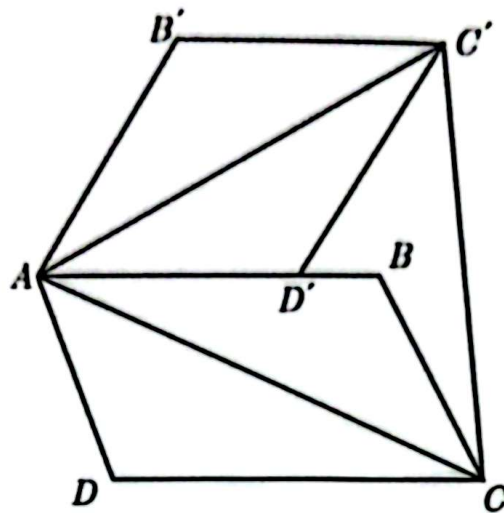


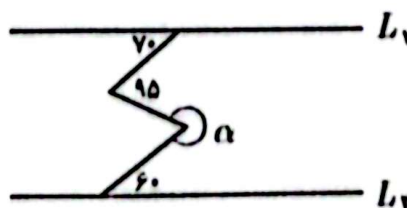


راه حل. مثلث ACC' را در نظر بگیرید. بنابر فرض $AC = AC'$ و $\angle CAC' = 60^\circ$ (زیرا C' را 60° درجه حول A دوران داده‌ایم تا نقطه‌ی C' حاصل شود). پس مثلث ACC' مثلث متساوی‌الساقین با یک زاویه‌ی 60° است. در نتیجه مثلث CAC' یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. (چرا؟) پس $\frac{CC'}{AC} = 1$.

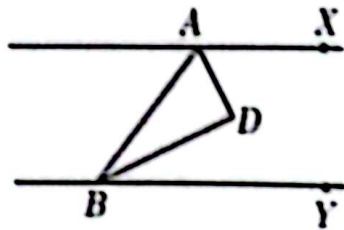
تمرین‌ها

۱. ثابت کنید نیمساز زاویه‌ی A در مثلث ABC که $AB = AC$ ، میانه نیز هست.
۲. این بار در قضیه ۱۰.۱، D را وسط ضلع BC بنامید و با استفاده از حالت هم‌نهشتی (ض‌ض‌ض) حکم را ثابت کنید.
۳. طرف دیگر قضیه ۱۴.۱ را خودتان ثابت کنید. یعنی ثابت کنید اگر $AH_1 = AH_2$ ، روی A نیمساز زاویه‌ی $\angle XOY$ است.

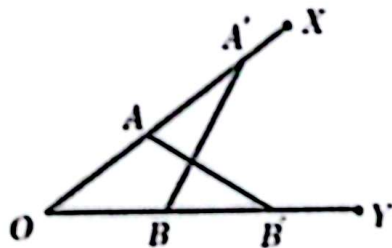
۴. در شکل زیر زاویه‌ی α را حساب کنید. (فرض کنید $L_1 \parallel L_2$).



۵. در شکل زیر AD و BD نیمساز زوایای XAB و ABY هستند. فرض کنید $AD \perp BD$ ، ثابت کنید $AX \parallel BY$.

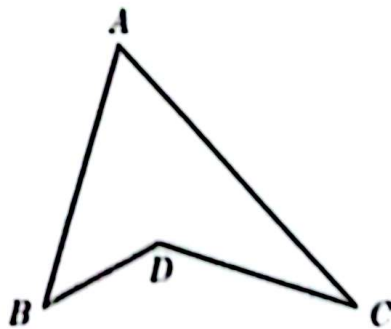


۶. زاویه XOY را در نظر بگیرید. A و A' روی OX و B و B' روی OY قرار دارند به گونه‌ای که $OA = OB$ و $OA' = OB'$. محل تقاطع AB و $A'B'$ را M بنامید. ثابت کنید M ، محل برخورد AB' و BA' ، روی نیمساز XOY است.



۷. در شکل زیر ثابت کنید:

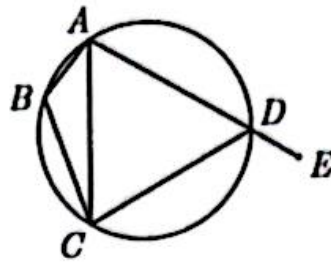
$$\angle BDC = \angle BAC + \angle ACD + \angle ABD$$



۸. در مثلث ABC ، نیمساز خارجی زوایای ABC و ACB را رسم کرده‌ایم تا یکدیگر را در I_a قطع کنند. ثابت کنید $\angle BI_aC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

۹. مثلث قائم الزاویه $(\angle A = 90^\circ)$ و P روی محیط آن است. حداقل مقدار $PA + PB + PC$ را بیابید. (انگلستان-۲۰۰۰)

۱۰. در دایره w ، A, B, C و D نقاطی هستند که $\angle BAC = \angle DAC$ و $AD \cdot \angle BAC = \angle DAC$ را از سمت D امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی E به وجود بیاید. ثابت کنید $CE = CA$ $\Leftrightarrow AB = DE$. (انگلستان-۲۰۰۶)

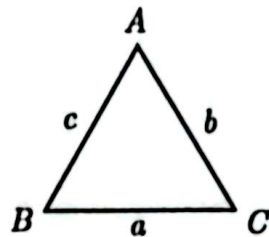


۱۱. همی زاویه‌های مثلثی از 59° درجه بزرگ‌ترند. کدام گزینه راجع به زوایای این مثلث همواره درست است؟ (مرحله اول ایران-دوره ۲۶)

- (آ) یک زاویه‌ی منفرجه دارد.
- (ب) یک زاویه 60° درجه دارد.
- (ج) قائم‌الزاویه است.
- (د) مثلث متساوی‌الاضلاع است.
- (ه) همی زاویه‌هایش از 62° درجه کمتر هستند.

۲-۱ مثلث و اجزای آن

اگر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل کنیم، شکل حاصل را مثلث می‌نامند. هر یک از نقاط یک راس و هر یک از پاره خط‌ها را، ضلع مثلث می‌نامند. سه ضلع و سه زاویه‌ی مثلث اجزای اصلی آن را تشکیل می‌دهند. اندازه‌ی هر ضلع مثلث (یا خود آن ضلع را) به اختصار با حرف کوچک راس متقابل به آن نشان می‌دهند. یعنی اضلاع AB و AC و BC را به ترتیب با c ، b و a نشان می‌دهند.



مثلث اجزای دیگری نیز دارد که وابسته به اجزای اصلی آن هستند. مانند ارتفاع، میانه، نیمساز، عمود منصف و غیره که در این بخش راجع به خواص اجزای اصلی و فرعی مثلث صحبت خواهیم کرد. همان‌طور که در بخش قبل ثابت کردیم، داریم:

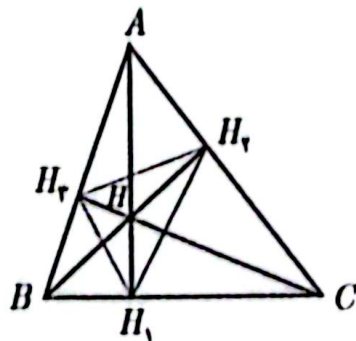
قضیه ۲۰.۱. مجموع زاویه‌های درونی هر مثلث 180° است.

نتیجه. مجموع زوایای خارجی یک مثلث 360° است.

در ادامه تعریف اجزای مثلث را بیان می‌کنیم.

ارتفاع

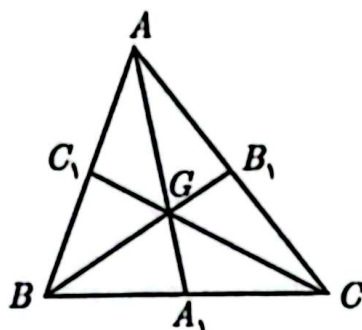
هر ارتفاع مثلث پاره خطی است که یک سر آن یک راس مثلث و سر دیگر آن پای عمودی است که از آن راس به ضلع مقابلش فرود می‌آید.



مانند AH_1 ، BH_2 و CH_3 . دقت کنید در شکل ارتفاع‌ها را هم‌رس کشیده‌ایم. یعنی نقطه‌ی H وجود دارد که بر روی هر سه ارتفاع مثلث واقع شده است. در آینده این موضوع را ثابت خواهیم کرد. به H مرکز ارتفاعی مثلث و به مثلث $H_1H_2H_3$ نیز مثلث ارتفاعی یا مثلث پادک گویند.

میانه

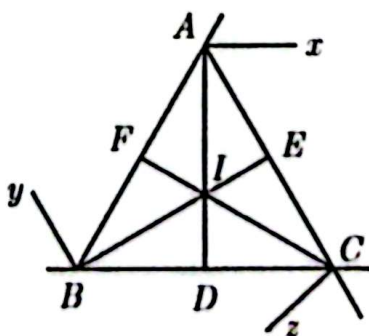
به پاره خط‌هایی که هر راس مثلث را به وسط ضلع روبه‌رو وصل می‌کنند، میانه‌های مثلث می‌گویند. هر مثلث سه میانه دارد که در یک نقطه‌ی G ، به نام مرکز ثقل، هم‌رس‌اند. این موضوع را نیز در آینده اثبات خواهیم کرد.



در شکل بالا، $AA_1 = m_a$ و $BB_1 = m_b$ و $CC_1 = m_c$ میانه‌های مثلث هستند. به مثلث $A_1B_1C_1$ نیز مثلث میانک یا مثلث اویلر گویند.

نیمساز

هر مثلث سه نیمساز زاویه‌ی درونی و سه نیمساز زاویه‌ی خارجی دارد. در شکل زیر AD ، BE و CF که در I متقاطع هستند (این موضوع را در آینده ثابت خواهیم کرد) نیمسازهای داخلی و Bx و Cy و Az نیمسازهای خارجی مثلث‌اند.



مثال ۱۴.۱. در مثلث ABC ، از A به موازات نیمساز رنوس B و C رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در D و E قطع کند. ثابت کنید DE برابر محیط مثلث ABC است.

راه حل.

$$BI \parallel AD \Rightarrow \angle ADB = \angle IBC, \angle BAD = \angle ABI \quad (۱)$$

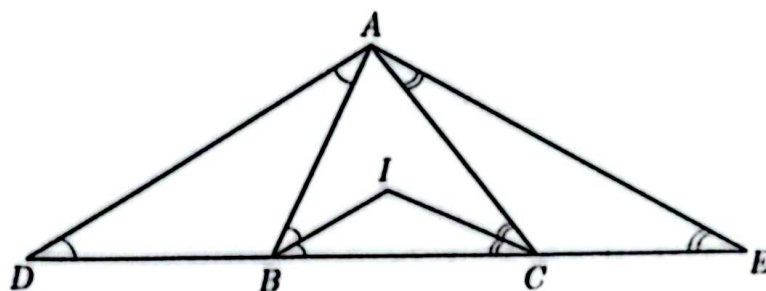
$$CI \parallel AE \Rightarrow \angle AEC = \angle ICB, \angle ACI = \angle CAE \quad (۲)$$

$$BI \Rightarrow \angle ABI = \angle CBI \stackrel{(۱)}{\Rightarrow} \angle BAD = \angle BDA \Rightarrow AB = BD$$

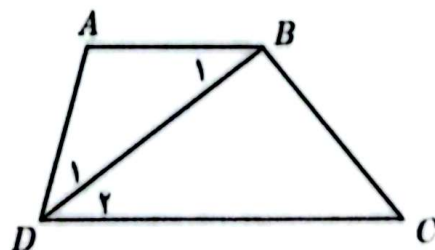
$$CI \Rightarrow \angle ACI = \angle BCI \stackrel{(۲)}{\Rightarrow} \angle CAE = \angle CEA \Rightarrow AC = CE$$

$$\Rightarrow AB + AC + BC = BD + BC + CE = DE$$

۸۲ / ۲۷



مثال ۱۵.۱. در دوزنقه $ABCD$ ، $AB \parallel CD$ و $AD = AB$. ثابت کنید BD نیمساز زاویه D است.

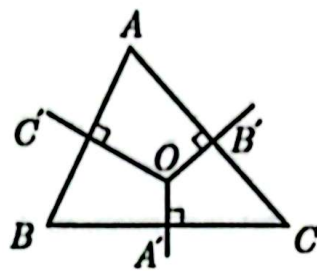


راه حل.

$$\begin{aligned} AB = AD &\Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \\ AB \parallel CD &\Rightarrow \angle D_2 = \angle B_1 \end{aligned} \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$$

عمود منصف اضلاع مثلث

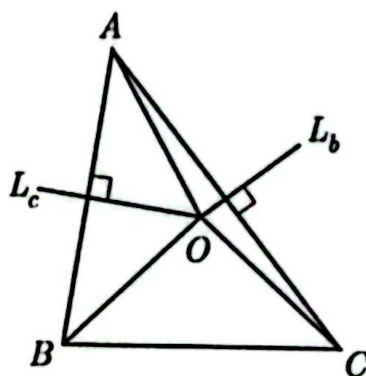
خطی است که از وسط یک ضلع می‌گذرد و بر آن عمود است. هر مثلث سه عمود منصف دارد که در یک نقطه که با O نشان می‌دهند هم‌رس‌اند. (همان‌طور که بعداً خواهیم دید، O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC است.) این موضوع را در آینده ثابت خواهیم کرد.



حال به اثبات هم‌رسی‌ها و قضایای ابتدایی اجزای مثلث خواهیم پرداخت که در قبل آمده است.

قضیه ۲۱.۱. سه عمود منصف ضلع‌های هر مثلث هم‌رسانند.

اثبات. عمود منصف اضلاع AB ، AC و BC را L_c و L_b و L_a و محل تقاطع L_b و L_c را O بنامید.



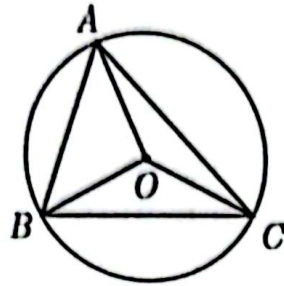
ثابت می‌کنیم O روی L_a است. از قضایای بخش قبل می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف یک ضلع، از دو رأس آن ضلع به یک فاصله است و برعکس. پس:

$$\begin{aligned} L_b \text{ روی } O &\Rightarrow OA = OC \\ L_c \text{ روی } O &\Rightarrow OA = OB \end{aligned} \Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow L_a \text{ روی } O$$

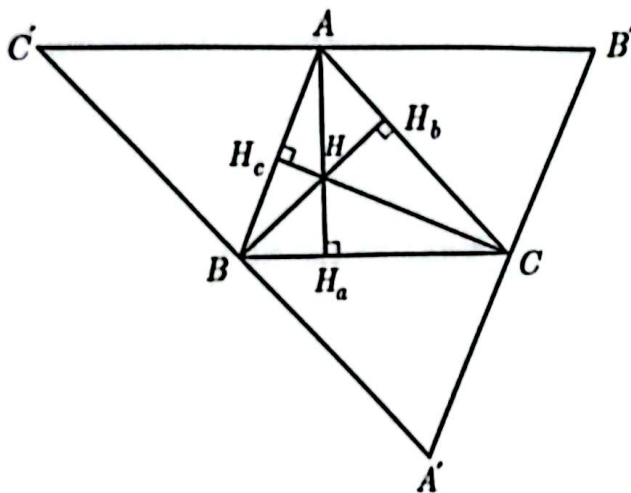
پس O روی L_a است. این یعنی O از A و B و C به یک فاصله است و یک دایره‌ی یکتا به مرکز O وجود دارد که از رئوس A و B و C می‌گذرد. $\square$

دایره محیطی مثلث

دایره‌ای است که از سه رأس A و B و C از مثلث ABC می‌گذرد. شعاع دایره‌ی محیطی مثلث ABC را با R نشان می‌دهند. پس $R = OA = OB = OC$



قضیه ۲۲.۱. ارتفاع‌های مثلث هم‌مرس‌اند.



اثبات. از A ، B و C به موازات اضلاع روبه‌رو رسم کنید تا مثلث $A'B'C'$ ایجاد شود. به راحتی می‌توانید ثابت کنید:

$$\triangle ABC' \cong \triangle AB'C \cong \triangle A'BC \cong \triangle ABC$$

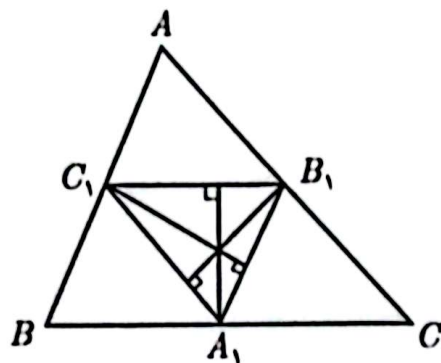
پس به راحتی می‌توان دید:

$$\begin{cases} AB' = AC' \\ BA' = BC' \\ CA' = CB' \end{cases} \Rightarrow \text{مثلث } ABC \text{ میانه‌ای مثلث } A'B'C' \text{ است.}$$

پس AH_a و BH_b و CH_c عمود منصف‌های $B'C'$ و $A'C'$ و $A'B'$ از مثلث $A'B'C'$ هستند. (دقت کنید $BC \parallel B'C'$ و $BC \perp AH_a$ پس $AH_a \perp B'C'$) پس بنابر قضیه‌ی قبل این سه خط هم‌مرس‌اند. محل هم‌رسی را H می‌نامیم. $\square$

نتیجه. از اثبات قضیه قبل به راحتی به دست می‌آید که H مرکز دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ نیز هست. یعنی $O_{\Delta A'B'C'} = H_{\Delta ABC}$. پس مرکز دایره محیطی هر مثلث، مرکز ارتفاعی مثلث میانه‌ای متناظر با آن مثلث است.

دقت کنید در شکل زیر همان‌طور که $\Delta A_1B_1C_1$ ، مثلث میانه‌ای ΔABC است، در شکل قضیه ۲۲.۱ نیز ΔABC ، مثلث میانه‌ای $\Delta A'B'C'$ است.

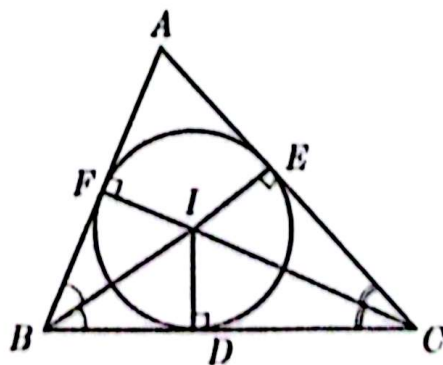


دایره محاطی مثلث

دایره‌ای است که از درون مثلث به سه ضلع آن مماس می‌شود. مرکز آن را با I و شعاع آن را با r نشان می‌دهند.

قضیه ۲۳.۱. سه نیمساز درونی مثلث ABC ، در یک نقطه به نام I هم‌رس‌اند.

اثبات. محل تقاطع نیمساز زوایای B و C را I بنامید.



ثابت می‌کنیم I روی نیمساز زاویه A است. بنابر قضایای قبلی می‌دانیم نقطه‌ی دلخواه K روی

نیمساز یک زاویه است اگر و تنها اگر از دو ضلع متناظر آن زاویه به یک فاصله باشد. پس:

$$\begin{aligned} \angle C \text{ نیمساز } CI &\Rightarrow IE = ID \\ \angle B \text{ نیمساز } BI &\Rightarrow IF = ID \end{aligned} \Rightarrow ID = IE = IF \Rightarrow I \text{ روی نیمساز } \angle A \text{ است}$$

□ پس AI نیمساز زاویه A است و اثبات کامل می‌شود.

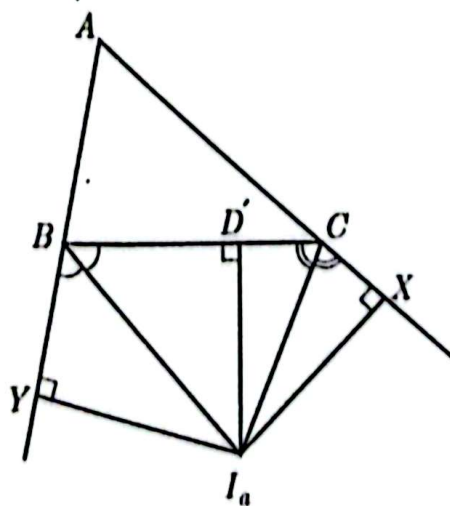
توضیح. همان‌طور که از اثبات قضیه مشخص است، اگر D و E و F پای عمودهای وارد از I بر اضلاع مثلث باشند، $ID = IE = IF = r$. حال اگر به مرکز I دایره‌ای به شعاع r رسم کنیم، بر سه ضلع مثلث مماس می‌شود. (چرا؟) به این دایره، دایره‌ی محاطی داخلی مثلث می‌گویند و شعاع آن را با r نشان می‌دهند که مرکز آن نیز I است.

قضیه ۲۴.۱. نیمسازهای هر دو زاویه‌ی خارجی مثلث با نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم هم‌رس هستند.

اثبات. محل تقاطع نیمساز خارجی زوایای B و C را I_a بنامید. مانند قضیه ۲۳.۱ داریم:

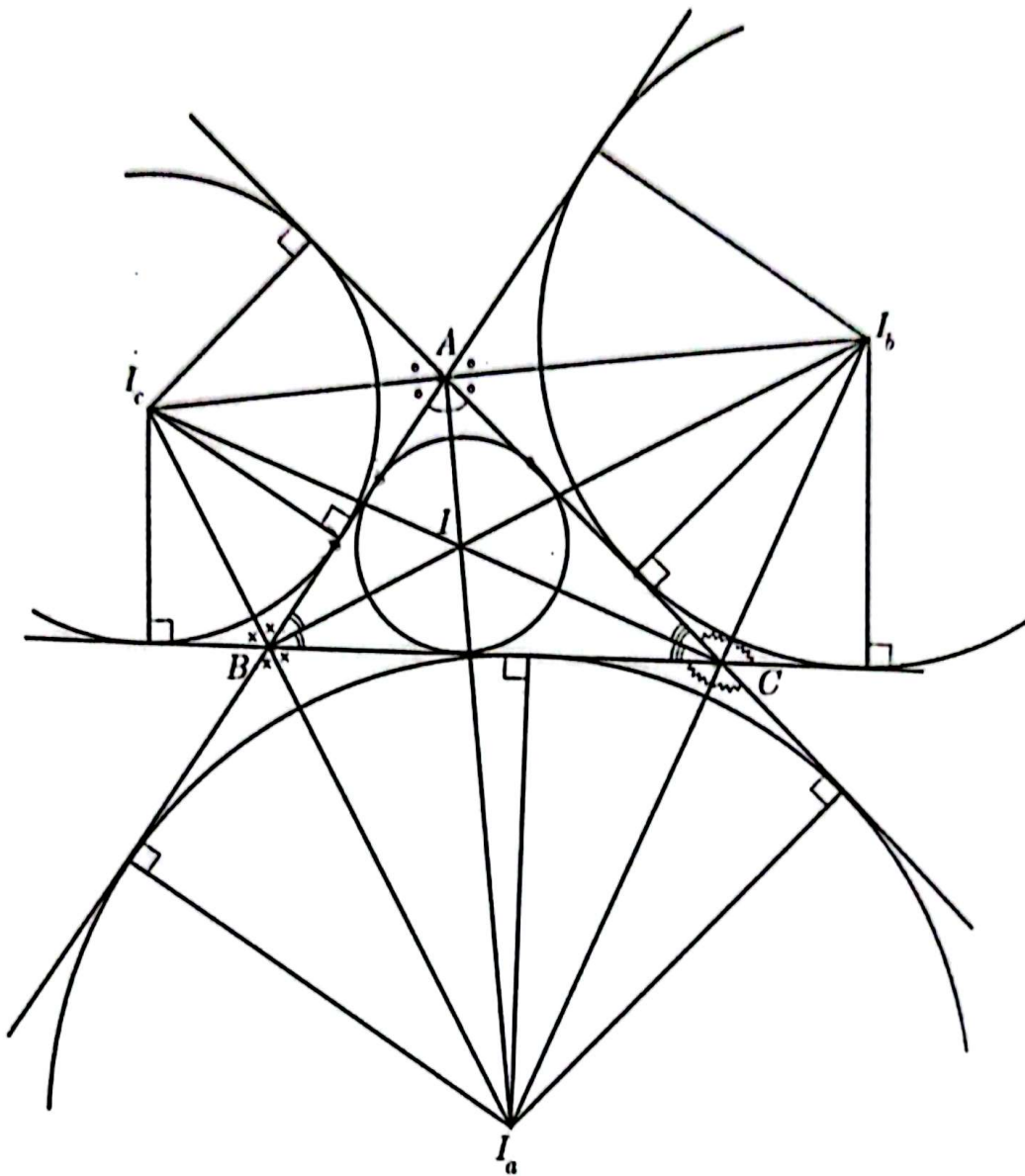
$$\begin{aligned} \angle C \text{ خارجی نیمساز } CI_a &\Rightarrow I_a D' = I_a X \\ \angle B \text{ خارجی نیمساز } BI_a &\Rightarrow I_a D' = I_a Y \end{aligned} \Rightarrow I_a D' = I_a X = I_a Y$$

پس I_a روی نیمساز داخلی زاویه‌ی A است و اثبات تمام است.



□

نتیجه. همانند نتیجه‌ی قبل، دایره‌ای به شعاع $I_a D' = I_a X = I_a Y = r_a$ رسم می‌کنیم. مشابه قبل این دایره به شعاع r_a و مرکز I_a را دایره‌ی محاطی خارجی نظیر راس A می‌نامیم و این دایره به BC و امتداد AB و AC مماس است. r_b, I_b, I_c, r_c کاملاً مشابه تعریف می‌شوند و به دایره‌ی متناظر آن‌ها دایره محاطی خارجی نظیر راس B و C می‌گویند. در شکل زیر به‌طور خلاصه نتیجه و دو قضیه قبل را نشان داده‌ایم.

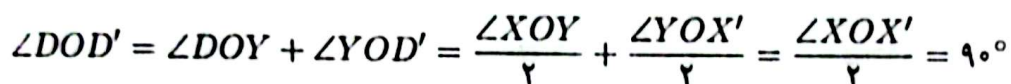


قضیه ۲۵.۱. در مثلث ABC ، مثلث $I_a I_b I_c$ را در نظر بگیرید. مثلث $I_a I_b I_c$ پادک $\triangle ABC$ است و I مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC ، مرکز ارتفاعی مثلث $I_a I_b I_c$ است، یعنی $I_{\triangle ABC} = H_{\triangle I_a I_b I_c}$.

برای اثبات ابتدا لم زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

لم: نیمساز زوایای داخلی و خارجی هر رأس بر هم عمودند.

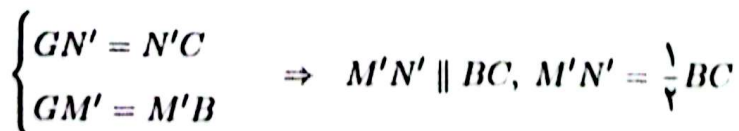
اثبات لم: زاویه‌ی XOY را در نظر بگیرید. OD و OD' نیمساز زوایای داخلی و خارجی زاویه‌ی $\angle XOY$ هستند. داریم:



5

اگر CN و BM یکدیگر را در G قطع کنند، $\frac{CG}{GN} = \frac{BG}{GM} = 2$

اثبات این قضیه را بعد از مطالعہی قضیهی تالس، مشاهده کنید.) وسط CG و BG را N' و M'



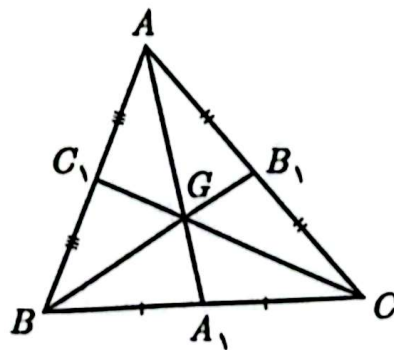
$$\begin{cases} AM = MC \\ AN = NB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}BC$$

$$\Rightarrow MN \parallel M'N', MN = M'N'$$

پس $MNM'N'$ یک متوازی الاضلاع است. و در نتیجه $GN' = GN$ و $GM' = GM$. (چرا؟)
 پس $GC = 2GN$ و $GB = 2GM$ و اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۲۷.۱. سه میانه هر مثلث هم‌مس‌اند و یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. یعنی:

$$\frac{AG}{GA_1} = \frac{BG}{GB_1} = \frac{CG}{GC_1} = 2$$

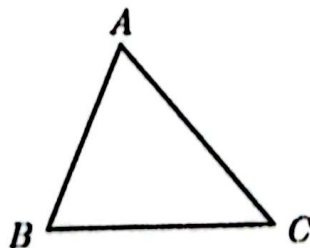


اثبات. از قضیه قبل می‌دانیم هر دو میانه، به نسبت ۲ به ۱ همدیگر را قطع می‌کنند. پس BB_1 و CC_1 دقیقاً به یک نسبت (یعنی ۲ به ۱) AA_1 را قطع می‌کنند. پس هر دو از نقطه‌ای روی AA_1 مانند G می‌گذرند که $\frac{AG}{GA_1} = 2$. پس هر دو از یک نقطه می‌گذرند. این نقطه هر کدام از میانه‌ها را با نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. $\square$

تاکنون به خواص اجزاء مثلث پرداخته‌ایم. اما یکی از اصلی‌ترین خواص مثلث که به نامساوی مثلث معروف است، مربوط به اضلاع آن است. در قضایای زیر به روابط بین اضلاع و زوایای مثلث می‌پردازیم.

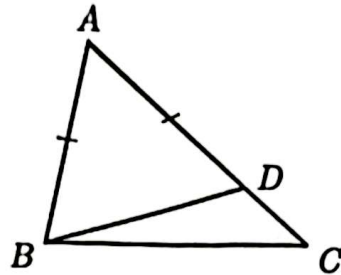
نامساوی مثلث

در مثلث ABC دلخواه رابطه‌ی $AB + AC > BC$ برقرار است.



قضیه ۲۸.۱. در مثلث دلخواه ABC ، اگر $AC > AB$ باشد، $\angle B > \angle C$.

اثبات. با توجه به فرض نقطه‌ی D روی AC وجود دارد که $AD = AB$. با توجه به مباحث گذشته، $\angle ABD = \angle ADB$. اما با توجه به زاویه‌ی خارجی در مثلث CDB خواهیم داشت:

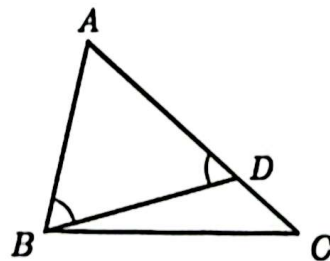


$$\begin{cases} \angle ABD = \angle ADB = \angle ACB + \angle DBC \\ \angle ABD < \angle ABC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle ABC > \angle ACB + \angle DBC > \angle ACB \Rightarrow \angle B > \angle C \quad \square$$

قضیه ۲۹.۱. در مثلث دلخواه ABC ، اگر $\angle B > \angle C$ باشد، آنگاه $AC > AB$.

اثبات.



اثبات اول: با توجه به فرض، می‌توان درون زاویه‌ی $\angle B$ ، به اندازه‌ی زاویه‌ی $\frac{\angle B + \angle C}{2}$ کرد تا AC را در D قطع کند. با توجه به این موضوع که جمع زوایای هر مثلث 180° است خواهیم داشت:

$$\triangle ABD : \angle A + \angle ABD + \angle ADB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A + \frac{\angle B + \angle C}{2} + \angle ADB = 180^\circ \quad (1)$$

و همین‌طور:

$$\triangle ABC : \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (2)$$

با استفاده از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C &= \angle A + \frac{\angle B + \angle C}{2} + \angle ADB \Rightarrow \angle ADB = \frac{\angle B + \angle C}{2} \\ &\Rightarrow \angle ADB = \angle ABD \\ &\Rightarrow AB = AD \\ &\Rightarrow AC > AD = AB \\ &\Rightarrow AC > AB\end{aligned}$$

اثبات دوم: فرض کنید $AC > AB$ نباشد. پس دو حالت دارد:

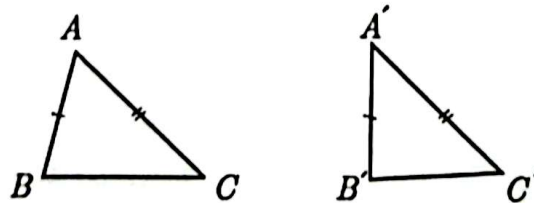
• $AC = AB$: در نتیجه $\angle B = \angle C$.

• $AC < AB$: در نتیجه بنابر قضیه ۲۸.۱، $\angle B < \angle C$.

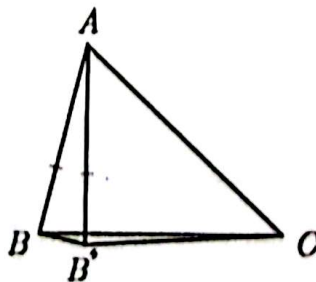
□ هر دو حالت با فرض قضیه تناقض دارد، پس فرض ما درست نبوده و $AC > AB$ است.

قضیه ۳۰.۱ (قضیه لولا). هرگاه در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\angle A > \angle A'$ ، آنگاه $BC > B'C'$.

اثبات.



بنابر فرض، از آنجا که $\angle A > \angle A'$ ، می‌توانیم اندازه‌ی زاویه‌ی A' درون زاویه A روی AC جدا کنیم. (مانند شکل) مشخص است که اگر AB'' را برابر $A'B'$ جدا کنیم، آنگاه $\triangle AB''C \cong \triangle A'B'C'$.



حال در مثلث $BB''C$ داریم:

$$\angle CBB'' < \angle ABB'' = \angle AB''B < \angle CB''B$$

بنابر قضیه ۲۹.۱ داریم:

$$\angle CBB'' < \angle CB''B \Rightarrow BC > CB'' = B'C' \Rightarrow BC > B'C'$$

□ و حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۳۱.۱ (عکس قضیه لولا). هرگاه در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ روابط $AB = A'B'$ ، $AC = A'C'$ و $BC > B'C'$ برقرار باشند، آنگاه $\angle A > \angle A'$.

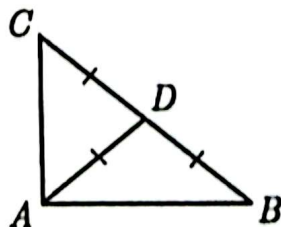
اثبات. با برهان خلف و یا برهان مستقیم، قابل اثبات است و به عنوان تمرین بر عهده خواننده گذاشته می‌شود. □

انواع مثلث

اگر مثلث‌ها شرایط خاصی داشته باشند، خواص ویژه‌ای هم پیدا می‌کنند به همین دلیل آن‌ها را دسته‌بندی می‌کنند.

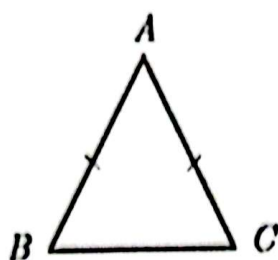
۱. مثلث قائم الزویه:

مثلث ABC قائم الزویه است اگر یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد. به ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۹۰ درجه وتر گویند. میانه‌ی وارد بر وتر، نصف آن است. همین‌طور مرکز دایره محیطی مثلث قائم الزویه، وسط وتر می‌باشد.



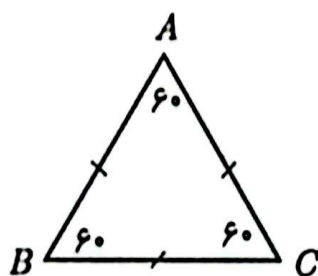
۲. مثلث متساوی‌الساقین:

مثلث ABC متساوی‌الساقین است هرگاه دو ضلع آن برابر باشند. به اضلاع برابر ساق گویند. زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها برابر هستند و ارتفاع و میانه و نیمساز زاویه‌ی سوم نیز بر هم منطبق اند.



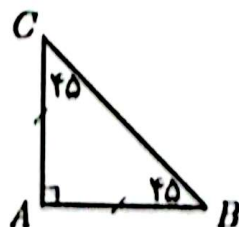
۳. مثلث متساوی الاضلاع:

مثلثی است که اضلاع برابر دارد. زوایای آن همگی 60° درجه هستند و ارتفاع و میانه و نیمساز همه‌ی رئوس بر هم منطبق است. همین‌طور مرکز ثقل و مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز دایره‌ی محاطی و مرکز ارتفاعی مثلث نیز یکی هستند.



۴. مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین:

مثلثی است که یک زاویه‌ی 90° درجه و دو ضلع برابر دارد. دو زاویه‌ی دیگر مثلث 45° درجه است و تمام خواص مثلث متساوی الساقین و قائم الزاویه را با هم دارد.



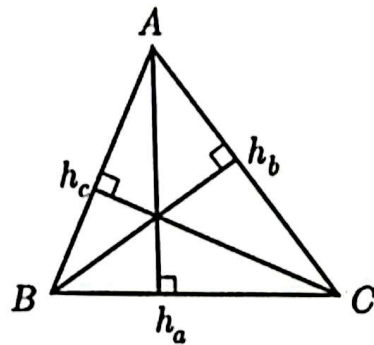
محیط مثلث

محیط مثلث ABC برابر $a + b + c$ است. به نصف محیط یعنی $\frac{a+b+c}{2}$ ، p می‌گویند. یعنی

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

مساحت مثلث

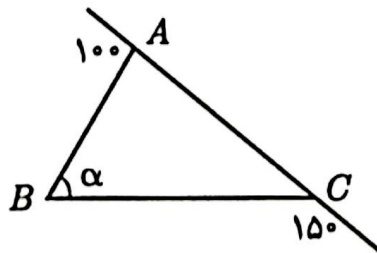
مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌ی هر ضلع مثلث در اندازه‌ی ارتفاع نظیر آن ضلع. یعنی اگر مساحت مثلث ABC را با $S_{\Delta ABC}$ نشان دهیم خواهیم داشت:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

رابطه‌های دیگری برای مساحت نیز وجود دارد که در آینده به تفصیل در مورد آن‌ها صحبت خواهیم کرد. در ادامه با بررسی چند مثال، بخش به پایان می‌رسد.

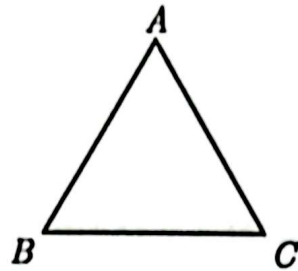
مثال ۱۶.۱. در شکل روبه‌رو، زاویه‌ی α را حساب کنید.



راه حل. می‌دانیم $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. اما از طرفی:

$$\left. \begin{aligned} \angle A + 100^\circ &= 180^\circ \Rightarrow \angle A = 80^\circ \\ \angle C + 150^\circ &= 180^\circ \Rightarrow \angle C = 30^\circ \\ \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle B = \alpha = 70^\circ$$

مثال ۱۷.۱. ثابت کنید در هر مثلث دست کم یک زاویه‌ی بزرگ‌تر یا مساوی 60° و یک زاویه کوچک‌تر یا مساوی 60° وجود دارد.

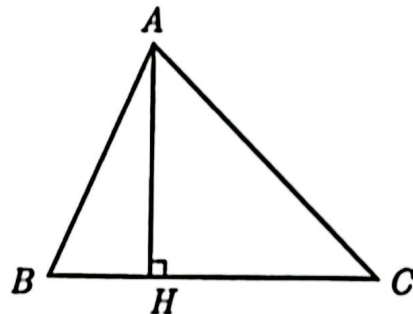


راه حل. در مثلث ABC ، می‌دانیم $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. از طرفی اگر تمام زوایا از 60° کوچکتر باشند:

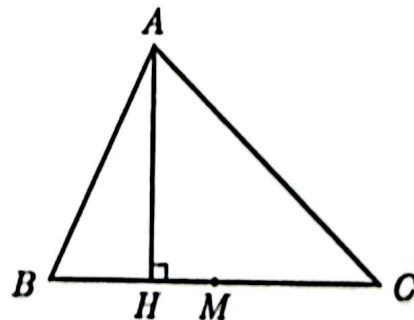
$$\angle A + \angle B + \angle C < 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C < 180^\circ$$

که تناقض است. پس تمام زوایا از 60° کوچکتر نیستند و زاویه‌ای بزرگتر یا مساوی با 60° وجود دارد. قسمت دیگر حکم نیز به سادگی اثبات می‌شود.

مثال ۱۸.۱. در مثلث ABC ، ارتفاع AH است. می‌دانیم $2AH = BC$. ثابت کنید $\angle A \leq 90^\circ$.



راه حل. نقطه‌ی وسط BC را M بنامید. در $\triangle AHM$ ، با توجه به $\angle AHM = 90^\circ$ ، خواهیم داشت:



$$\angle AMH \leq \angle AHM = 90^\circ \Rightarrow AM \geq AH = \frac{BC}{2}$$

$$\Rightarrow AM \geq \frac{BC}{2} = BM = CM$$

در نتیجه:

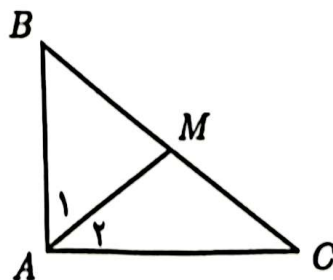
$$\begin{cases} AM \geq BM \Rightarrow \angle ABM \geq \angle MAB \\ AM \geq MC \Rightarrow \angle ACM \geq \angle MAC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle MAB + \angle MAC \leq \angle ABM + \angle ACM$$

$$\Rightarrow A \leq \angle B + \angle C$$

از طرفی $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. پس $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$. در نتیجه با جایگذاری $\angle A \leq 90^\circ$.

مثال ۱۹.۱. در مثلث ABC ، AM میانه‌ی مثلث است. اگر $AM = \frac{BC}{2}$ ، ثابت کنید $\angle A = 90^\circ$.
و بر عکس، اگر $\angle A = 90^\circ$ ، ثابت کنید $AM = \frac{BC}{2}$.



راه حل. اگر $AM = \frac{BC}{2}$ ، پس $AM = BM = CM$. بنابر قضایای گفته شده:

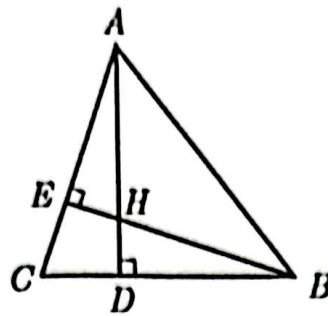
$$\left. \begin{aligned} AM = BM &\Rightarrow \angle A_1 = \angle B \\ AM = CM &\Rightarrow \angle A_2 = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \angle A + \angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \Rightarrow 2\angle A = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

طرف دیگر نیز به سادگی قابل اثبات است که بر عهده‌ی خواننده گذاشته می‌شود.

مثال ۲۰.۱. در مثلث ABC ، H مرکز ارتفاعی است. اگر $\angle BAH = 30^\circ$ و $\angle ABH = 25^\circ$ ،
زوایای مثلث را بیابید.

راه حل. پای ارتفاع رنوس A و B را D و E بنامید. خواهیم داشت:



$$\triangle ABD: \angle ADB + \angle ABD + \angle BAD = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \angle ABD + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle ABD = 60^\circ$$

$$\triangle ABE: \angle ABE + \angle AEB + \angle BAE = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 25^\circ + \angle BAE = 180^\circ \Rightarrow \angle BAE = 65^\circ$$

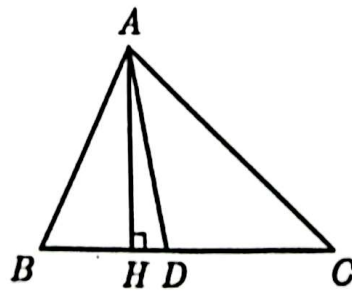
$$\triangle ABC: \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 65^\circ + 60^\circ + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle C = 55^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 65^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 55^\circ$$

مثال ۲۱.۱. در مثلث ABC ، AH و AD ارتفاع و نیمساز نظیر زاویه A هستند. ثابت کنید $\frac{|\angle B - \angle C|}{2} = \angle DAH$.

راه حل. AD نیمساز است. پس $\angle DAB = \angle DAC = \frac{\angle A}{2}$. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید $\angle B > \angle C$.



از طرفی به سادگی قابل محاسبه است که $\angle HAB = 90^\circ - \angle B$. پس:

$$\angle DAH = \angle DAB - \angle BAH = \frac{\angle A}{2} - (90^\circ - \angle B)$$

اما می‌دانیم $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. پس:

$$\begin{cases} \angle DAH = \frac{\angle A + 2\angle B}{2} - 90^\circ \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \end{cases}$$