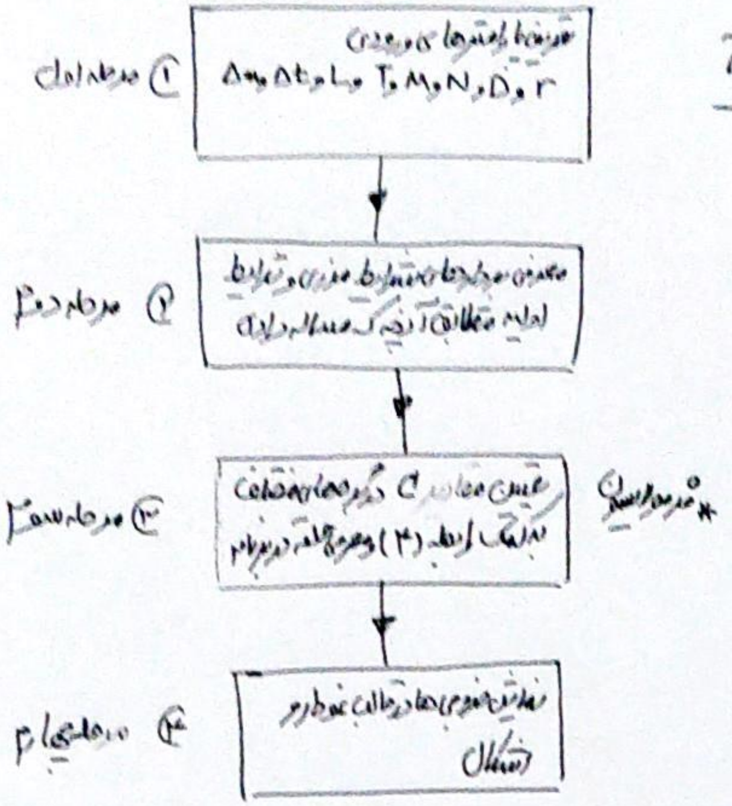
Ex-1) برای جلسه ی هفته آینده برنامه مطلب برای حل FTCS معادله و مثال فوق را بنویسید .

ترسیم زمانی



فلوچارت مراحل برنامه‌نویسی را می‌توان به صورت زیر ترسیم نمود:

در مراحل ۴ مرحله فوق در نوشتن هر برنامه‌ی کامپیوتری بایستی رعایت گردد. ۲۲



* حل معادله (۱) به روش FTCS یک حل ساده صریح (explicit) بود در جلسات آتی در خصوص روش‌های ضمنی (implicit) که پیچیدگی بیشتری دارند صحبت خواهیم نمود.