



ہیدرولیک محاسباتی

(کارشناسی ارشد مہندی آب و سارہ ہای ہیدرولیکی)

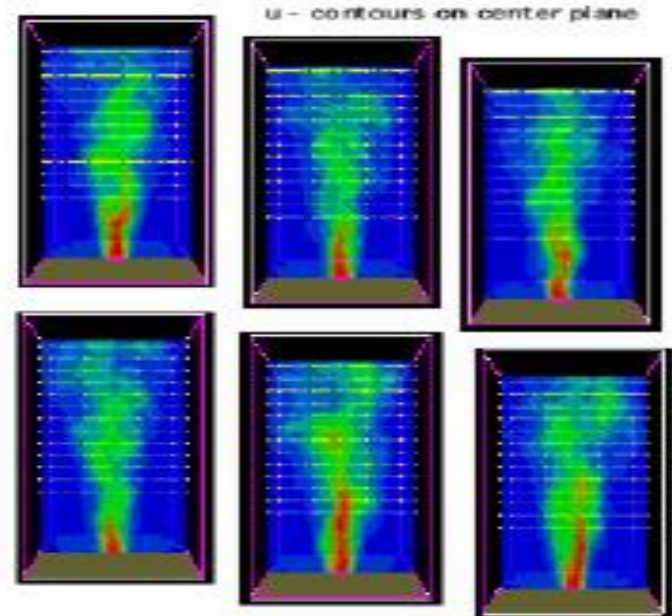
CFD

Computational Fluid Dynamics

(دینامیک سیالات محاسباتی)



فصل اول: مقدمہ





روش های حل میدان جریان سیال

۱- روش های تئوری و تحلیلی

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{constant}$$

* براساس حل معادلات حاکم بنا شده اند.

* اغلب معادلات به صورت دیفرانسیل پاره ای مرتبه دوم هستند.

* حل تحلیلی معادلات مذکور بجز در برخی شرایط خاص، امکان پذیر نیست.

۲- روش های تجربی (آزمایشگاهی)

* برپایه اندازه گیری های عملی استوار است.

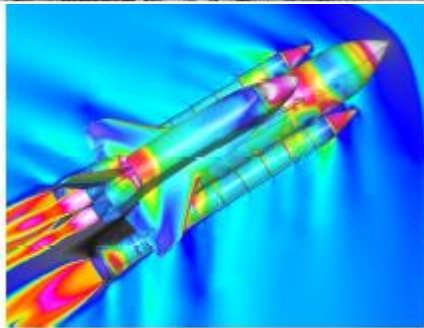
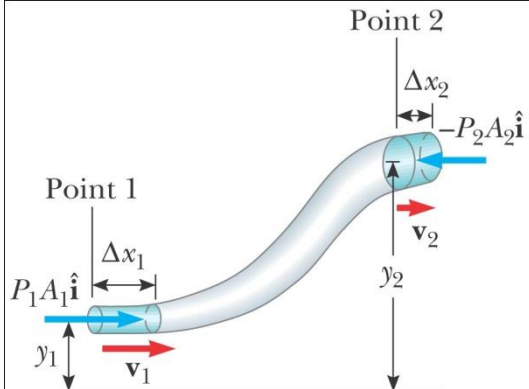
* اگر اندازه گیری بر روی نمونه واقعی ممکن نباشد از مدل آزمایشگاهی آن استفاده می شود.

* ساخت دقیق برخی از قسمت های مدل یا ایجاد بعضی شرایط خاص بعضا بسیار دشوار یا غیر ممکن است.

* معمولا پرهزینه و وقت گیر می باشد.

۳- روش های حل عددی (CFD)

CFD عبارتست از تحلیل عددی سیستم ها شامل جریان سیال، انتقال حرارت و پدیده های همراه، بر اساس شبیه سازی کامپیوتری.





مزایای روش های حل عددی (CFD)، نسبت به روش های تجربی:



❖ صرفه جوئی در زمان و هزینه.

❖ توانائی مطالعه و شبیه سازی مسائلی که انجام آزمایشات روی آنها مشکل و یا غیرممکن است.

❖ به دست آوردن اطلاعات کامل با جزئیات بسیار دقیق.

❖ توانائی شبیه سازی شرایط واقعی.



تاریخچه CFD



□ احتمالاً لوئیس فری ریچاردسون (۱۹۵۳-۱۸۸۱) اولین شخصی بود که محاسبات CFD به شکل امروزی را انجام داده است.

✓ او با تقسیم ناحیه فیزیکی به سلول‌های شبکه و استفاده از روش اختلاف محدود، سعی در پیش‌بینی وضع هوا را داشت.

✓ ریچاردسون ۶ هفته و روزی ۸ ساعت کار محاسباتی انجام داد، ولی چون مدل او به محاسبات خیلی بیشتری نیاز داشت در پایان با شکست مواجه شد.

✓ ریچاردسون به فکر راه حلی به‌ترولی عجیبی افتاد، او به ۶۴۰۰۰ نفر یک ماشین حساب مکانیکی داد، آنها را در ورزشگاهی جمع کرد و خودش در وسط ورزشگاه با کمک یک چراغ و علائم موریس، رهبری آنها را برعهده گرفت، موفق گردید، ولی نتیجه این روش فقط یک محاسبه اولیه CFD محسوب می‌شد.



تاریخچه CFD

(ادامه)

- تام در سال ۱۹۳۳ در انگلیس اولین محاسبه عددی برای جریان پشت استوانه را انجام داد.
- کاواگاتی در سال ۱۹۵۳ در ژاپن حل مشابهی برای جریان پشت استوانه انجام داد، این کار با ماشین حساب به مدت ۱۸ ماه و با هفته‌ای ۲۰ ساعت کار حاصل شده بود.
- بخش نظری NASA در خلال دهه ۱۹۶۰ روشهای عددی زیادی را ارائه داد که هنوز نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.
- گروهی زیر نظر اسپالدینگ در کالج سلطنتی لندن در دهه ۱۹۷۰ نیز کارهای زیادی برای توسعه CFD انجام دادند.
- پاتانکار در سال ۱۹۸۰ کتاب “جریان سیال و انتقال حرارت عددی” را چاپ کرد، که یکی از وقایع مهم در دنیای CFD بود و تاثیر زیادی در گسترش آن داشت و شاید هزاران کد CFD براساس این کتاب نوشته شده است.
- بالاخره در اواخر دهه ۱۹۸۰، برنامه‌های تجاری CFD پا به عرصه بازار گذاشتند و در حال حاضر شرکت‌های زیادی برای مطالعات و محاسبات خود از این برنامه‌ها استفاده می‌کنند.
- هنوز نیز علم CFD در حال توسعه و پیشرفت در شرایط پیچیده جریان سیالات می‌باشد.



ساختار کدهای CFD



I. **Pre-processor** (پیش پردازنده)

II. **Solver** (حل کننده)

III. **Post-processor** (پس پردازنده)

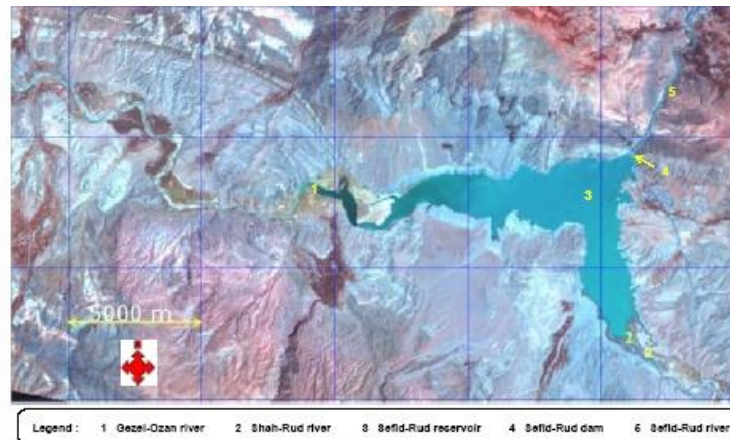
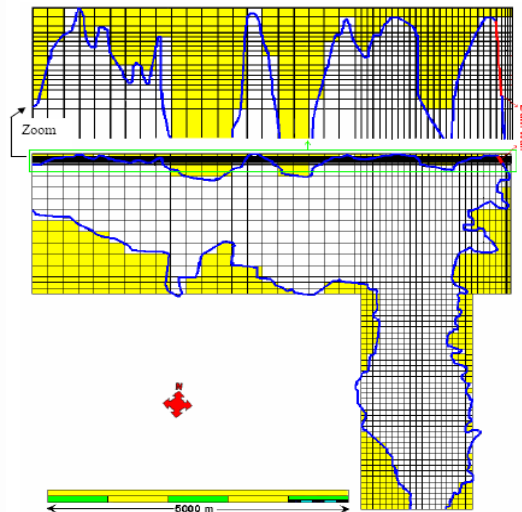


ساختار کدهای CFD (ادامه)



Pre-processor (پیش پردازنده)

- تعریف هندسه ناحیه مورد نظر یا میدان محاسباتی (computational domain)
- شبکه بندی ناحیه مورد نظر (grid or mesh generation)
- انتخاب مجموعه پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی که باید مدل شود
- تعریف خواص سیال
- تشخیص و تعریف شرایط مرزی لازم در سلول‌هایی که منطبق و یا در تماس با مرزها هستند.





Solver (حل کننده)

- تقریب متغیرهای مجهول جریان، با استفاده از توابع ساده
- گسسته‌سازی با استفاده از جایگذاری تقریب‌ها در معادلات حاکم بر جریان و سپس انجام تغییرات ریاضی.
 - ❖ روش‌های طیفی (Spectral Methods)
 - ❖ روش عناصر محدود "FEM" (Finite Element Method)
 - ❖ روش اختلاف محدود "FDM" (Finite Difference Method)
 - ❖ روش حجم محدود "FVM" (Finite Volume Method)
- حل معادلات جبری

ساختار کدهای CFD (ادامه)

Post-processor (پس پردازنده)

خروجی عددی نتایج برای کلیه نقاط شبکه
به صورت جداول دسته بندی شده و نمودارها

خروجی گرافیکی نتایج برای میدان محاسباتی

نمایش میدان هندسی و شبکه

ترسیمات برداری

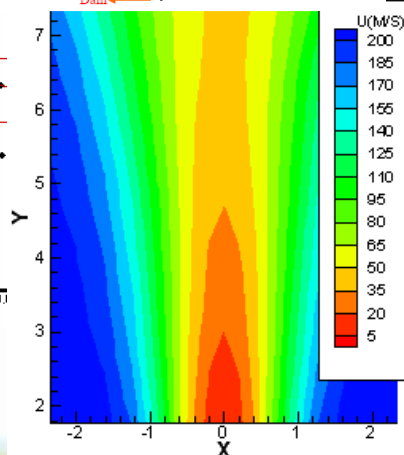
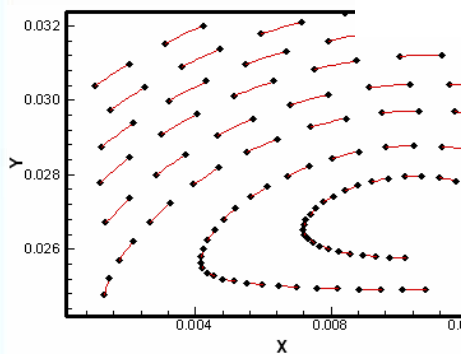
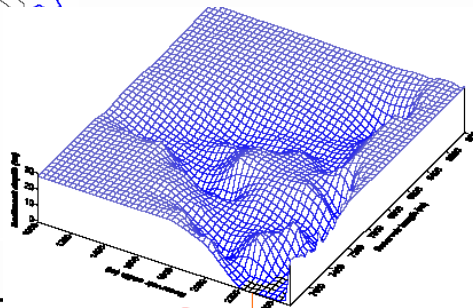
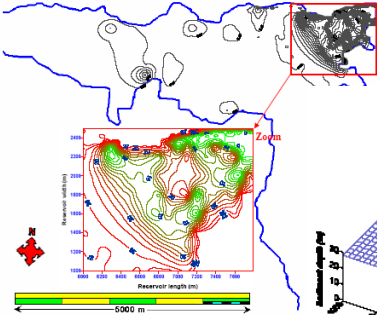
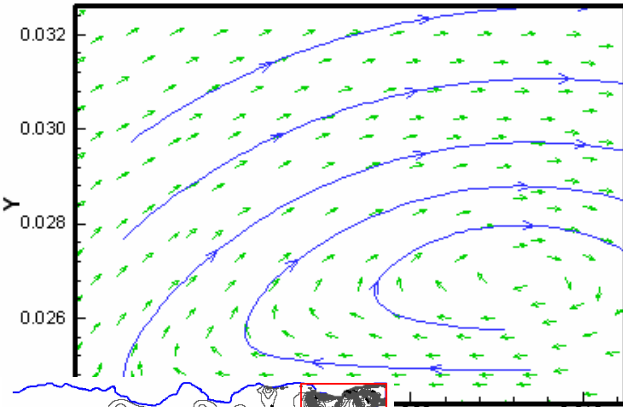
ترسیمات خط و سایه هم تراز

ترسیمات سطح دوبعدی و سه بعدی

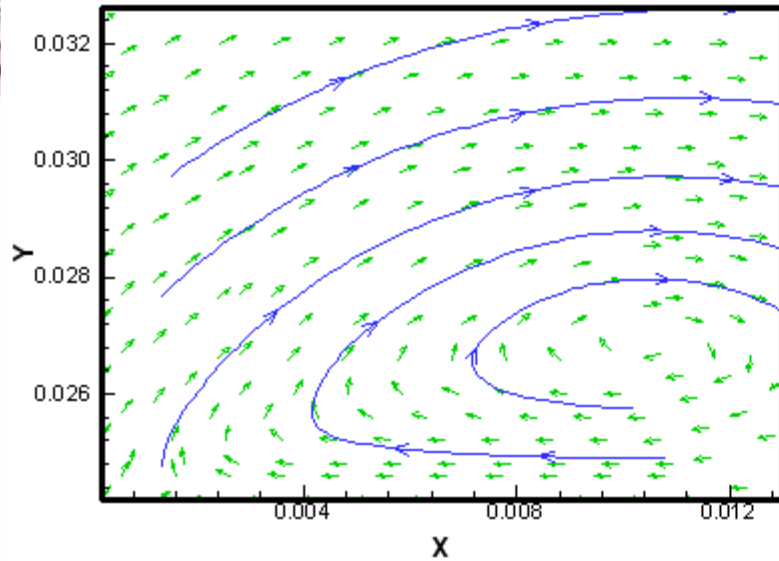
مسیر حرکت ذره

خروج نتایج با رنگ بندی های مشخص

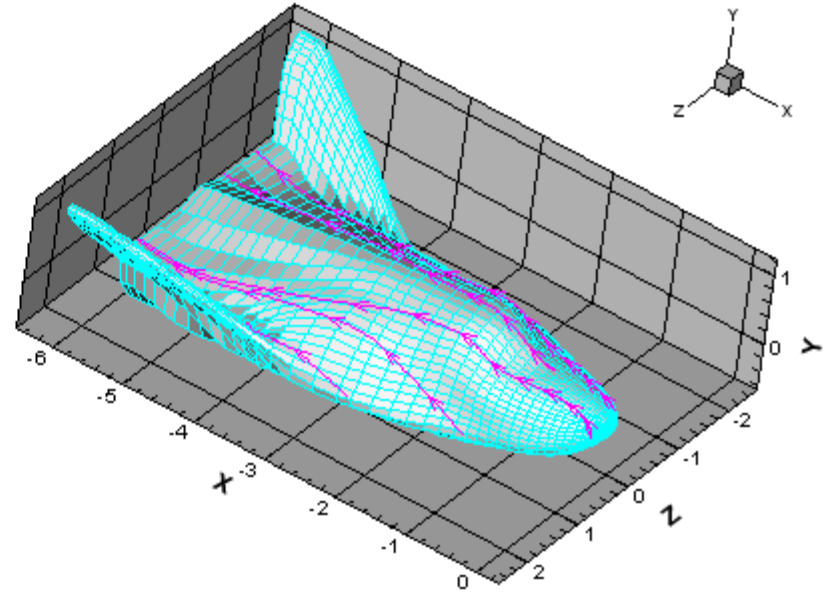
خروجی به صورت انیمیشن و متحرک



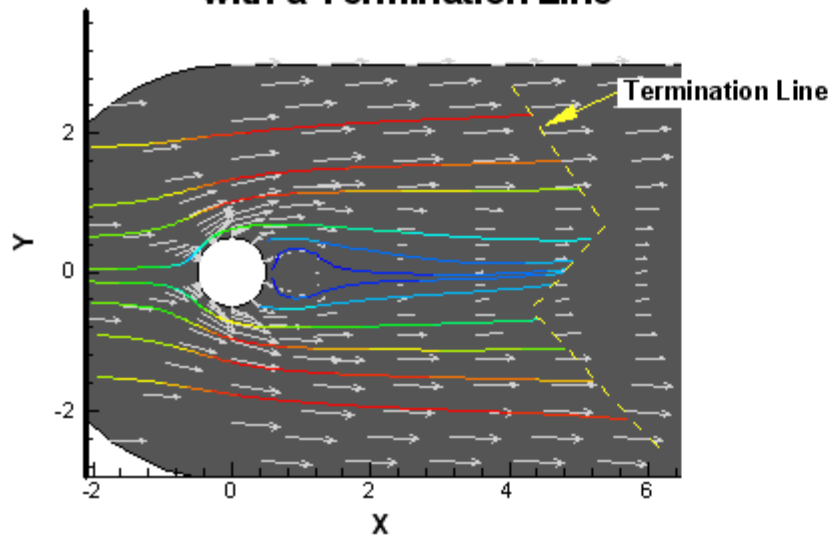
Vectors and Streamtraces



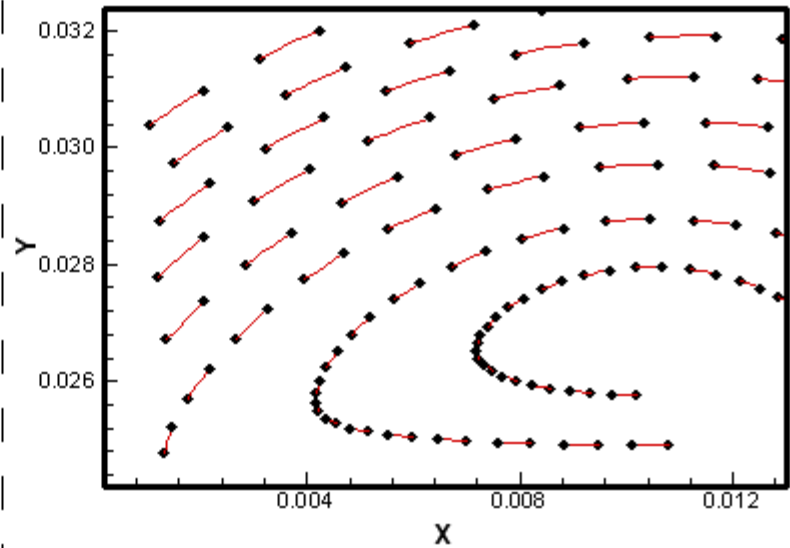
3D-Surface Streamtraces



Multi-Colored Streamtraces with a Termination Line



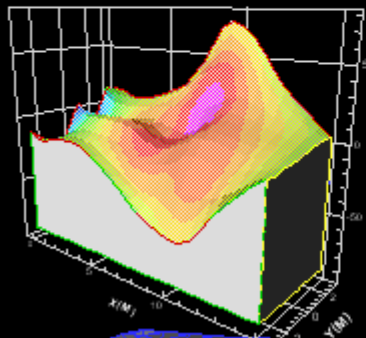
Streamtrace Timing Dashes and Marks



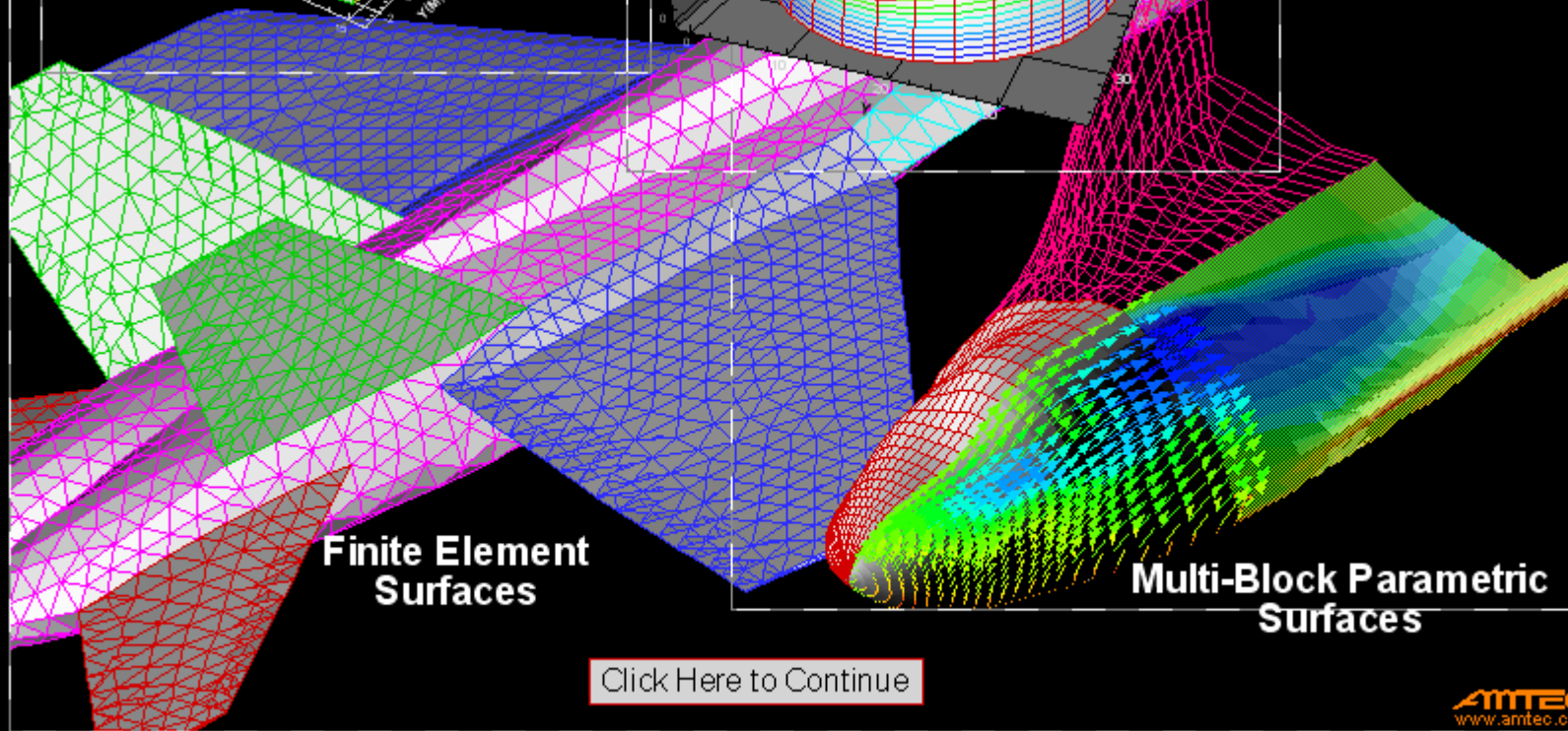
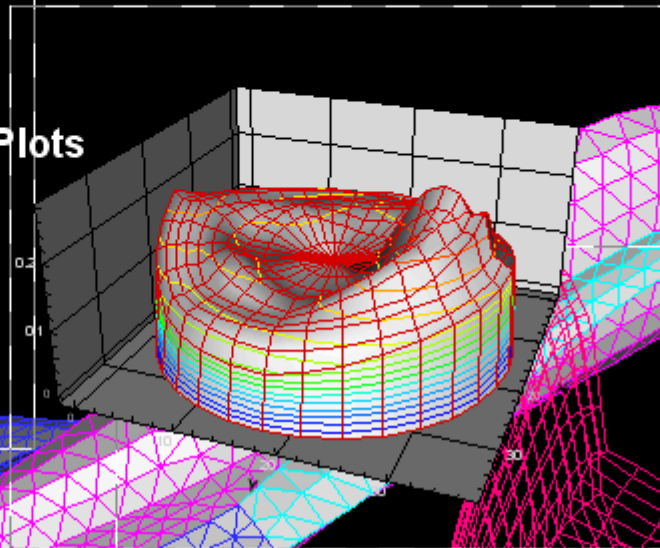


Tecplot[®]
Version 8.0

Display Real Objects and 3-D Surface Data



Carpet Plots



**Finite Element
Surfaces**

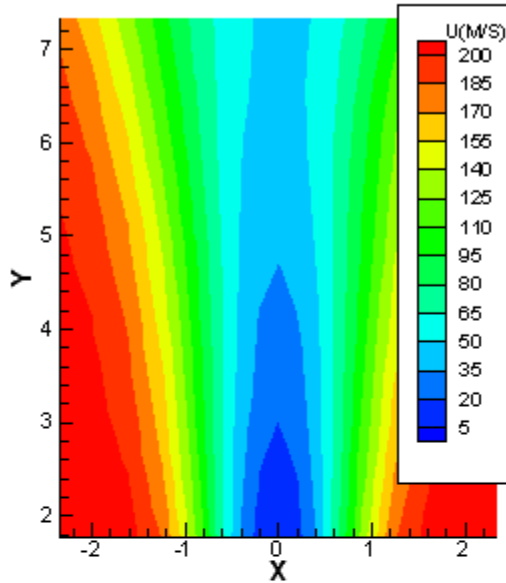
**Multi-Block Parametric
Surfaces**

[Click Here to Continue](#)

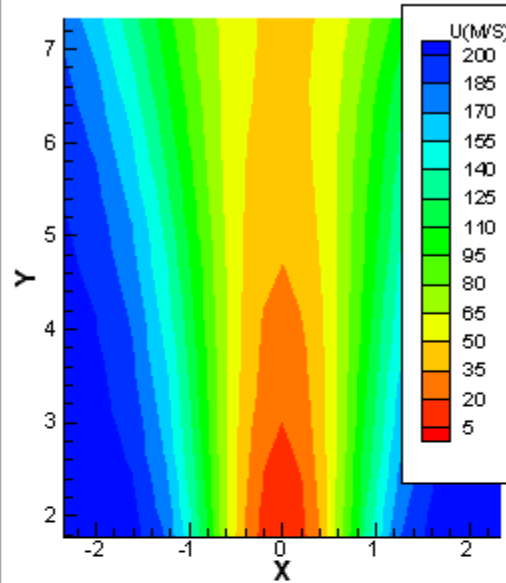


Secondary Adjustments to the Colormap

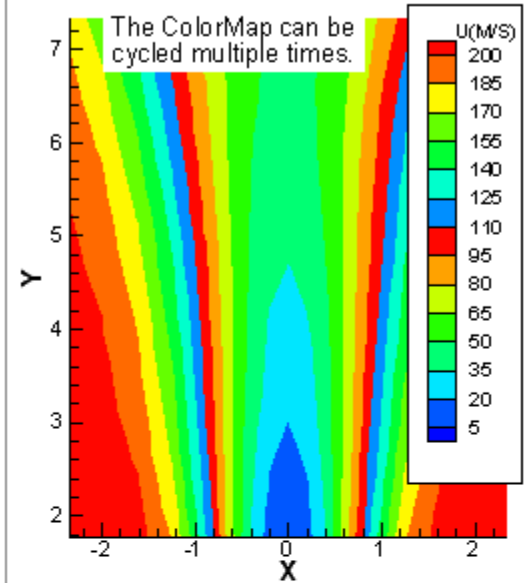
No Adjustments



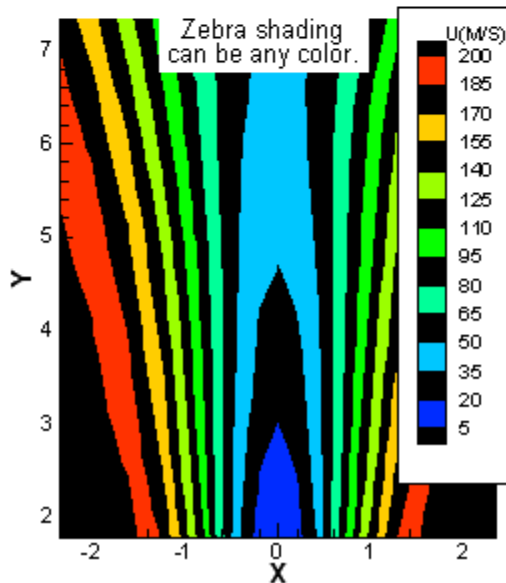
Reversed



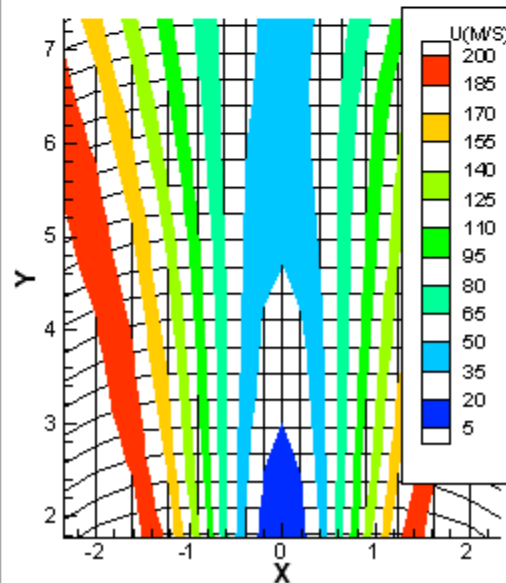
Two Cycles



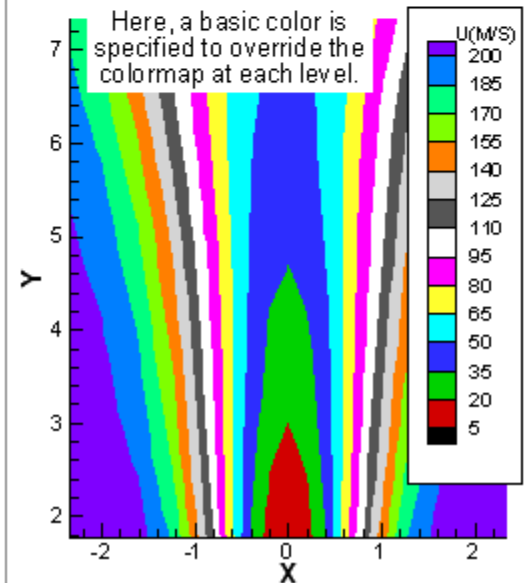
Black Zebra Shading



Transparent Zebra Shading



ColorMap Overrides





فصل دوم: یادآوری

معادلات و غیرنسبیهی حاکم در دینامیک سیالات



معادلات حاکم بر جریان سیال



**معادلات حاکم بر جریان سیال بیانگر قوانین فیزیکی بقاء بصورت عبارات ریاضی می باشد؛
برخی از این قوانین عبارتند از:**

- ❖ جرم سیال همواره ثابت می باشد.
- ❖ نرخ تغییر اندازه حرکت، با برآیند نیروهای وارد روی ذره سیال برابر است (قانون دوم نیوتن).
- ❖ نرخ تغییر انرژی، با مجموع نرخ افزایش حرارت سیستم و نرخ کار انجام شده روی ذره سیال برابر است (قانون اول ترمودینامیک).



میدان های سرعت و شتاب



$$V = V_x(x, y, z, t)\hat{i} + V_y(x, y, z, t)\hat{j} + V_z(x, y, z, t)\hat{k}$$

میدان سرعت:

$$V = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z}$$

میدان شتاب:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

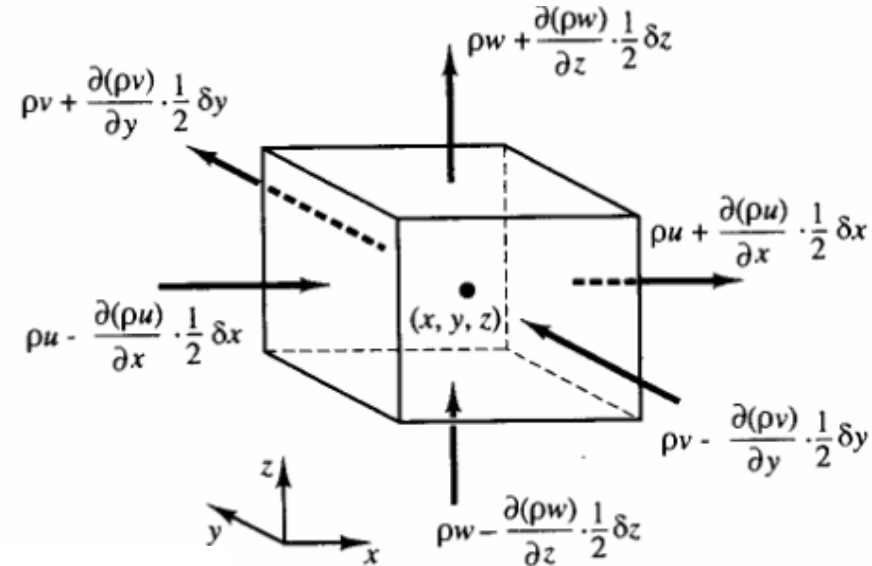


بقای جرم (Mass conservation)



نرخ خالص جریان جرم ورودی به المان سیال = نرخ افزایش جرم در المان سیال

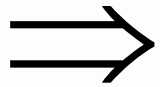
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$



$$\begin{aligned} & \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z \\ & + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \\ & + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned}$$



بقای جرم (Mass conservation)



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

or

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$



معادله اندازه حرکت (Momentum equation)



بر آیند نیروهای موثر بر ذره سیال = نرخ افزایش اندازه حرکت ذره سیال



در جهت های

x



y



z



$$\rho \frac{Du}{Dt}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt}$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt}$$

• نیروهای سطحی (Surface Forces)

• نیروهای فشاری (Pressure F.)

• نیروهای لزج (Viscous F.)

• نیروهای بدنه (Body forces)

• نیروهای گرانشی (Gravity F.)

• نیروی گریزازمرکز (Centrifugal F.)

• نیروی کریولیس (Coriolis F.)

• نیروهای الکترومغناطیس

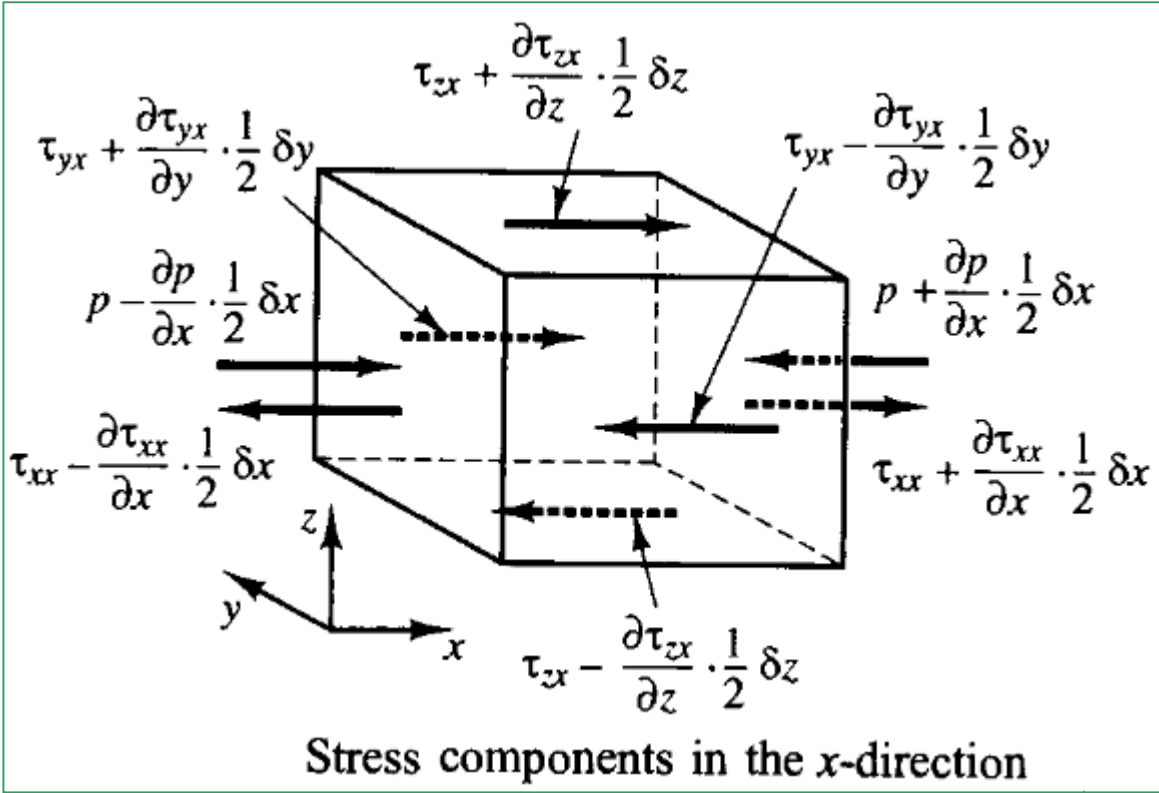
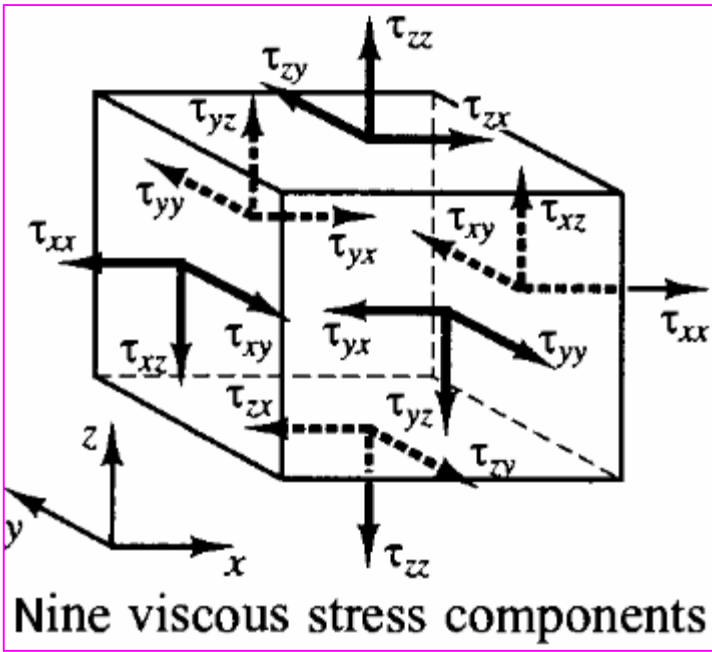
(Electromagnetic F.)



معادله اندازه حرکت (Momentum equation)



• نیروهای سطحی ← بصورت جملات جداگانه در معادلات اندازه حرکت نشان داده می شوند.



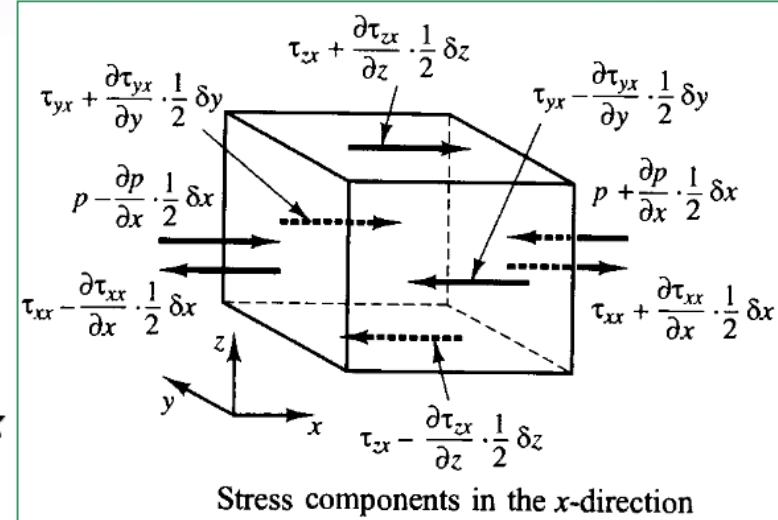
نیروی خالص در جهت x برابر است با برآیند مولفه های نیروهائی که در همان جهت روی المان سیال عمل می کنند.



معادله اندازه حرکت (Momentum equation)



$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\ + & \left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\ - & \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \\ - & \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned}$$



$$= \left(- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

بنابراین نیروی کل در واحد حجم سیال، ناشی از تنشهای سطحی در جهت x عبارتست از:

$$\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$



معادله اندازه حرکت (Momentum equation)



- نیروهای بدنه ← معمولاً بصورت عبارات‌های چشمه در معادلات اندازه حرکت نشان داده می‌شوند.



$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx}$$

- مولفه X معادله اندازه حرکت

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + S_{My}$$

- مولفه Y معادله اندازه حرکت

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz}$$

- مولفه Z معادله اندازه حرکت

نکته ۱: علامت فشار مخالف علامت تنش عمودی لزج می‌باشد، زیرا طبق قرارداد برای تنش کششی عمودی علامت مثبت در نظر گرفته می‌شود و بنابراین فشار ناشی از تنش عمودی تراکمی علامت منفی خواهد داشت.

نکته ۲: بعنوان نمونه نیروی بدنه ناشی از گرانش با استفاده از $S_{My} = S_{Mx} = 0$, $S_{Mz} = -\rho g$ مدل می‌شود.



معادله انرژی (Energy equation)

نرخ خالص کار انجام شده روی ذره سیال یا کار انجام شده توسط سیال + نرخ خالص حرارات اضافه شده به ذره سیال یا گرفته شده از ذره سیال = نرخ تغییر انرژی ذره سیال

(در واحد حجم)

$$\rho \frac{DE}{Dt} \rightarrow \text{انرژی پتانسیل} + \text{انرژی جنبشی} + \text{انرژی داخلی (حرارتی)} = \text{انرژی مخصوص سیال}$$

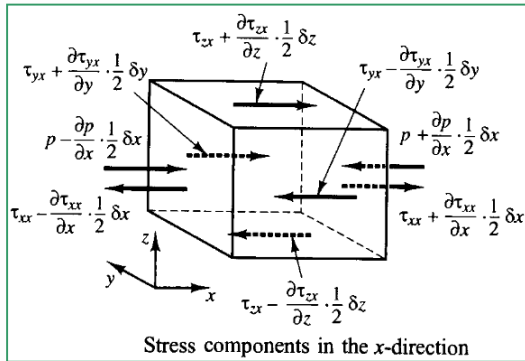
$$E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + s_E$$



معادله انرژی (Energy equation)

نرخ خالص کار انجام شده + نرخ خالص حرارت اضافه شده = نرخ افزایش انرژی
روی ذره سیال به ذره سیال

نرخ کار خالص انجام شده روی ذره سیال در داخل المان = نیرو × مولفه سرعت در جهت نیرو
(توسط نیروهای سطحی در راستای X)



Stress components in the x-direction

$$\left[\left(pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\tau_{xx}u - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left(\tau_{xx}u + \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z$$

$$+ \left[- \left(\tau_{yx}u - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) + \left(\tau_{yx}u + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \right] \delta x \delta z$$

$$+ \left[- \left(\tau_{zx}u - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) + \left(\tau_{zx}u + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \right] \delta x \delta y$$



معادله انرژی (Energy equation)



نرخ کارخالص انجام شده روی ذره سیال

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial [u(-p + \tau_{xx})]}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad \text{در راستای X}$$

$$\left[\frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial [v(-p + \tau_{yy})]}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad \text{در راستای Y}$$

$$\left[\frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial [w(-p + \tau_{zz})]}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad \text{در راستای Z}$$

$$\Rightarrow \text{نرخ کل کارانجام شده روی ذره سیال بوسیله تنش سطحی} = -\frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} - \frac{\partial (wp)}{\partial z} +$$

$$\left[\frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} \right]$$

$$= -\text{div}(p\mathbf{u}) +$$

$$\left[\frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} \right]$$



معادله انرژی (Energy equation)

نرخ خالص کار انجام شده + نرخ خالص حرارت اضافه شده = نرخ افزایش انرژی
روی ذره سیال به ذره سیال

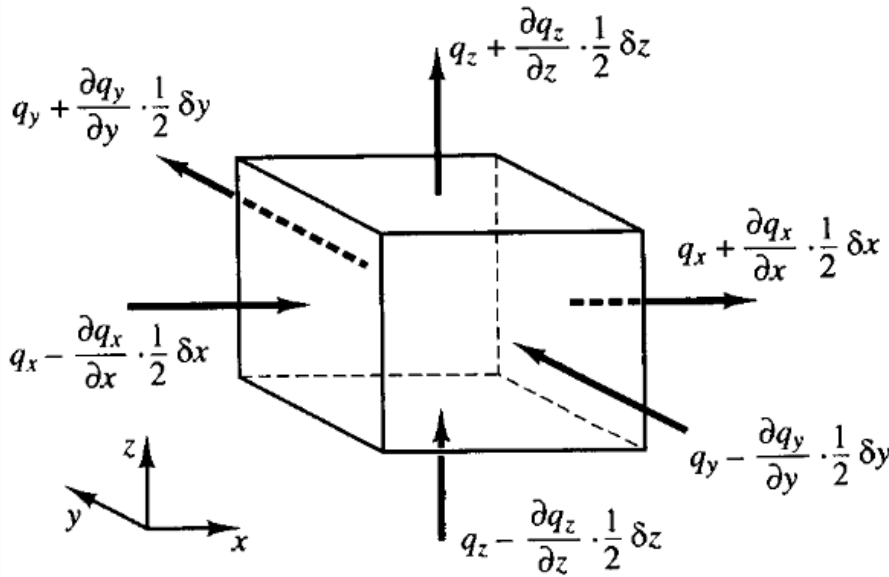


نرخ خالص انتقال حرارت به سیال

$$\left[\left(q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = - \frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad \text{در راستای X}$$

$$- \frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad \text{در راستای Y}$$

$$- \frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad \text{در راستای Z}$$



Components of the heat flux vector



معادله انرژی (Energy equation)

نرخ کلی گرمای افزوده شده
 به ذره سیال در واحد حجم
 ناشی از جریان حرارت
 عبوری از مرزها

$$= -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\text{div } \mathbf{q}$$

نرخ افزایش گرما به ذره سیال
 به دلیل هدایت حرارتی
 توسط مرزهای المان

=

$$-\text{div } \mathbf{q} = \text{div}(k \text{ grad } T)$$

مطابق قانون فوریه برای
 هدایت حرارت، شار حرارتی
 با گرادیان دما به صورت زیر
 مرتبط می گردد:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \right\} \mathbf{q} = -k \text{ grad } T$$



معادله انرژی (Energy equation)



$$\rho \frac{DE}{Dt} = - \operatorname{div}(p\mathbf{u}) + \left[\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + S_E$$

معادله انرژی

در معادله فوق:

$$E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

S_E نرخ خالص کار انجام شده روی سیال توسط نیروهای بدنه و انرژی پتانسیل گرانشی (بصورت یک چشمه وارد معادله شده‌اند)



معادله انرژی (Energy equation)

معادله انرژی را می توان به دو معادله بقای انرژی جنبشی و معادله انرژی داخلی به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\rho \frac{D \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right]}{Dt} = - \mathbf{u} \cdot \text{grad } p + u \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_M$$

معادله بقای انرژی جنبشی:
(با ضرب مولفه های x ، y و z معادله اندازه حرکت بترتیب در u ، v و w و سپس جمع آنها حاصل می شود)

با فرض:

$$S_i = S_E - \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_M$$

$$\rho \frac{Di}{Dt} = - p \text{ div } \mathbf{u} + \text{div}(k \text{ grad } T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i$$

معادله انرژی داخلی:
(از کسر معادله انرژی از معادله بقای انرژی جنبشی حاصل می شود)



معادلات حالت (*Equations of state*)

در میان پنج معادله حاکم در انتقال سیال (بقای جرم، اندازه حرکت در جهات x ، y و z و معادله انرژی) علاوه بر متغیرهای سرعت جریان (u ، v و w) و مولفه‌های تنش لزجی (τ_{ij}) که به شکل معادلات دیفرانسیلی سرعت در خواهند آمد (در بخش بعدی بحث خواهد شد)، چهار متغیر ترمودینامیکی ρ ، p ، T و i نیز وجود دارد.

لذا با توجه به تعداد مجهولات برای حل جریان سیال حداقل دو معادله دیگر نیاز است. این معادلات که به معادلات حالت معروفند رابطه بین متغیرهای ترمودینامیکی را باید بدست دهند همانند معادله گاز کامل:

$$P = \rho RT$$



معادلات ناویر-استوکس (Navier-Stokes equations)



- معادلات حاکم شامل مجهولات به اضافه مولفه‌های تنش لزج می‌باشد.
- در بسیاری از جریان‌های سیال، تنش‌های لزج بصورت توابعی از نرخ تغییر شکل‌های محلی بیان می‌شود.
- در جریان‌های سه بعدی، نرخ محلی تغییر شکل‌ها بصورت ترکیبی از نرخ تغییرات خطی و نرخ تغییرات حجمی است.
- نرخ تغییر شکل یک سیال ایزوتروپ (سیالی است که دارای مقادیر مهمی از مولکول‌های پلیمری نمی‌باشند) مطابق نظر اشلیختینگ (Schlichting, 1979) عبارتست از:



معادلات ناور-استوکس (Navier-Stokes equations)



اشلیختینگ (Schlichting, 1979):

• مولفه‌های تغییر طول خطی:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

• مولفه‌های تغییر شکل خطی برشی:

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

• تغییر شکل حجمی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{u}$$



معادلات ناور-استوکس (Navier-Stokes equations)



• در یک سیال نیوتنی، تنش‌های لزج متناسب با تغییر شکل‌ها می‌باشد.

• قانون لزجت نیوتن در شکل سه‌بعدی جریان‌های قابل تراکم دارای ۲ ثابت تناسب است:

– لزجت دینامیکی (μ): تغییر شکل خطی را با تنش‌ها مرتبط می‌سازد.

– لزجت ثانویه (λ): تنش را با تغییر شکل‌های حجمی مرتبط می‌سازد ولی اطلاعات زیادی از آن نداریم، برای اینکه اثرات آن در عمل خیلی کوچک است.

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$



معادلات ناویر-استوکس (Navier-Stokes equations)



با جایگذاری تنش‌های ذکر شده در معادلات اندازه حرکت (و انرژی)، معادلات ساده شده زیر بدست می‌آید که برای اولین بار توسط ناویر و استوکس بطور مستقل ارائه گردید:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + S_{Mx}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + S_{My}$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + S_{Mz}$$



شکل ثانی معادلات حاکم بر جریان سیال



(Conservation form of the governing equation of fluid flow)

Governing equations of the flow of a compressible Newtonian fluid

Mass	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$
x-momentum	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{Mx}$
y-momentum	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{My}$
z-momentum	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } w) + S_{Mz}$
Internal energy	$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \text{div}(\rho i \mathbf{u}) = -p \text{div } \mathbf{u} + \text{div}(k \text{grad } T) + \Phi + S_i$
Equations of state	$p = p(\rho, T) \text{ and } i = i(\rho, T)$ <p>e.g. perfect gas $p = \rho R T \text{ and } i = C_v T$</p>



معادلات ناور-استوکس (Navier-Stokes equations)



تمامی تنش‌های لزج در معادله انرژی با معادله استهلاک Φ توصیف می‌شود که پس از یک سری عملیات عبارتست از:

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\text{div } \mathbf{u})^2$$



معادلات حاکم بر جریان آب در محیط‌های متخلخل

معادلات حاکم بر جریان آب در محیط‌های متخلخل (همانند خاک)، از ترکیب معادله پیوستگی جریان در این محیط‌ها با معادله داریسی حاصل می‌شوند:

❖ معادله داریسی:

$$q = -ki = -k \frac{\Delta H}{L}$$

در این معادله :

q: دبی جریان در واحد سطح

K: هدایت هیدرولیکی محیط متخلخل (ضریب آبگذری)

i: شیب هیدرولیکی

H: بار کل در هر نقطه از محیط متخلخل

ΔH : اختلاف بار کل در دو نقطه از مسیر جریان

L: طول مسیر جریان (بین دو نقطه)



معادله داری



H: بار کل در هر نقطه از محیط متخلخل عبارتست از:

$$H = h_e + h_p + h_z + h_m$$

$h_e = V^2/2g$: پتانسیل جنبشی است که با توجه به سرعت بسیار کند آب در محیط‌های متخلخل معمولاً صرف‌نظر می‌شود.

$h_p = P/\gamma$: پتانسیل فشاری است که برابر ارتفاع آب در پیژومتر نصب شده در نقطه مورد نظر است.

h_z : پتانسیل ثقلی است که برابر فاصله نقطه مورد نظر از یک سطح مبنای فرضی است.

h_m : پتانسیل ماتریک و وابسته به جذب سطحی ذرات است که در محیط‌های متخلخل اشباع برابر صفر و در غیر اشباع با استفاده از تانسومتر قابل اندازه‌گیری است.



معادله پیوستگی در محیط‌های متخلخل



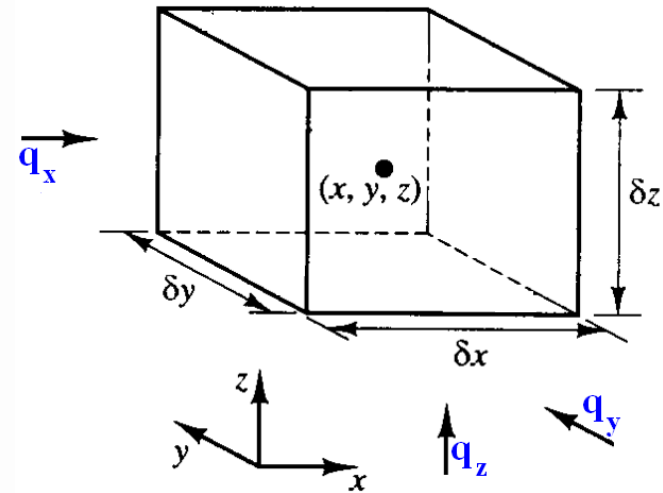
❖ معادله پیوستگی:

$$Q_{x(in)} - Q_{x(out)} = q_x \delta_y \delta_z - \left[q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \delta_x \right] \delta_y \delta_z$$

$$= -\frac{\partial q_x}{\partial x} \delta_x \delta_y \delta_z$$

$$Q_{y(in)} - Q_{y(out)} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} \delta_x \delta_y \delta_z$$

$$Q_{z(in)} - Q_{z(out)} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} \delta_x \delta_y \delta_z$$



$$\text{تغییرات حجم آب در المان (در مدت زمان } \delta t \text{)} = - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \delta_x \delta_y \delta_z$$



معادله پیوستگی در محیط‌های متخلخل



$$\left. \begin{aligned} \text{تغییرات حجم آب در المان (در مدت زمان } \delta t) &= - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \delta_x \delta_y \delta_z \\ \text{نرخ تغییرات رطوبت در حجم مورد نظر} &= \frac{\partial \theta_v}{\partial t} \delta_x \delta_y \delta_z \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta_v}{\partial t} \delta_x \delta_y \delta_z = - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \delta_x \delta_y \delta_z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta_v}{\partial t} = - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right]$$



معادلات ریچارد و لاپلاس (Richard & Laplace equations)



مطابق معادله داری در محیط غیر همگن و غیر ایزوتروپ

$$q_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \quad q_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y}, \quad q_z = -k_z \frac{\partial H}{\partial z}$$

با ترکیب معادله همبستگی و داری خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right)$$

معادله ریچارد

در محیط همگن و ایزوتروپ \Rightarrow

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right)$$

در محیط همگن، ایزوتروپ و اشباع \Rightarrow

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0$$

معادله لاپلاس



دسته بندی معادلات دیفرانسیل پاره ای



❖ معادلات دیفرانسیل پاره ای خطی:

ضریب متغیر وابسته و مشتق های آن در معادله وجود ندارد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$$

همانند: معادله موج یک بعدی؛

❖ معادلات دیفرانسیل پاره ای غیر خطی:

حاصل ضرب متغیرهای وابسته یا مشتق های آن در معادله وجود دارد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x}$$

همانند: معادله غیر لزج برگرز (Burgers)؛



دسته بندی معادلات دیفرانسیل پاره ای مرتبه دوم

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0$$

➤ معادلات بیضوی (Elliptic equ.): $(B^2 - 4AC < 0)$

✓ منحنی مشخصه واقعی ندارند، به طوری که اغتشاش ایجاد شده در نقطه اختیاری در همه سو منتشر می شود.

✓ با داشتن شرایط مرزی یگانه جواب در داخل قلمرو حل به دست می آید.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

✓ همانند: معادله لاپلاس؛



دسته بندی معادلات دیفرانسیل پاره ای مرتبه دوم

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0$$

➤ معادلات سهموی (Parabolic Equ.): $(B^2 - 4AC = 0)$

✓ یک منحنی مشخصه وجود دارد.

✓ با داشتن توابع اولیه متغیر وابسته (شرایط اولیه) و دو دسته شرایط مرزی جواب در داخل قلمرو حل به دست می آید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

✓ همانند: معادله انتشار لزجت؛



دسته بندی معادلات دیفرانسیل پاره ای مرتبه دوم



$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0$$

➤ معادلات هذلولوی (Hyperbolic Equ.): $(B^2 - 4AC > 0)$

✓ دو منحنی مشخصه حقیقی وجود دارد.

✓ با داشتن دو دسته شرایط اولیه و دو دسته شرایط مرزی جواب در داخل قلمرو حل به دست می آید.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

✓ همانند: معادله موج مرتبه دوم؛



✱ حالت دائم (Steady state):

جریانی است که مستقل از زمان بوده و معمولاً با معادلات بیضوی بیان می شوند. نمونه بارز این

معادلات، معادله لاپلاس است:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

✱ حالت غیردائم (Unsteady state):

جریان‌های وابسته به زمان بوده و معمولاً با معادلات سهموی و هذلولوی توصیف می شوند.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$



طبقه بندی رفتار فیزیکی جریان



مسائل انتشار (Diffusion problems)

نمونه بارز معادلات انتشار خالص یا انتشار مولکولی، پخشیدگی یک قطره جوهر رنگی در مایع ساکن است.

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{غلظت جرمی مواد محلول} \\
 & \text{فلاکس جرمی مواد محلول} \\
 & \text{ضریب انتشار مولکولی}
 \end{aligned}
 \right\}
 \begin{aligned}
 & \text{Fick's law} \Rightarrow q_s \propto \frac{\partial c}{\partial x} \Rightarrow q_s = -D \frac{\partial c}{\partial x} \\
 & \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{طبق قانون بقای جرم} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0$$

$$\text{در حالت سه بعدی} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right)$$



مسائل انتشار-انتقال (Convection-Diffusion problems)

در حالت انتشار اگر جریان هم وجود داشته باشد و با فرض سرعت یکسان ذرات محلول یا معلق با سرعت جریان:

$$\left. \begin{aligned}
 q_s &= uc + \left(-D \frac{\partial c}{\partial x}\right) \\
 \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial x} &= 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

انتقال (pointing to uc) and انتشار (pointing to $-D \frac{\partial c}{\partial x}$)

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vc)}{\partial y} + \frac{\partial(wc)}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right)$$

convection (green arrow) and diffusion (blue arrow)



فصل سوم

مبانی اولیہ روش تفاضل ہامی محدود (FDM)



تقریب مشتق مرتبه اول (با استفاده از بسط تیلور)



* تفاضل روبه جلو (پیشرو) *Forward difference*

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i + \dots \quad *$$

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + O(\Delta x)^2 \quad \text{مرتبه فضا (Order of magnitude)}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad \text{فضا از مرتبه اول}$$



تقریب مشتق مرتبه اول



* تفاضل روبه عقب (پسرو) *Backward difference*

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i - \dots \quad **$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + O(\Delta x)^2$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{فقط از مرتبه اول}$$



تقریب مشتق مرتبه اول



* تفاضل مرکزی Central difference

$$** \Rightarrow \phi_{i+1} - \phi_{i-1} = 2\Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right|_i + \dots$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \Rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad \text{فقط از مرتبه دو}$$

تمرین ۳-۱: تقریب مشتق مرتبه اول را با خطای مرتبه بالاتر از ۲ بدست آورید.

تقریب مشتق مرتبه دوم (با استفاده از بسط تیلور)



* تفاضل مرکزی Central difference *

$$** + ** \Rightarrow \phi_{i+1} + \phi_{i-1} = 2\phi_i + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i + 2 \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \Big|_i + \dots$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

تمرین ۲-۳: تقریب مشتق مرتبه دوم را با روش‌های پیشرو و پسرو بدست آوردید.



تقریب مشتق ها



$$u \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

مثال: معادله انتشار-انتقال، روبرو، اگسسته نمایید.

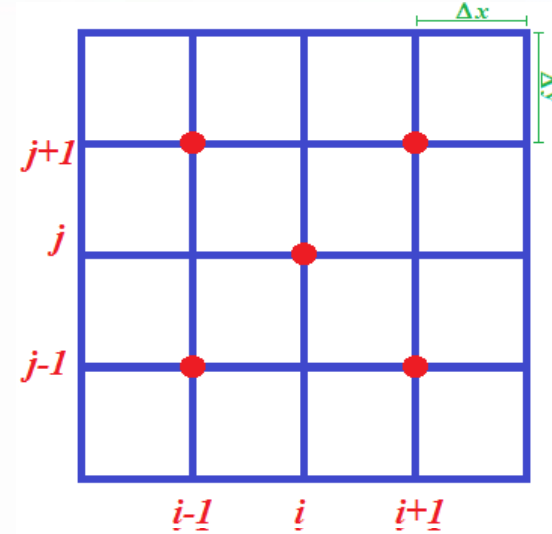
$$u_i \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2\Delta x} = D \frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{2D}{(\Delta x)^2} c_i = -\frac{u_i}{2\Delta x} (c_{i+1} - c_{i-1}) + \frac{D}{(\Delta x)^2} (c_{i+1} + c_{i-1})$$

$$\frac{2D}{(\Delta x)^2} c_i = \left[\frac{D}{(\Delta x)^2} - \frac{u_i}{2\Delta x} \right] c_{i+1} + \left[\frac{D}{(\Delta x)^2} + \frac{u_i}{2\Delta x} \right] c_{i-1}$$



تقریب مشتق‌های پاره‌ای مختلط (با استفاده از بسط تیلور)



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + O(\Delta y)^2$$

$$= \frac{1}{2\Delta y} \left[\frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1}}{2\Delta x} - \frac{\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right] + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

$$= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left[\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1} \right] + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

تمرین ۳-۳: تقریب مشتق پاره‌ای مختلط را با فضای مرتبه اول نسبت به Δx و Δy بدست آورید.



فصل چہارم

کستہ سازی معادلات مجموعی

(FDM)



گسسته‌سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

معمولا زمان را باروش تفاضل پیشرو گسسته‌سازی می‌کنند.

n: سطح زمانی فعلی

n+1: سطح زمانی بعدی

فاصله زمانی: Δt

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_i = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

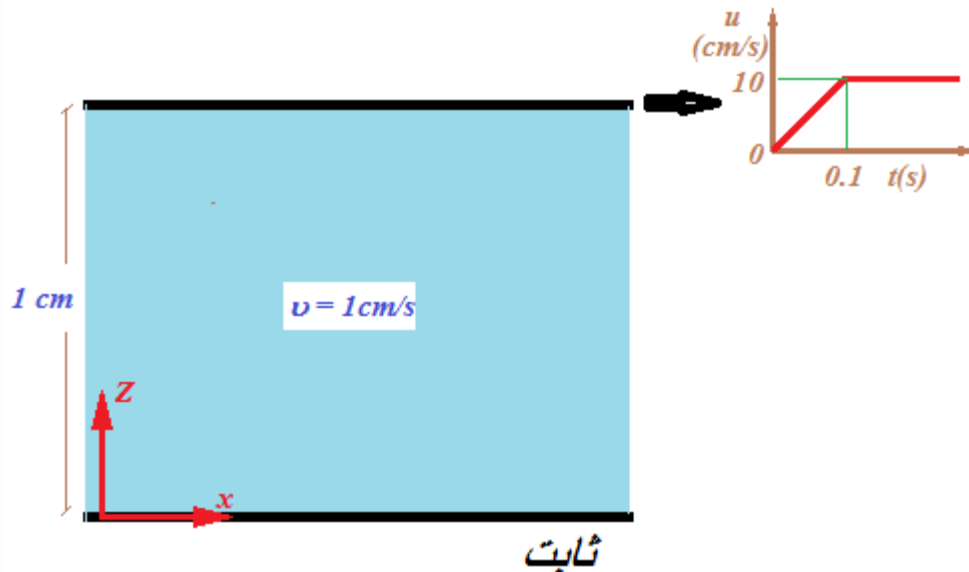


کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



روش های مختلف با یک مسئله تشریح می گردد.

مثال: سیالی با ضخامت 1cm بین دو صفحه بزرگ قرار دارد. صفحه پایین ثابت و صفحه بالائی مطابق نمودار زیر از حالت سکون به سرعت ثابت 10cm/s پس از 0.1s می رسد. مطلوبست توزیع سرعت سیال.





کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



یافتن معادله حاکم با استفاده از معادلات ناویر-استوکس:

$$u \neq 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + S_{Mx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \neq 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad S_{Mx} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$



گستره سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



Initial con.: $t=0 \Rightarrow u=0$

Boundary con.: $z=0 \Rightarrow u=0$

$z=h \Rightarrow u=0$ مطابق نمودار

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

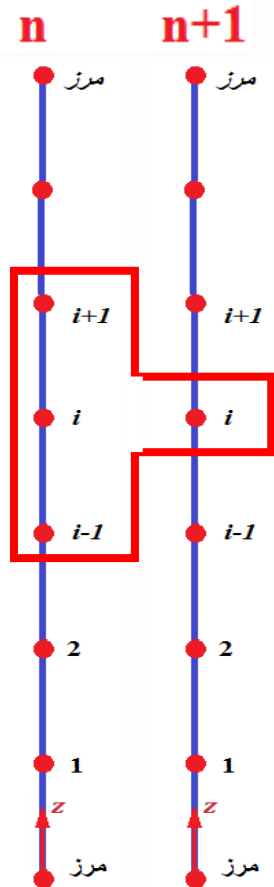
معمولا مشتق زمانی با تفاضل پیشرو گستره می شود:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \left[\frac{u_{i+1}^p - 2u_i^p + u_{i-1}^p}{(\Delta z)^2} \right] + O[(\Delta t), (\Delta z)^2]$$

P می تواند **n** یا **n+1** یا ترکیبی از آن باشد که روش های مختلف حصول می گردد.



کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

*** روش صریح Explicit Method**
P=n

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta z)^2} \right]$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} u_{i+1}^n + \left[1 - \frac{2\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} \right] u_i^n + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} u_{i-1}^n$$

نکته: این روش پایدار مشروط است. انتظار داریم وقتی در سطح n مقادیر متغیر در گره اصلی و در دو گره همسایه آن افزایش می یابند، در سطح $n+1$ نیز مقدار تابع افزایش یابد لذا لازم است ضرایب معادله فوق مثبت باشند یعنی:

$$1 - \frac{2\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} > 0 \Rightarrow \Delta t < \frac{(\Delta z)^2}{2\nu}$$



کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



حل مسئله (روش صریح):

$$v = 1 \text{ cm}^2/s, \quad \Delta t = 0.01s < \frac{(\Delta z)^2}{2v} \Rightarrow \Delta z > \sqrt{0.02} \Rightarrow \Delta z > 0.14 \rightarrow \Delta z = 0.2 \text{ cm}$$

$$u_i^{n+1} = 0.25 u_{i-1}^n + 0.5 u_i^n + 0.25 u_{i+1}^n$$

i	t z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
		شرط اولیه										
مرز	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0.8	0	0	0.2500	0.6250	1.0781	1.5859	2.1348	2.7158	3.3231	3.9521	4.5997
3	0.6	0	0	0	0.0625	0.1875	0.3672	0.5938	0.8606	1.1624	1.4946	1.8539
2	0.4	0	0	0	0	0.0156	0.0547	0.1201	0.2124	0.3308	0.4740	0.6403
1	0.2	0	0	0	0	0	0.0039	0.0156	0.0378	0.0720	0.1187	0.1779
مرز	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



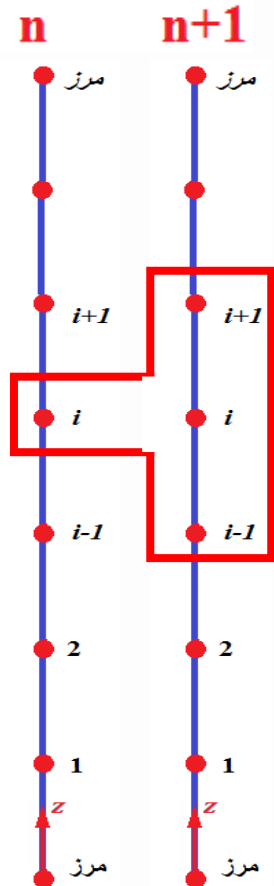
* روش ضمنی *Implicit Method*

P=n+1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} \right]$$

$$\left[1 + \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta z)^2} \right] u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta z)^2} u_{i+1}^{n+1} + \frac{\nu\Delta t}{(\Delta z)^2} u_{i-1}^{n+1}$$



نکته: این روش پایدار بدون قید و شرط است.



کسب‌سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



آنالیز حساسیت (*Sensitivity Analysis*):

با وجود پایداری بدون قید و شرط، روش ضمنی یا سایر روش‌ها، اما نمی‌توان

هر Δt بزرگی را در نظر گرفت زیرا دقت را پایین می‌آورد، با این وجود Δt

فیلی کوچک نیز هزینه زمانی انجام محاسبات را بالا می‌برد؛ لذا لازم است

حساسیت نسبی نسبت به بازه زمانی یا هر پارامتر موثر دیگر همانند Δx و ...

انجام شود. به عنوان نمونه باید Δt را تا حدی کوچک کرد که دیگر با کوچکتر

کردن آن تغییر معنی‌داری در جواب مشاهده نشود.



کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



$$\nu = 1 \text{ cm}^2/\text{s}, \quad \Delta t = 0.01 \text{ s}, \quad \Delta z = 0.2 \text{ cm}$$

حل مسئله (روش ضمنی):

$$\frac{\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} u_{i-1}^{n+1} - \left[1 + \frac{2\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} \right] u_i^{n+1} + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} u_{i+1}^{n+1} = -u_i^n$$

شکل کلی معادلات $a_i u_{i-1}^{n+1} + b_i u_i^{n+1} + c_i u_{i+1}^{n+1} = d_i \Rightarrow \begin{cases} a_i = 0.25 \\ b_i = -1.5 \\ c_i = 0.25 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{گره ۱} \quad 0.25u_0^1 - 1.5u_1^1 + 0.25u_2^1 = -u_1^0 \\ \text{گره ۲} \quad 0.25u_1^1 - 1.5u_2^1 + 0.25u_3^1 = -u_2^0 \\ \text{گره ۳} \quad 0.25u_2^1 - 1.5u_3^1 + 0.25u_4^1 = -u_3^0 \\ \text{گره ۴} \quad 0.25u_3^1 - 1.5u_4^1 + 0.25u_5^1 = -u_4^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c|c} -1.5 & 0.25 & 0 & 0 & u_1^1 & 0 \\ 0.25 & -1.5 & 0.25 & 0 & u_2^1 & 0 \\ 0 & 0.25 & -1.5 & 0.25 & u_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & -1.5 & u_4^1 & -0.25 \end{array}$$

ماتریس سه قطری Tridiagonal Matrix



کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



حل دستگاه معادلات با استفاده از روش توماس (ماتریس ضرایب سه قطری):

i	t Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
		شرط اولیه										
مرز	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0.8	0	0.172	?	?	?	?	?	?	?	?	?
3	0.6	0	0.0296	?	?	?	?	?	?	?	?	?
2	0.4	0	0.00509	?	?	?	?	?	?	?	?	?
1	0.2	0	0.00085	?	?	?	?	?	?	?	?	?
مرز	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

تمرین ۴-۱: بقیه جدول فوق را تکمیل نمایید و نتایج را با روش صریح مقایسه کنید.

برای هر دو روش صریح و ضمنی آنالیز حساسیت انجام دهید.



کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



* روش نیمه ضمنی *Semi-Implicit Method*

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \left[\frac{u_{i+1}^p - 2u_i^p + u_{i-1}^p}{(\Delta z)^2} \right] \leftarrow u_i^p = \alpha u_i^n + (1 - \alpha) u_i^{n+1}$$

* روش کرانک-نیکلسون *Crank-Nicholson Method*

$$\alpha = 0.5$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \left[\frac{(u_{i+1}^n + u_{i+1}^{n+1}) / 2 - 2(u_i^n + u_i^{n+1}) / 2 + (u_{i-1}^n + u_{i-1}^{n+1}) / 2}{(\Delta z)^2} \right]$$

$$\left[1 + \frac{\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} \right] u_i^{n+1} = \left[1 - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta z)^2} \right] u_i^n + \frac{\nu \Delta t}{2(\Delta z)^2} [u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}] + \frac{\nu \Delta t}{2(\Delta z)^2} [u_{i+1}^n + u_{i-1}^n]$$

تمرین ۴-۲: پایداری این روش را بررسی کنید و مسئله ۴-۱ را با این روش نیز حل نمایید.



- روش ریچاردسون *Richardson Method*

تاکنون مشتق زمانی به صورت پیشرو و با فضای مرتبه اول نسبت به زمان گستره شد؛
ریچاردسون روش افتلاف مرکزی را که دارای فضای مرتبه دوم نسبت به زمان است به کار گرفت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} = D \left[\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^{n-1} + \frac{2D\Delta t}{(\Delta x)^2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)$$

این روش همواره ناپایدار است، و بنابراین هیچ ارزش عملی ندارد.



- روش دو فوریت-فرانکل *Dufort-Frankel Method*

برای ملاحظات پایداری روش ریپار دسون، پیشنهاد شد عبارت ϕ_i^n در جمله انتشار با متوسط مقادیر ϕ_i^{n+1} و ϕ_i^{n-1} جایگزین گردد:

$$\phi_i^n = \frac{\phi_i^{n+1} + \phi_i^{n-1}}{2}$$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2\Delta t} = D \left[\frac{\phi_{i+1}^n - (\phi_i^{n+1} + \phi_i^{n-1}) + \phi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$$

$$\phi_i^{n+1} = \left(\frac{2S}{1+2S} \right) (\phi_{i-1}^n + \phi_{i+1}^n) + \left(\frac{1-2S}{1+2S} \right) \phi_i^{n-1} \quad \leftarrow \quad S = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

این روش بی قید و شرط پایدار است.



کسته سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



معادلات دیفرانسیل سهمی دوبعدی (روش صریح):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = D \left[\frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + O[(\Delta t), (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

نکته: این روش پایدار مشروط است (با استفاده از روش پایداری وان-نیون):

$$\frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}$$



کسسه سازی معادلات سهموی (اعمال زمان در معادله)



معادلات دیفرانسیل سهمی دوبعدی (روش ضمنی):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = D \left[\frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] + O[(\Delta t), (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

نکته: ماتریس ۵ قطری می شود که با استفاده از روش های فاص **CFD** قابل حل است.

تمرین: پایداری بررسی شود.



فصل پنجم

تخلیص ماییداری



تحلیل پایداری به روش ون-نومن

۱- معادلات می بایست فطی شده باشند.

۲- شرایط مرزی را در نظر نمی گیرد، لذا شرط پایداری بصورت موضعی است.

۳- متداول ترین روش است.

۴- بر اساس سری فوریه به شکل زیر، تمامی مقادیر Φ در گره مشفص و سطح زمانی مشفص، به مقدار دامنه در آن سطح زمانی تبدیل می گردد.

$$\phi_i^n = \phi^n e^{IP(\Delta x)i}$$

$$I = \sqrt{-1}$$

P عدد موج در جهت x

$$\theta = P(\Delta x) \text{ زاویه فاز}$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_i^n = \phi^n e^{IP(\Delta x)i} \\ I = \sqrt{-1} \\ P \text{ عدد موج در جهت } x \\ \theta = P(\Delta x) \text{ زاویه فاز} \end{array} \right\} \rightarrow \phi_i^n = \phi^n e^{I\theta i}$$

۵- پس از ساده سازی به معادله $\phi^{n+1} = G\phi^n$ رسیده و در آن باید قدر مطلق G که ضریب تقویت نام دارد کوچکتر یا مساوی ۱ باشد که همان شرط پایداری است.



تخلیل پایداری به روش ون-نومن

مثال یک بعدی:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right]$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad d = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad \text{عدد انتشار}$$

$$u^{n+1} e^{I\theta i} = u^n e^{I\theta i} + d(u^n e^{I\theta(i+1)} - 2u^n e^{I\theta i} + u^n e^{I\theta(i-1)})$$

$$/ e^{I\theta i} \Rightarrow u^{n+1} = u^n + d(u^n e^{I\theta} - 2u^n + u^n e^{-I\theta})$$

$$\rightarrow u^{n+1} = u^n [1 + d(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2)]$$

$$\cos \theta = \frac{e^{I\theta} + e^{-I\theta}}{2} \Rightarrow u^{n+1} = u^n [1 + 2d(\cos \theta - 1)] \Rightarrow u^{n+1} = Gu^n$$



تخلیل پایداری به روش ون-نومن

$$\text{شرط پایداری} \rightarrow |G| \leq 1$$

$$\Rightarrow |1 - 2d(1 - \cos \theta)| \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - 2d(1 - \cos \theta) \leq 1 & \text{همیشه برقرار است.} \\ 1 - 2d(1 - \cos \theta) \geq -1 & \text{کوچکترین مقدار سمت چپ به ازای } \cos \theta = -1 \text{ است.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 - 4d \geq -1 \Rightarrow d \leq 1/2 \Rightarrow \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$



تخلیل پیداری به روش ون-نومن

مثال دو بعدی:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rightarrow \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = D \left[\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right]$$

$$\rightarrow u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + d_x (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + d_y (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)$$

$$u_{i,j}^n = u^n e^{IP(\Delta x)i} e^{Iq(\Delta y)j} \rightarrow u_{i,j}^n = u^n e^{I(\theta i + \phi j)}$$

$$u^{n+1} e^{I(\theta i + \phi j)} = u^n e^{I(\theta i + \phi j)}$$

$$+ d_x (u^n e^{I[\theta(i+1) + \phi j]} - 2u^n e^{I(\theta i + \phi j)} + u^n e^{I[\theta(i-1) + \phi j]})$$

$$+ d_y (u^n e^{I[\theta i + \phi(j+1)]} - 2u^n e^{I(\theta i + \phi j)} + u^n e^{I[\theta i + \phi(j-1)]})$$



تخلیل پایداری به روش ون-نومن

$$/ e^{I(\theta i + \phi j)} \Rightarrow u^{n+1} = u^n \left[1 + d_x (e^{I\theta} - 2 + e^{-I\theta}) + d_y (e^{I\phi} - 2 + e^{-I\phi}) \right]$$

$$\Rightarrow u^{n+1} = u^n \left[1 + 2d_x (\cos \theta - 1) + 2d_y (\cos \phi - 1) \right] \Rightarrow u^{n+1} = Gu^n$$

شرط پایداری $\rightarrow |G| \leq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2d_x (\cos \theta - 1) + 2d_y (\cos \phi - 1) \leq 1 & \text{همیشه برقرار است.} \\ 1 + 2d_x (\cos \theta - 1) + 2d_y (\cos \phi - 1) \geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2d_x + 2d_y \leq 1 \Rightarrow d_x + d_y \leq 1/2 \Rightarrow \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2}$$



فصل ششم

کست سازی معادلات میٹری (FDM)



گستره سازی معادلات بیضوی



نمونه بارز این دسته معادلات معادله لاپلاس است، که حالت دوبعدی آن بررسی خواهد شد.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

معادله به صورت مرکزی در راستای \mathbf{x} و \mathbf{y} گستره می شود:

$$\frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

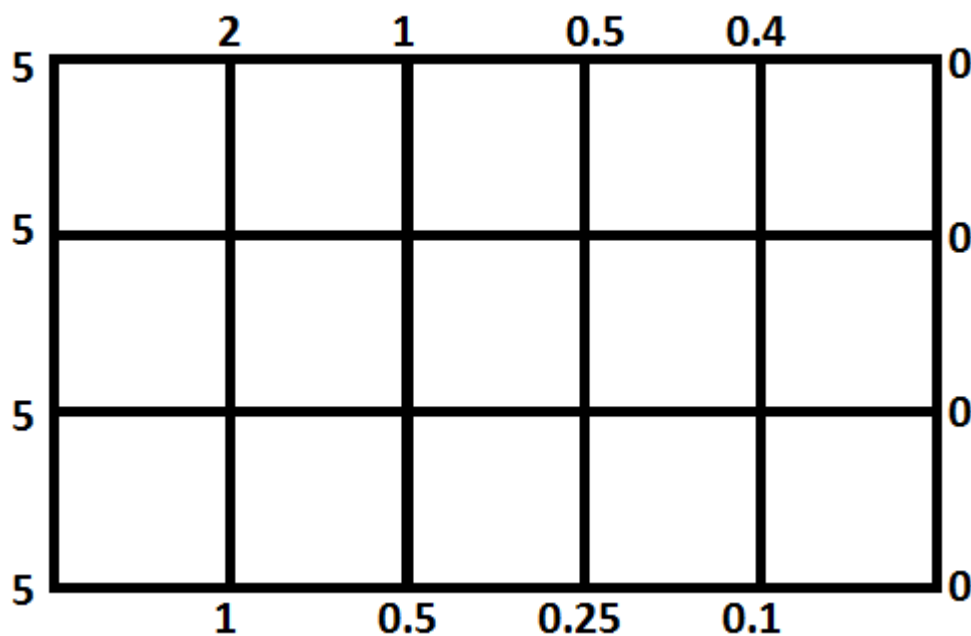
$$\text{if } \Delta x = \Delta y \Rightarrow h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}}{4}$$



کسته سازی معادلات پیضوی



تمرین ۶-۱: با توجه به مشخص بودن هد هیدرولیکی در مرزهای شکل زیر (شرایط مرزی دریشه)، هد هیدرولیکی را در سایر گره‌ها مناسبه نمایید.





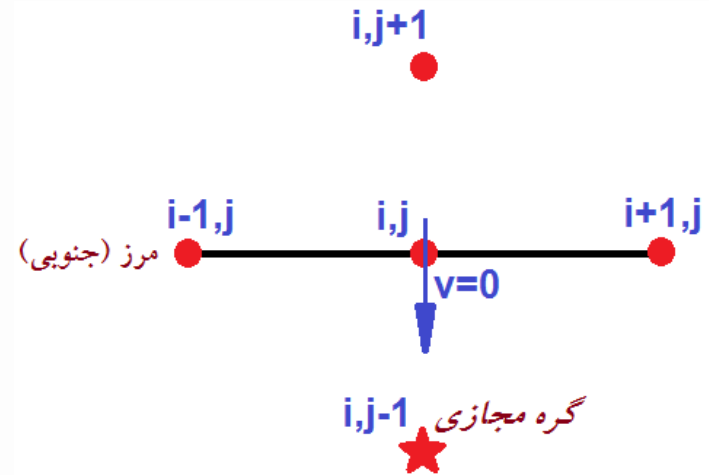
کسته سازی معادلات یضوی



به کارگیری شرایط مرزی نیومن:

$$k_y \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

* عدم عبور جریان از مرز (نمونه مرز جنوبی):



$$k_y \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0$$

$$\Rightarrow h_{i,j-1} = h_{i,j+1}$$

$$h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}}{4}$$

$$\Rightarrow h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + 2h_{i,j+1}}{4}$$



کسته سازی معادلات یضوی

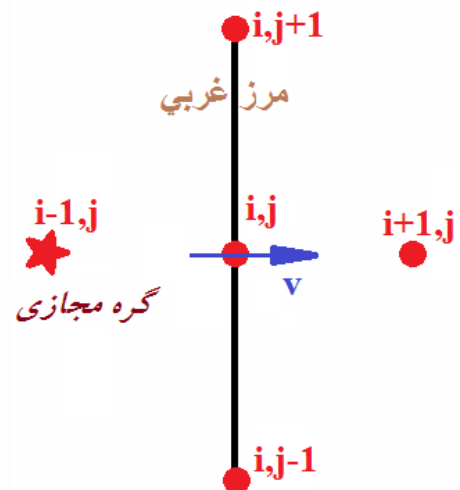


به کارگیری شرایط مرزی نیومن:

* عبور جریان مشخص از مرز (نمونه مرز غربی):

$$k_x \frac{\partial h}{\partial x} = V$$

$$k_x \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} = V$$



$$\Rightarrow h_{i-1,j} = h_{i+1,j} - \frac{2\Delta x V}{k_x}$$

$$h_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}}{4}$$

$$\Rightarrow h_{i,j} = \frac{2h_{i+1,j} - \frac{2\Delta x V}{k_x} + h_{i,j+1} + h_{i,j-1}}{4}$$



فصل ہفتم

گستہ سازی معادلات ہڈولومی (FDM)



کسته سازی معادلات مذلولوی



$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

روش FTCS اویلر:

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + u_i \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

بی قید و شرط ناپایدار است

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + u_i \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{\Delta x} = 0$$

روش FTFS اویلر:

بی قید و شرط ناپایدار است

روش جهشی نقطه میانی (Midpoint Leapfrog):

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

شرط پایداری $c = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ عدد کورانت



گستره سازی معادلات هزلولوی



$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

روش بالادست (Upwind):

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u_i \frac{C_i^P - C_{i-1}^P}{\Delta x} = 0$$

مکانی به صورت پسرو تقریب زده می شود.

تمرین ۷-۱: پایداری این روش را برای هر دو حالت صریح و ضمنی بررسی کنید.

تذکر: گستره سازی معادلات هزلولوی بسیار گسترده است و دارای مباحث و نکات مفصل است، اما در اینجا به همین اندازه بسنده می شود و به طور کامل در روش اجسام محدود به آن پرداخته می شود که عینا در روش تفاضل محدود نیز قابل به کارگیری است.



فصل ہشتم

مبانی اولیہ روش حجم محدود (FVM)



شکل دیفرانسیلی و انتگرالی معادله کلی جریان

درک معادله کلی جریان نقطه آغازی برای روش‌های محاسباتی در حجم کنترل است.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$$

متغیر کلی با کمیت مقیاسی ضریب انتشار

نرخ افزایش ϕ در المان نرخ خالص جریان ϕ خروجی از المان نرخ افزایش ϕ ناشی از انتشار نرخ افزایش ϕ ناشی از چشمه‌ها

گام کلیدی روش حجم محدود، انتگرال گیری از معادله روی حجم کنترل است.

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV$$



شکل دیفرانسیلی و انتگرالی معادله کلی جریان

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u})dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi)dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

قضیه دایورژنس گوس (Gauss divergence theorem):

$$\int_{CV} \text{div } \mathbf{a}dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}dA$$

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$ از نظر فیزیکی عبارت است از مولفه بردار \mathbf{a} در جهت بردار \mathbf{n} که عمود بر سطح المان dA می باشد.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho\phi dV \right)}_{\text{نرخ افزایش } \Phi} + \underbrace{\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u})dA}_{\substack{\text{نرخ خالص کاهش} \\ \Phi \text{ به دلیل جابجائی} \\ \text{عرضی مرزها}}} = \underbrace{\int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi)dA}_{\substack{\text{نرخ افزایش } \Phi \text{ به دلیل} \\ \text{انتشار عرض مرزها}}} + \underbrace{\int_{CV} S_\phi dV}_{\substack{\text{نرخ خالص} \\ \Phi \text{ تولید}}}$$



شکل دیفرانسیلی و انتگرالی معادله کلی جریان



$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho \phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

در شرایط دائم جریان:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{ grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

در شرایط غیر دائم روی یک فاصله کوتاه زمانی نیز نسبت به زمان انتگرال گرفته می شود:

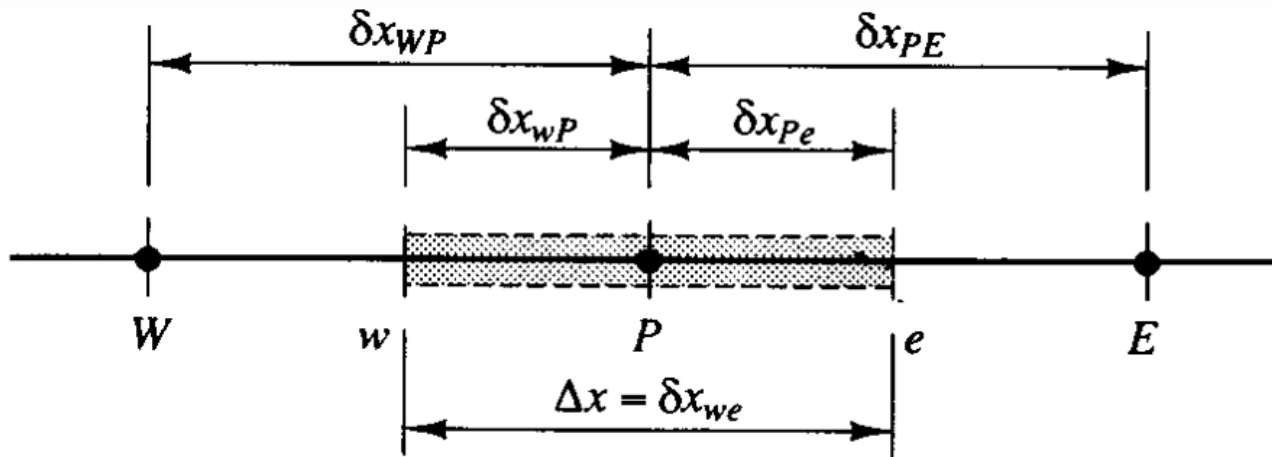
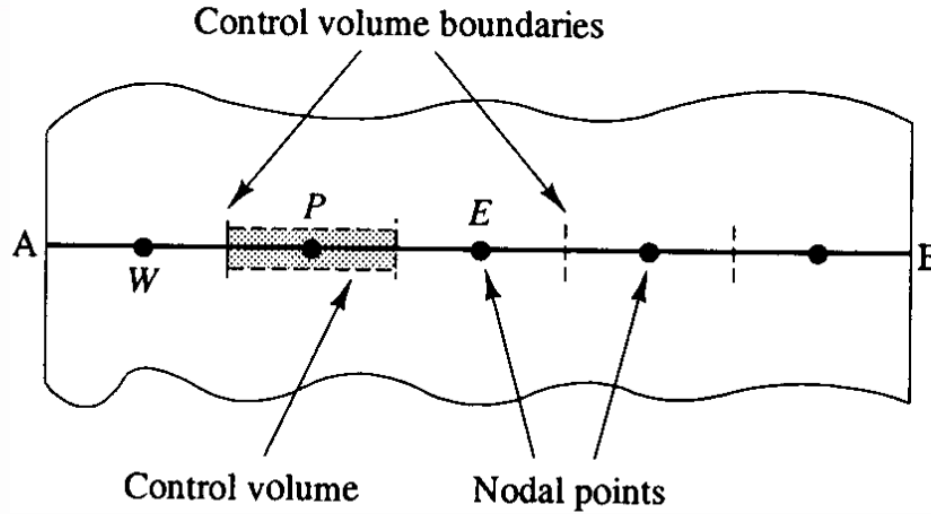
$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} (\rho \phi) dV \right) dt + \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA dt$$

$$= \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma_\phi \text{ grad } \phi) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{CV} S_\phi dV dt$$



قدم اول: تولید شبکه

یک بعدی

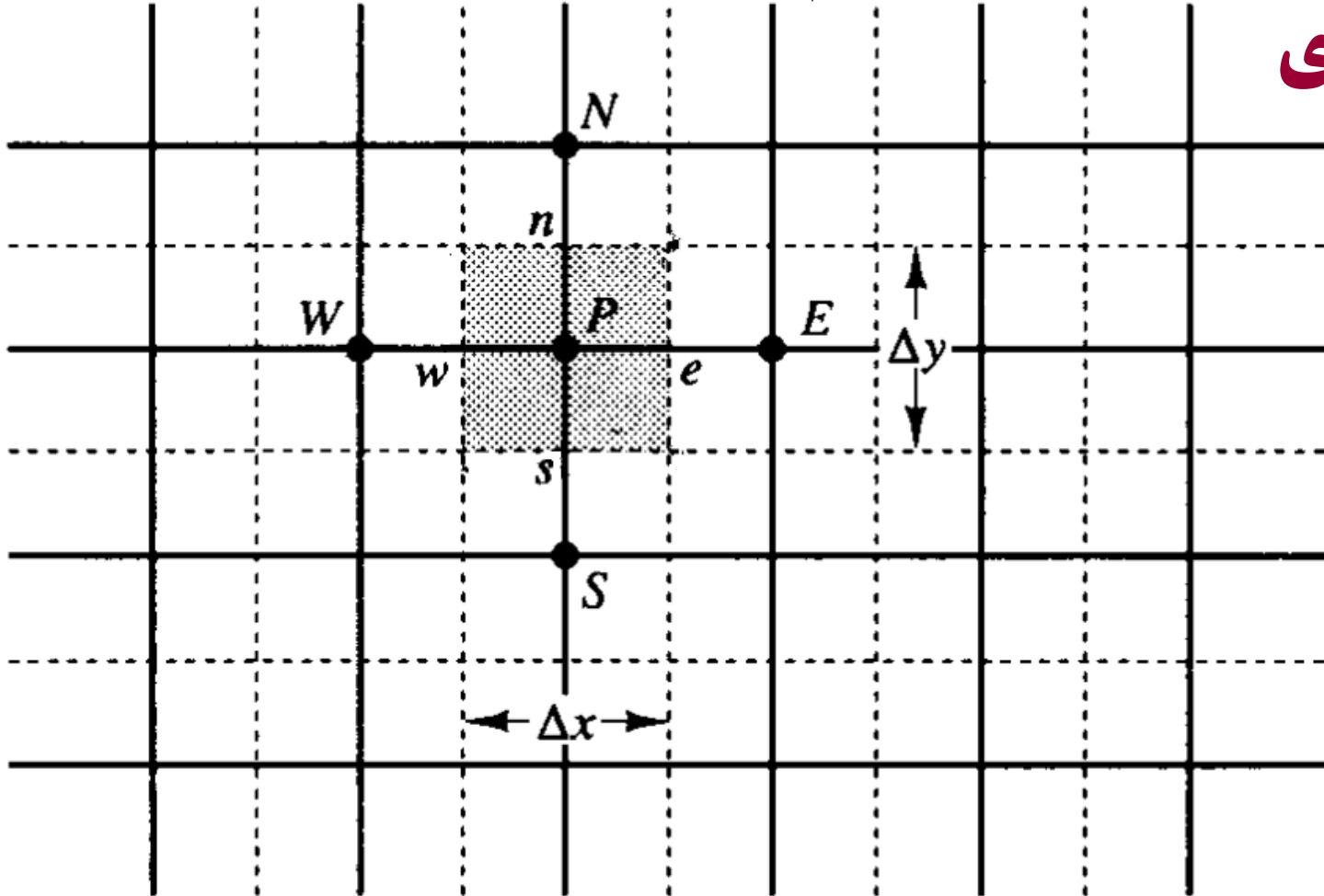




قدم اول: تولید شبکه



دو بعدی



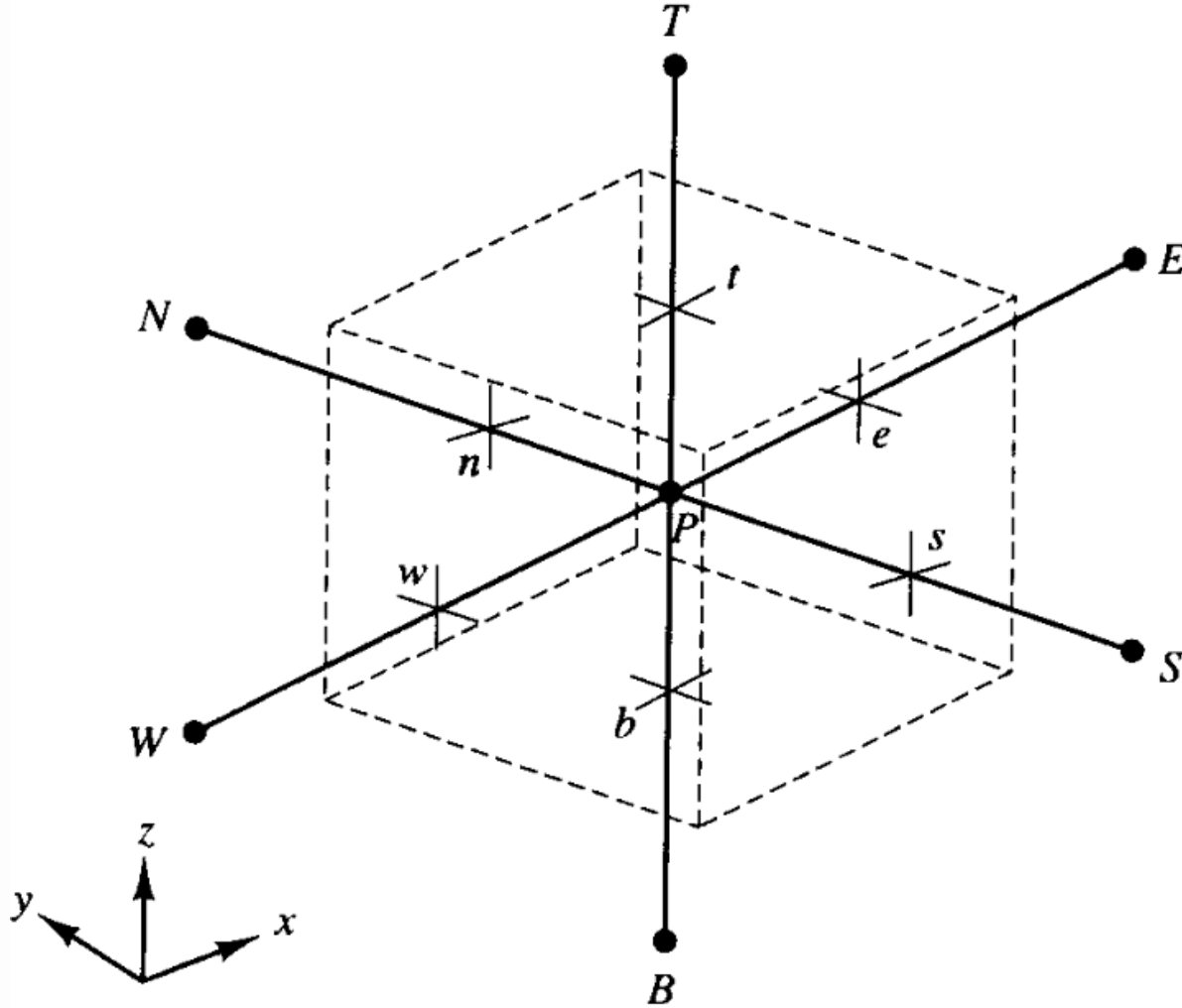
A part of the two-dimensional grid



قدم اول: تولید شبکه



سه بعدی



A cell in three dimensions and neighbouring nodes



قدم دوم: گسسته سازی



قدم اصلی در روش حجم محدود، انتگرال گیری از معادله یا

معادلات حاکم روی یک حجم کنترل، برای رسیدن به یک

معادله گسسته جبری خطی در نقطه گرهی P می باشد.

این بخش در فصول بعدی بصورت مفصل بحث خواهد شد.



قدم سوم: حل معادلات گسسته



معادله گسسته در هر یک از نقاط گرهی (نودها) به منظور حل مسئله بکار می‌رود.

برای حجم‌های کنترل که در همسایگی مرزهای ناحیه قرار دارند، معادله گسسته کلی، جهت وارد کردن شرایط مرزی اصلاح می‌شود.

دستگاه معادلات جبری خطی بدست آمده، برای تعیین توزیع خاصیت مجهول در نقاط گرهی حل می‌شود.

هر روش حل ماتریس مناسب، می‌تواند برای انجام این کار استفاده شود.

روش‌های حل ماتریس‌ها که بطور خاص برای روش‌های CFD طراحی شده‌اند در فصول بعدی بحث خواهد شد.



فصل نم

کست سازی مسائل انتشار حالت دائم

باروش حجم محدود (FVM)



کسته سازی مسائل انتشار حالت دائم یک بعدی



رابطه کلی انتشار دائم برای خاصیت Φ در یک ناحیه یک بعدی: $\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0$

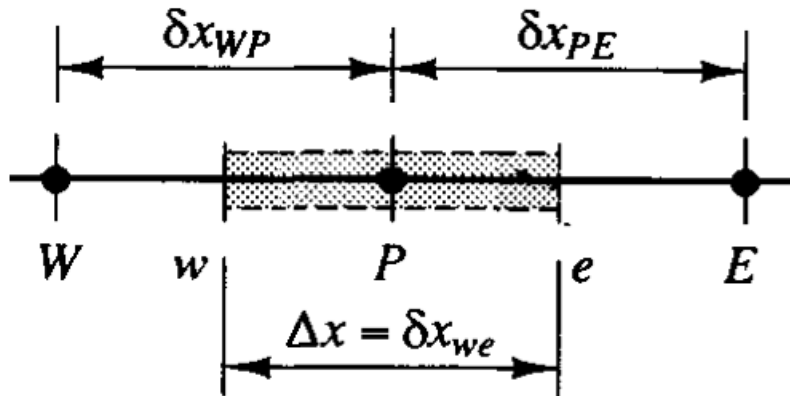
قدم اصلی در FVM : انتگرال از معادله روی حجم کنترل برای رسیدن به معادله کسته در گره P ؛

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0$$

ΔV حجم مربوط به حجم کنترل

A سطح مقطع عرضی مربوط به سطح حجم کنترل

\bar{S} مقدار متوسط چشمه S روی حجم کنترل



معادله فوق نشان می دهد که اختلاف شار انتشار Φ

عبوری از سطح شرقی و عبوری از سطح غربی،

برابر تولید Φ می باشد.



گستره سازی مسائل اشار حالت دائم یک بعدی



توضیح اسلاید قبل:

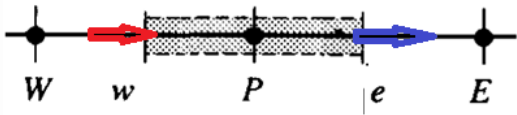
$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0$$

یا

$$\text{div} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0$$

گام کلیدی و به کار بردن قضیه دیورژانس گوس

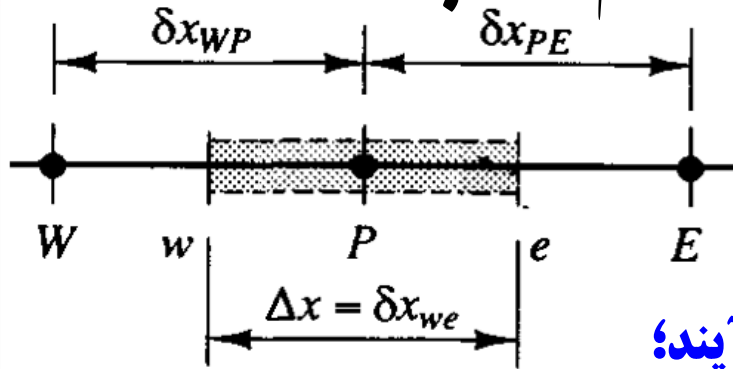
$$\int_{\Delta v} \text{div} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta v} S dV = \int_A n \cdot \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dA + \int_{\Delta v} S dV$$



$$= \Gamma \cdot A \cdot \frac{d\phi}{dx} \Big|_w^e + \bar{S} \Delta V = \left(\Gamma \cdot A \cdot \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \cdot A \cdot \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V$$



گستره سازی مسائل انتشار حالت دائم یک بعدی



$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0$$

برای رسیدن به صورت های مفید معادلات گستره،

لازم است ضرایب انتشار و گرادیان ها در w و e بدست آیند؛

ساده ترین راه برای این منظور تقریب های خطی یا عبارت بهتر روش اختلاف مرکزی است:

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} ; \Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) ; \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right)$$

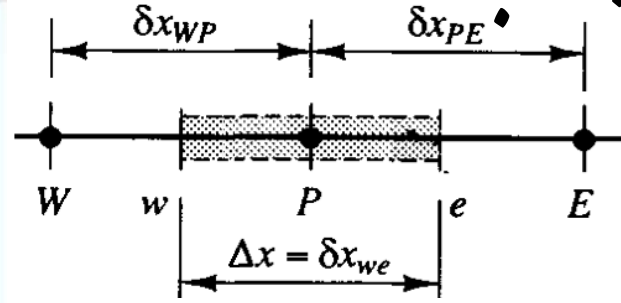
عبارت چشمه نیز بطور معمول به صورت تابعی

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P$$

از متغیر وابسته تقریب زده می شود:



کسته سازی مسائل اشباع حالت دائم یک بعدی



$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0$$

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_p \phi_P) = 0$$

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p \right) \phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E + S_u$$

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$$

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} ; \Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}$$

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P$$

a_W	a_E	a_P
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$a_W + a_E - S_P$



مثال



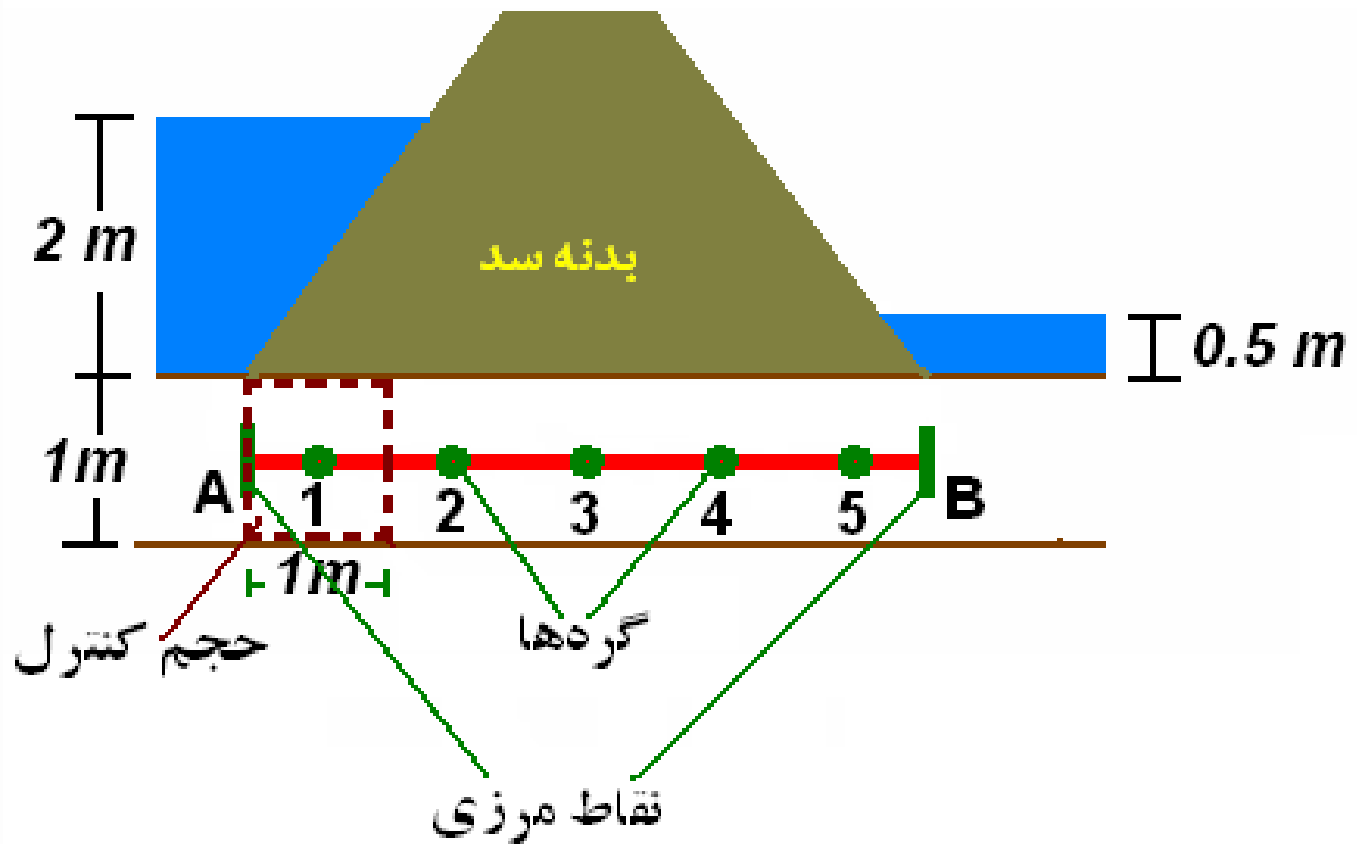
مطلوبست متوسط قائم هدهيدروليكي در لايه رسي در زير سد نشان داده شده در شكل.





حل به روش عددی

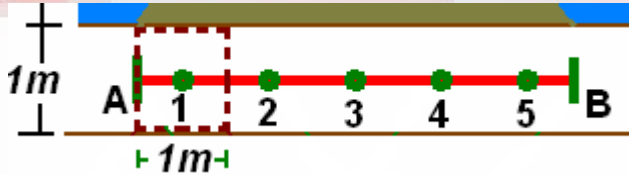
قدم اول: تولید شبکه (یک بعدی)





حل به روش عددی

قدم دوم: گسسته سازی معادله هاکم



$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \int_{\Delta V} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} dV = A_e \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_e - A_w \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_w = 0$$

برای هر یک از گره‌های (nodes) ۲ و ۳ و ۴ که برای مقادیر هد هیدرولیکی مربوط به سمت‌های شرقی و غربی آن از مقادیر گرهی (nodal values) استفاده می‌شود داریم:

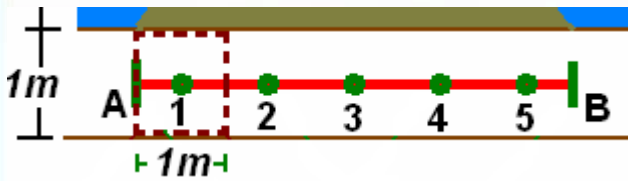
$$A_e \left(\frac{H_E - H_P}{\delta x_{PE}} \right) - A_w \left(\frac{H_P - H_W}{\delta x_{WP}} \right) = 0$$

$$\left(\frac{A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{A_w}{\delta x_{WP}} \right) H_P = \left(\frac{A_w}{\delta x_{WP}} \right) H_W + \left(\frac{A_e}{\delta x_{PE}} \right) H_E$$

۱۰۳



حل به روش عددی



$$\left(\frac{A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{A_w}{\delta x_{WP}} \right) H_p = \left(\frac{A_w}{\delta x_{WP}} \right) H_w + \left(\frac{A_e}{\delta x_{PE}} \right) H_E$$

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E + S_u$$

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_p$$

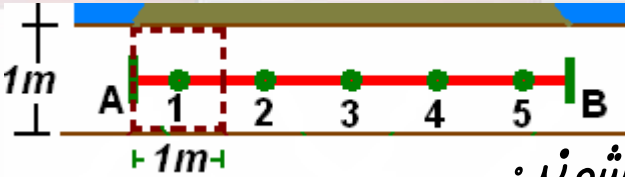
a_w	a_E	a_p
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$a_w + a_E - S_p$

nodes	a_w	a_E	a_p
	$\frac{A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{A_e}{\delta x_{PE}}$	$a_w + a_E - 0$
2	1	1	2
3	1	1	2
4	1	1	2



حل به روش عددی

گره‌های ۱ و ۵ به عنوان گره‌های مرزی



(boundary nodes) به صورت فاص بررسی می شوند:

$$A_e \left(\frac{H_E - H_P}{\delta x_{PE}} \right) - A_A \left(\frac{H_P - H_A}{\delta x_{AP}} \right) = 0$$

$$\left(\frac{A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{A_A}{\delta x_{AP}} \right) H_P = \left(\frac{A_e}{\delta x_{PE}} \right) H_E + \left(\frac{A_A}{\delta x_{AP}} \right) H_A$$

	a_w	a_E	S_u	S_p	a_p
nodes	0	$\frac{A_e}{\delta x_{PE}}$	$\left(\frac{A_A}{\delta x_{AP}} \right) H_A$	$-\frac{A_A}{\delta x_{AP}}$	$a_w + a_E - S_p$
1	0	1	$2H_A = 2 \times 2.5 = 5$	$-1/0.5 = -2$	$0 + 1 + 2 = 3$

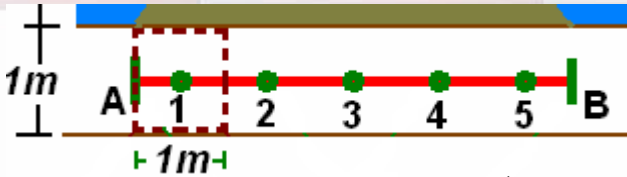
$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E + S_u$$

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_p$$

a_w	a_E	a_p
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$a_w + a_E - S_p$



حل به روش عددی



در گره ۵ →
$$A_B \left(\frac{H_B - H_P}{\delta x_{PB}} \right) - A_w \left(\frac{H_P - H_W}{\delta x_{WP}} \right) = 0$$

$$\left(\frac{A_w}{\delta x_{PW}} + \frac{A_B}{\delta x_{BP}} \right) H_P = \left(\frac{A_w}{\delta x_{PW}} \right) H_W + \left(\frac{A_B}{\delta x_{BP}} \right) H_B$$

	a_w	a_E	S_u	S_p	a_p
nodes	$\frac{A_w}{\delta x_{PW}}$	0	$\left(\frac{A_B}{\delta x_{BP}} \right) H_B$	$-\frac{A_B}{\delta x_{BP}}$	$a_w + a_E - S_p$
5	1	0	$2H_B = 2 \times 1 = 2$	$-1/0.5 = -2$	$1 + 0 + 2 = 3$

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E + S_u$$

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_p$$

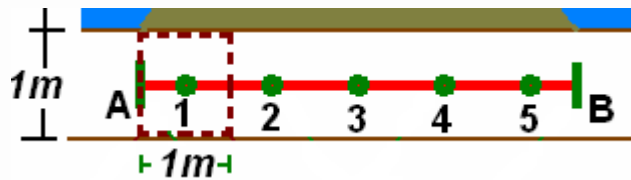
a_w	a_E	a_p
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$a_w + a_E - S_p$

۱۰۶



حل به روش عددی

nodes	a_w	a_E	S_u	S_p	a_p
1	0	1	5	-2	3
2	1	1	0	0	2
3	1	1	0	0	2
4	1	1	0	0	2
5	1	0	2	-2	3



$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E + S_u$$

$$3H_1 = 0 + 1H_2 + 5$$

$$2H_2 = 1H_1 + 1H_3$$

$$2H_3 = 1H_2 + 1H_4$$

$$2H_4 = 1H_3 + 1H_5$$

$$3H_5 = 1H_4 + 0 + 2$$



حل به روش عددی



قدم سوم: حل معادلات گسسته

$$3H_1 = 0 + 1H_2 + 5$$

$$2H_2 = 1H_1 + 1H_3$$

$$2H_3 = 1H_2 + 1H_4$$

$$2H_4 = 1H_3 + 1H_5$$

$$3H_5 = 1H_4 + 0 + 2$$



$$3H_1 - 1H_2 = 5$$

$$-1H_1 + 2H_2 - 1H_3 = 0$$

$$-1H_2 + 2H_3 - 1H_4 = 0$$

$$-1H_3 + 2H_4 - 1H_5 = 0$$

$$-1H_4 + 3H_5 = 2$$



حل به روش عددی

$$3H_1 - 1H_2 = 5$$

$$-1H_1 + 2H_2 - 1H_3 = 0$$

$$-1H_2 + 2H_3 - 1H_4 = 0$$

$$-1H_3 + 2H_4 - 1H_5 = 0$$

$$-1H_4 + 3H_5 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$-1H_4 + 3H_5 = 2 \Rightarrow H_5 = \frac{H_4}{3} + \frac{2}{3}$$

$$-1H_3 + 2H_4 - 1H_5 = 0 \Rightarrow H_4 = \frac{H_5 + H_3}{2}$$

با استفاده از روش حذفی گوس

$$\Rightarrow H_4 = \frac{H_4}{6} + \frac{1}{3} + \frac{H_3}{2}$$

$$\Rightarrow H_4 = \frac{3}{5}H_3 + \frac{2}{5}$$



حل به روش عددی



$$H_5 = \frac{H_4}{3} + \frac{2}{3}$$

$$H_5 = 1.15$$



$$H_4 = \frac{3}{5}H_3 + \frac{2}{5}$$

$$H_4 = 1.45$$



$$H_3 = \frac{5}{7}H_2 + \frac{2}{7}$$

$$H_3 = 1.75$$



$$H_2 = \frac{7}{9}H_1 + \frac{2}{9}$$

$$H_2 = 2.05$$



$$3H_1 - 1H_2 = 5 \Rightarrow H_1 = \frac{H_2}{3} + \frac{5}{3}$$

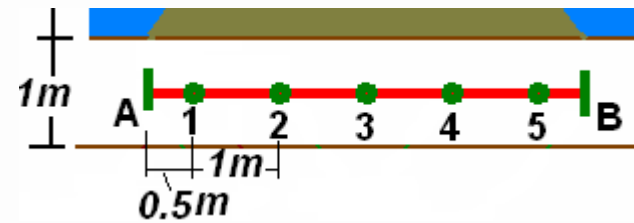
$$\Rightarrow H_1 = \frac{7}{9}H_1 + \frac{2}{9} + \frac{5}{3} \Rightarrow H_1 = 2.35$$



حل به روش تحلیلی

مطابق قانون داری شیب هیدرولیکی عبارتست از نسبت اختلاف هد هیدرولیکی بین دو نقطه به فاصله آن دو نقطه.

$$i_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{\Delta S_{AB}} = \frac{1 - 2.5}{5} = -0.3$$



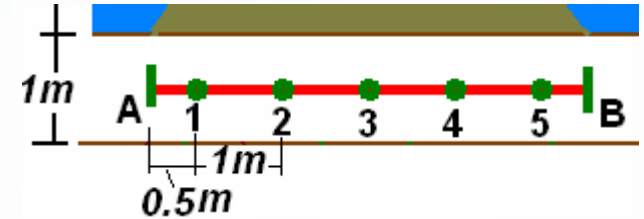
چون این خاک محیطی پیوسته، همگن و ایزوتروپ است شیب هیدرولیکی در بین تمام نقاط آن برابر است:

$$i_{A1} = \frac{\Delta H_{A1}}{\Delta S_{A1}} = \frac{H_1 - H_A}{0.5} = -0.3 \Rightarrow H_1 = H_A - 0.15 = 2.5 - 0.15 = 2.35m$$

$$i_{A2} = \frac{\Delta H_{A2}}{\Delta S_{A2}} = \frac{H_2 - H_A}{1.5} = -0.3 \Rightarrow H_2 = H_A - 0.45 = 2.5 - 0.45 = 2.05m$$



حل به روش تحلیلی



$$i_{A3} = \frac{\Delta H_{A3}}{\Delta S_{A3}} = \frac{H_3 - H_A}{2.5} = -0.3 \Rightarrow H_3 = H_A - 0.75 = 2.5 - 0.75 = 1.75m$$

$$i_{4B} = \frac{\Delta H_{4B}}{\Delta S_{4B}} = \frac{H_B - H_4}{1.5} = -0.3 \Rightarrow H_4 = H_B + 0.45 = 1.0 + 0.45 = 1.45m$$

$$i_{5B} = \frac{\Delta H_{5B}}{\Delta S_{5B}} = \frac{H_B - H_5}{0.5} = -0.3 \Rightarrow H_5 = H_B + 0.15 = 1.0 + 0.15 = 1.15m$$

مقایسه بین روش عددی و روش تحلیلی تطابق کامل نتایج را با یکدیگر نشان میدهد.



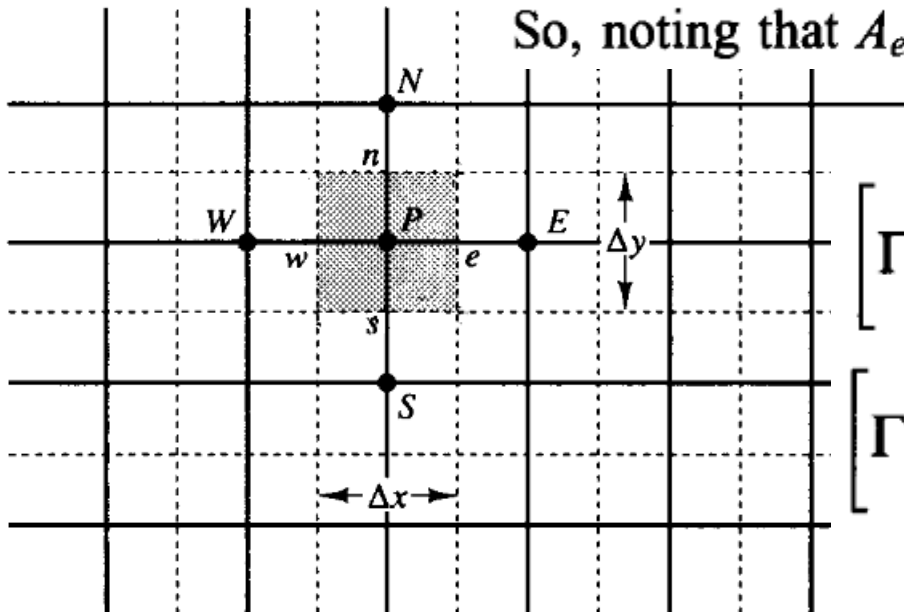
کسته سازی مسائل اشاره حالت دائم دو بعدی

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0$$

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx \cdot dy + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx \cdot dy + \int_{\Delta V} S_{\phi} dV = 0$$

So, noting that $A_e = A_w = \Delta y$ and $A_n = A_s = \Delta x$, we obtain:

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0$$



A part of the two-dimensional grid



گستر سازی مسائل اشعار حالت دائم دو بعدی



$$\text{Flux across the west face} = \Gamma_w A_w \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}}$$

$$\text{Flux across the east face} = \Gamma_e A_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}}$$

$$\text{Flux across the south face} = \Gamma_s A_s \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}}$$

$$\text{Flux across the north face} = \Gamma_n A_n \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}}$$

$$\Rightarrow \Gamma_e A_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_{WP}} + \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta y_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta y_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0$$



گستره سازی مسائل اشار حالت دائم دو بعدی

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P$$



$$\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} - S_p \right) \phi_P$$

$$= \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_E + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) \phi_S + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \phi_N + S_u$$



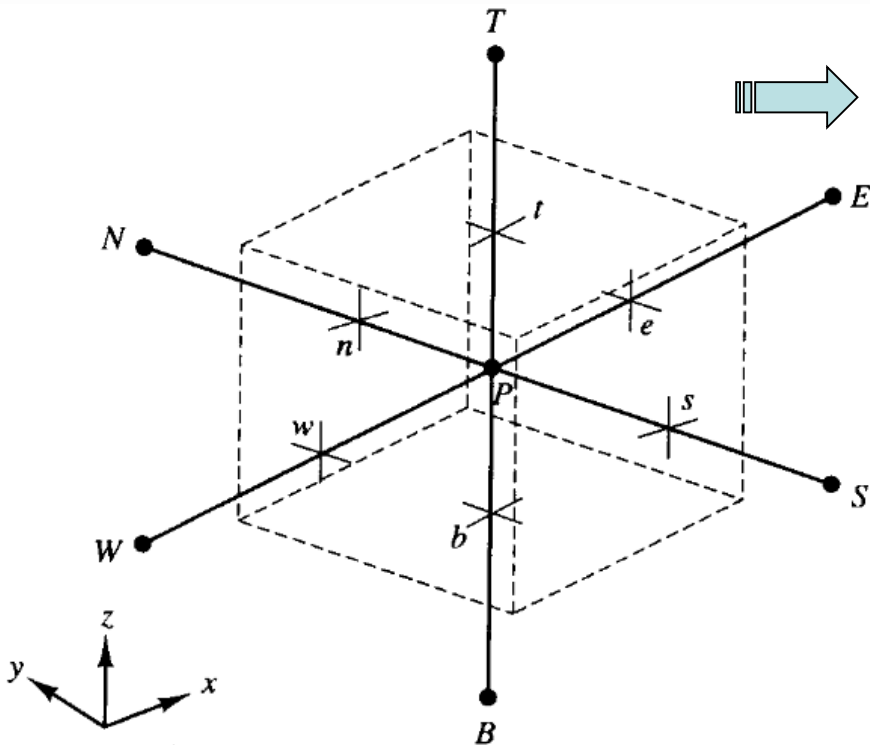
$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + S_u$$

a_W	a_E	a_S	a_N	a_P
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$a_W + a_E + a_S + a_N - S_p$



گستره سازی مسائل انتقال حالت دائم سه بعدی

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S = 0$$

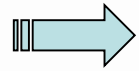


$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] +$$
$$\left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] +$$
$$\left[\Gamma_t A_t \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t - \Gamma_b A_b \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b \right] + \bar{S} \Delta V = 0$$

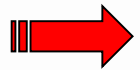
A cell in three dimensions and neighbouring nodes



کسته سازی مسائل انتشار حالت دائم سه بعدی



$$\begin{aligned} & \left[\Gamma_e \frac{(\phi_E - \phi_P)A_e}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w \frac{(\phi_P - \phi_W)A_w}{\delta x_{WP}} \right] \\ & + \left[\Gamma_n \frac{(\phi_N - \phi_P)A_n}{\delta y_{PN}} - \Gamma_s \frac{(\phi_P - \phi_S)A_s}{\delta y_{SP}} \right] \\ & + \left[\Gamma_t \frac{(\phi_T - \phi_P)A_t}{\delta z_{PT}} - \Gamma_b \frac{(\phi_P - \phi_B)A_b}{\delta z_{BP}} \right] + (S_u + S_p \phi_P) = 0 \end{aligned}$$



$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + S_u$$

a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T	a_P
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$	$a_W + a_E + a_S + a_N$ $+ a_B + a_T - S_p$



فصل دہم

کست سازی مسائل انتشار-انتقال حالت دائم

باروش حجم محدود (FVM)

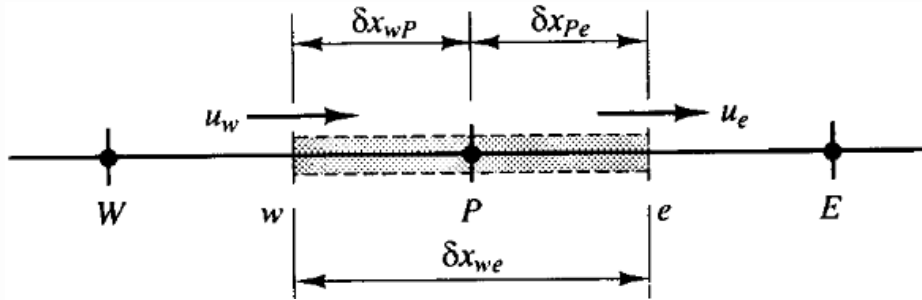


گستره سازی مسائل انتشار-انتقال حالت دائم یک بعدی

رابطه کلی انتشار-انتقال دائم برای خاصیت ϕ در یک میدان جریان یک بعدی u (در غیاب چشمه):

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)$$

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad \text{معادله پیوستگی جریان:}$$



انتگرال از دو معادله فوق روی حجم کنترل:

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w$$

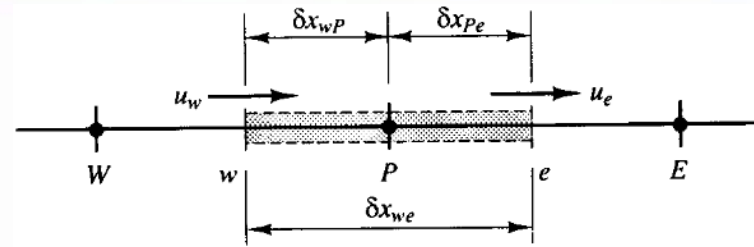
$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0$$



گستره سازی مسائل انتشار-انتقال حالت دائم یک بعدی

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0$$



$F = \rho u$ شار جرم انتقالی در واحد سطح:

$D = \frac{\Gamma}{\delta x}$ قابلیت نفوذ در سطوح سلول:

با فرض $A_w = A_e = A$ و استفاده از روش اختلاف مرکزی:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

فعلا فرض می شود میدان سرعت معلوم است

$$F_e - F_w = 0$$

و از پیوستگی:

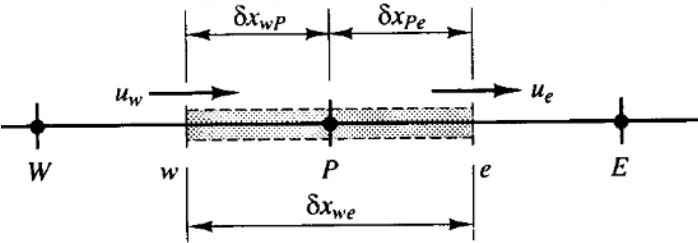


گستره سازی مسائل انتقال-انتقال حالت دائم یک بعدی



طرح اختلاف مرکزی (Central differencing scheme):

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$



$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2$$

$$\phi_w = (\phi_W + \phi_P)/2$$

$$\rightarrow \frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2} (\phi_W + \phi_P) =$$

$$D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$



گستره سازی مسائل انتشار-انتقال حالت دائم یک بعدی

$$\rightarrow \left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left[\left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P \\ = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \end{aligned}$$



$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

a_W	a_E	a_P
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$



مثال



ذرات ریز رسوب با غلظت 1 gr/lit به یک کانال کوچک که سرعت متوسط جریان آب در آن u است، وارد می شود. L متر پایین دست، غلظت به صفر می رسد. با فرض دائم و یک بعدی بودن جریان و برقرار بودن تابع هاکم زیر، غلظت در طول کانال را در سه حالت مناسبه کنید.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u c) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad \rho = 1000, \quad \varepsilon_x = 100$$

الف) $u=0.1 \text{ m/s}$ ، $L=3 \text{ m}$ ، فاصله گره های شبکه: 0.2 m

ب) $u=2 \text{ m/s}$ ، $L=10 \text{ m}$ ، فاصله گره های شبکه: 0.2 m

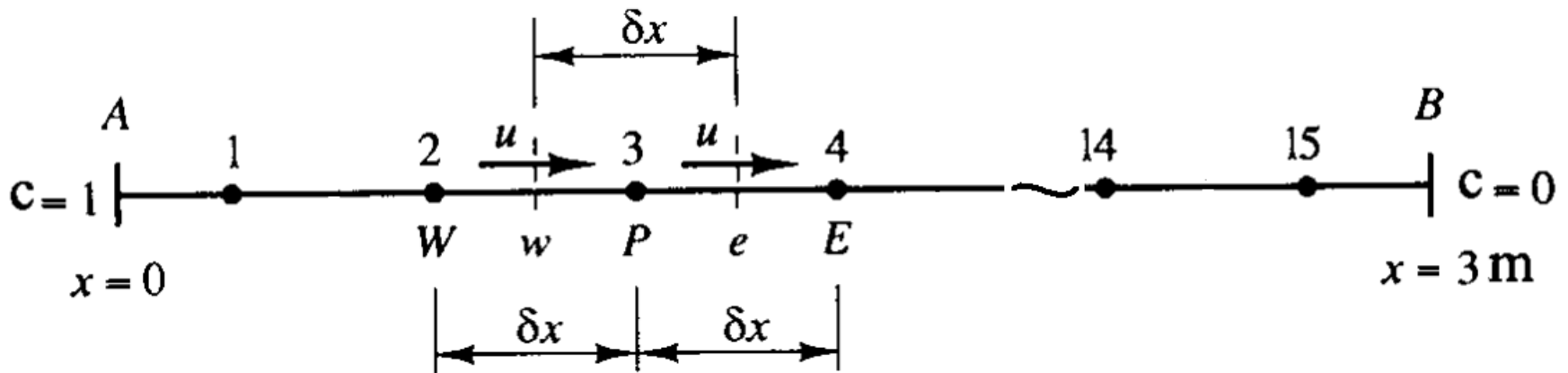
ج) $u=2 \text{ m/s}$ ، $L=10 \text{ m}$ ، فاصله گره های شبکه: 0.02 m



حل به روش عددی [الف]



قدم اول: تولید شبکه (یک بعدی)

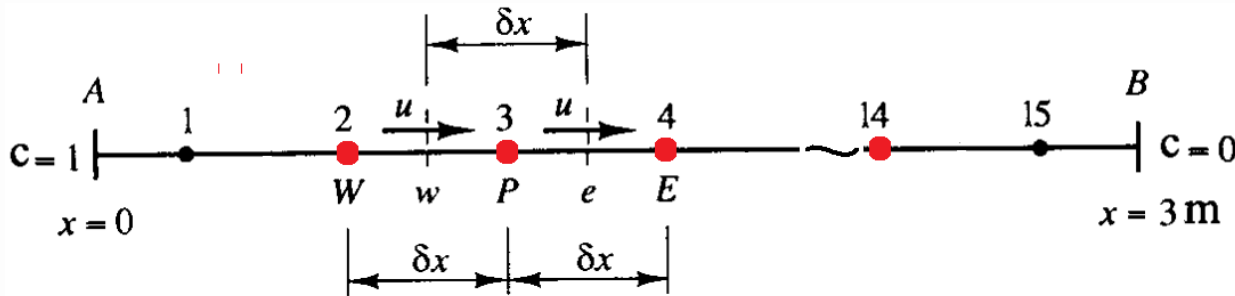




حل به روش عددی [الف]

قدم دوم: گسسته سازی معادله ماکم (افتلاف مرکزی) $\frac{\partial}{\partial x} (\rho u c) = \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x})$

$$(\rho u A c)_e - (\rho u A c)_w = (\epsilon_x A \frac{\partial c}{\partial x})_e - (\epsilon_x A \frac{\partial c}{\partial x})_w$$



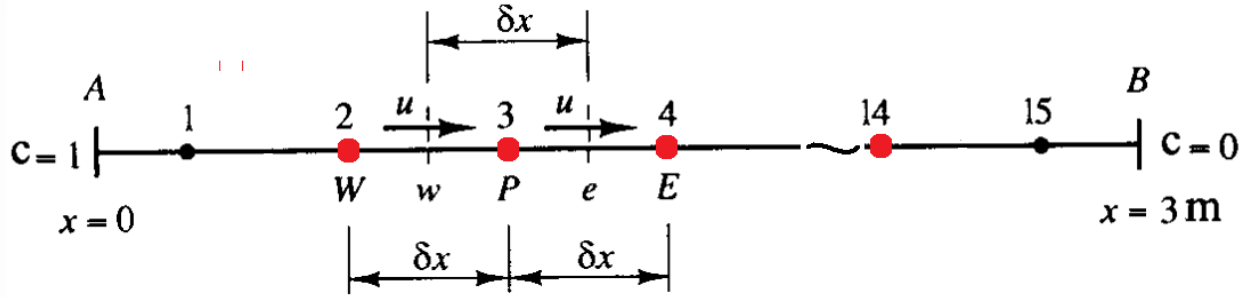
برای کلیه نقاط ۲ تا ۱۴

$$F_e c_e - F_w c_w = (\epsilon_x)_e \left(\frac{c_E - c_P}{\delta x_{EP}} \right) - (\epsilon_x)_w \left(\frac{c_P - c_W}{\delta x_{PW}} \right)$$

$$F_e \left(\frac{c_E + c_P}{2} \right) - F_w \left(\frac{c_W + c_P}{2} \right) = D_e (c_E - c_P) - D_w (c_P - c_W)$$



حل به روش عددی [الف]



$$F_e \left(\frac{c_E + c_P}{2} \right) - F_w \left(\frac{c_W + c_P}{2} \right) = D_e (c_E - c_P) - D_w (c_P - c_W)$$

$$\left(D_w - \frac{F_w}{2} + D_e + \frac{F_e}{2} \right) c_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) c_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) c_E$$

$$\left(D_w + \frac{F_w}{2} + D_e - \frac{F_e}{2} + (F_e - F_w) \right) c_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) c_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) c_E$$



حل به روش عددی [الف]



$$\left(D_w + \frac{F_w}{2} + D_e - \frac{F_e}{2} + (F_e - F_w) \right) c_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) c_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) c_E$$

$$a_P c_P = a_W c_W + a_E c_E + S_u$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

$$D_e = D_w = D, \quad F_e = F_w = F$$

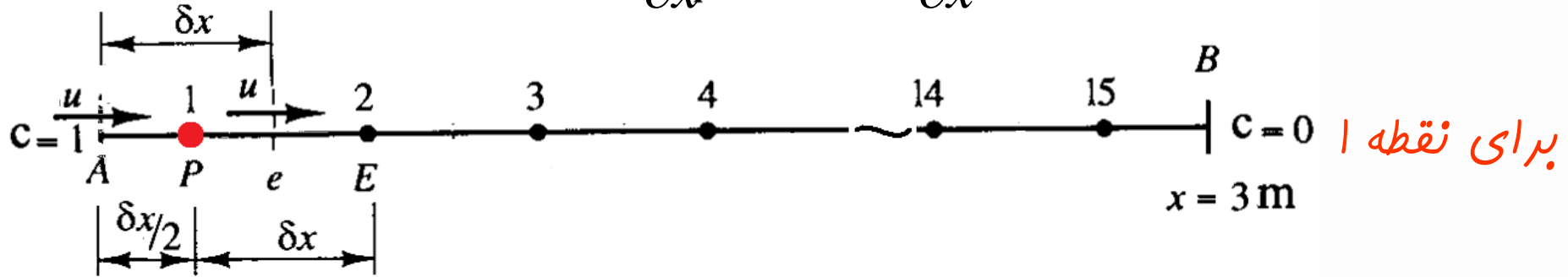
Node	a_w	a_E	S_p	S_u
1				
2, 3, ..., 14	$D + F/2$	$D - F/2$	0	0
15				



حل به روش عددی [الف]



$$(\rho u A c)_e - (\rho u A c)_w = \left(\epsilon_x A \frac{\partial c}{\partial x} \right)_e - \left(\epsilon_x A \frac{\partial c}{\partial x} \right)_w$$



$$F_e c_e - F_A c_A = (\epsilon_x)_e \left(\frac{c_E - c_P}{\delta x_{EP}} \right) - (\epsilon_x)_A \left(\frac{c_P - c_A}{\delta x_{PA}} \right)$$

$$F_e \left(\frac{c_E + c_P}{2} \right) - F_A c_A = D_e (c_E - c_P) - D_A (c_P - c_A) \longrightarrow D_A = \frac{(\epsilon_x)_A}{\delta x / 2}$$

$$\left(D_A + D_e + \frac{F_e}{2} \right) c_P = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) c_E + (D_A + F_A) c_A$$



حل به روش عددی [الف]



$$\left(D_e - \frac{F_e}{2} + D_A + F_e \right) c_P = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) c_E + (D_A + F_A) c_A$$

$$a_P c_P = a_W c_W + a_E c_E + S_u$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

$$D_e = D, \quad D_A = 2D, \quad F_w = F_e = F_A = F$$

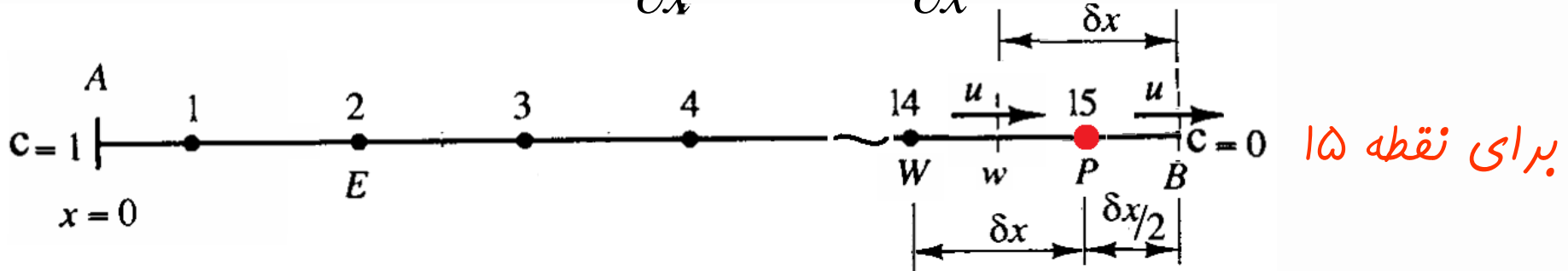
Node	a_w	a_E	S_p	S_u
1	0	$D - F/2$	$-(2D + F)$	$(2D + F) c_A$
2, 3, ..., 14	$D + F/2$	$D - F/2$	0	0
15				



حل به روش عددی [الف]



$$(\rho u A c)_e - (\rho u A c)_w = \left(\epsilon_x A \frac{\partial c}{\partial x} \right)_e - \left(\epsilon_x A \frac{\partial c}{\partial x} \right)_w$$



$$F_B c_B - F_w c_w = (\epsilon_x)_B \left(\frac{c_B - c_P}{\delta x_{BP}} \right) - (\epsilon_x)_w \left(\frac{c_P - c_W}{\delta x_{PW}} \right)$$

$$F_B c_B - F_w \left(\frac{c_W + c_P}{2} \right) = D_B (c_B - c_P) - D_w (c_P - c_W) \longrightarrow D_B = \frac{(\epsilon_x)_B}{\delta x / 2}$$

$$\left(D_w - \frac{F_w}{2} + D_B \right) c_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) c_W + (D_B - F_B) c_B$$



حل به روش عددی [الف]



$$\left(D_w + \frac{F_w}{2} + D_B - F_w \right) c_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) c_W + (D_B - F_B) c_B$$

$$a_P c_P = a_W c_W + a_E c_E + S_u$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

$$D_e = D, \quad D_B = 2D, \quad F_w = F_e = F_B = F$$

Node	a_w	a_E	S_p	S_u
1	0	$D - F/2$	$-(2D + F)$	$(2D + F) c_A$
2, 3, ..., 14	$D + F/2$	$D - F/2$	0	0
15	$D + F/2$	0	$-(2D - F)$	$(2D - F) c_B$



حل به روش عددی [الف]



Node	a_w	a_E	S_p	S_u
1	0	$D - F/2$	$-(2D + F)$	$(2D + F) c_A$
2, 3, ..., 14	$D + F/2$	$D - F/2$	0	0
15	$D + F/2$	0	$-(2D - F)$	$(2D - F) c_B$

$$D = \frac{\varepsilon_x}{\delta x} = 100 / 0.2 = 500, \quad F = \rho u = 1000 \times 0.1 = 100, \quad c_A = 1, \quad c_B = 0$$

nodes	a_w	a_E	S_p	S_U	$a_p = a_w + a_E - S_p$
1	0	450	-1100	1100	1550
2-14	550	450	0	0	1000
15	550	0	-900	0	1450



حل به روش عددی [الف]

$$a_P c_P = a_W c_W + a_E c_E + S_u$$

قدم سوم: حل معادلات گسسته

nodes	a_w	a_E	S_P	S_U	$a_p = a_w + a_E - S_P$
1	0	450	-1100	1100	1550
2-14	550	450	0	0	1000
15	550	0	-900	0	1450

$$-a_W c_W + a_P c_P - a_E c_E = S_u$$

$$\begin{bmatrix} 1550 & -450 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -550 & 1000 & -450 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -550 & 1000 & -450 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -550 & 1000 & -450 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -550 & 1450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{14} \\ c_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



حل به روش عددی [الف]



L= 3.00 n= 15
delta x= 0.20
C0= 1.00 CL= 0.00
u= 0.10 Ro=1000.00 cof.= 100.00

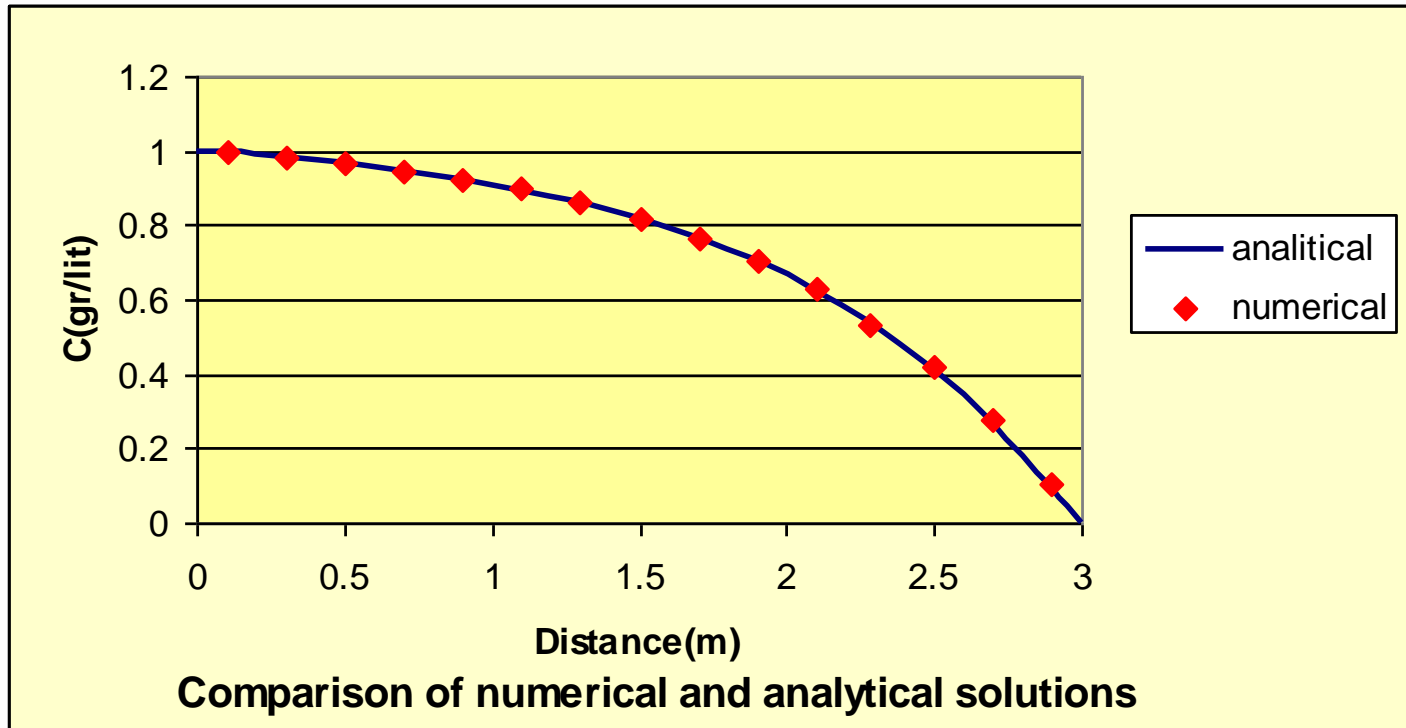
C(1)= 0.9948
C(2)= 0.9821
C(3)= 0.9667
C(4)= 0.9477
C(5)= 0.9246
C(6)= 0.8963
C(7)= 0.8617
C(8)= 0.8195
C(9)= 0.7679
C(10)= 0.7048
C(11)= 0.6276
C(12)= 0.5334
C(13)= 0.4181
C(14)= 0.2773
C(15)= 0.1052



مقایسه نتایج حل به روش عددی و تحلیلی [الف]

$$\frac{C - C_0}{C_L - C_0} = \frac{\exp(\rho u x / \varepsilon_x) - 1}{\exp(\rho u L / \varepsilon_x) - 1}$$

معادله تحلیلی:





نتایج حل به روش عددی [ب]



$$a_P c_P = a_W c_W + a_E c_E + S_u$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

nodes	a_w	a_E	S_P	S_U	$a_P = a_w + a_E - S_P$
1	0	-500	-3000	3000	2500
2-49	1500	-500	0	0	1000
50	1500	0	1000	0	500



نتایج حل به روش عددی [ب]

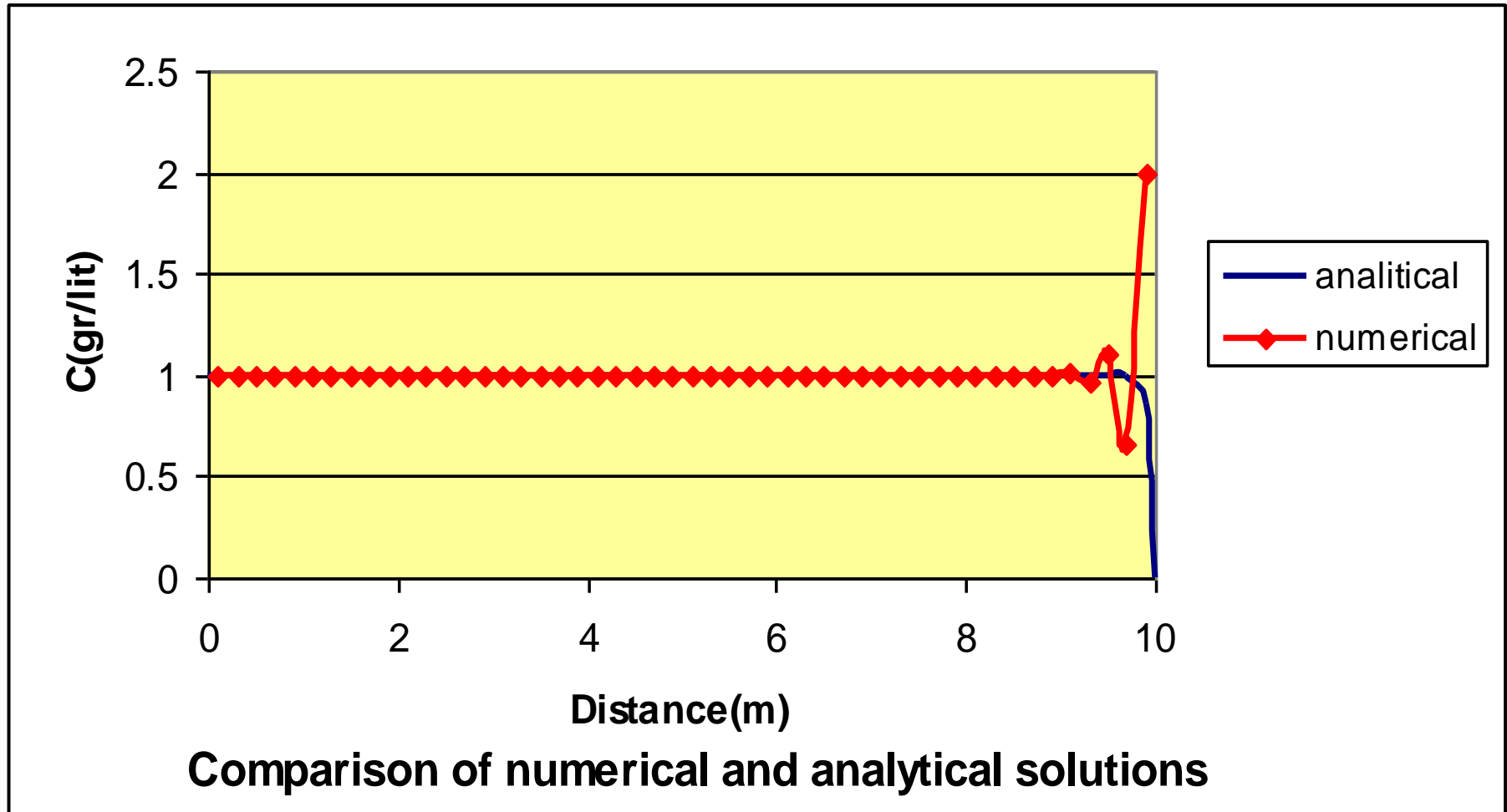


$L=10.00$ $n= 50$
 $\text{delta } x= 0.20$
 $C0= 1.00$ $CL= 0.00$
 $u= 2.00$ $Ro=1000.00$ $\text{Cof.} = 100.00$

$C(1)=$	1.0000	$C(26)=$	1.0000
$C(2)=$	1.0000	$C(27)=$	1.0000
$C(3)=$	1.0000	$C(28)=$	1.0000
$C(4)=$	1.0000	$C(29)=$	1.0000
$C(5)=$	1.0000	$C(30)=$	1.0000
$C(6)=$	1.0000	$C(31)=$	1.0000
$C(7)=$	1.0000	$C(32)=$	1.0000
$C(8)=$	1.0000	$C(33)=$	1.0000
$C(9)=$	1.0000	$C(34)=$	1.0000
$C(10)=$	1.0000	$C(35)=$	1.0000
$C(11)=$	1.0000	$C(36)=$	1.0000
$C(12)=$	1.0000	$C(37)=$	1.0000
$C(13)=$	1.0000	$C(38)=$	1.0000
$C(14)=$	1.0000	$C(39)=$	1.0000
$C(15)=$	1.0000	$C(40)=$	1.0000
$C(16)=$	1.0000	$C(41)=$	0.9999
$C(17)=$	1.0000	$C(42)=$	1.0002
$C(18)=$	1.0000	$C(43)=$	0.9995
$C(19)=$	1.0000	$C(44)=$	1.0014
$C(20)=$	1.0000	$C(45)=$	0.9959
$C(21)=$	1.0000	$C(46)=$	1.0123
$C(22)=$	1.0000	$C(47)=$	0.9630
$C(23)=$	1.0000	$C(48)=$	1.1111
$C(24)=$	1.0000	$C(49)=$	0.6667
$C(25)=$	1.0000	$C(50)=$	2.0000



مقایسه نتایج حل به روش عددی و تحلیلی (ب)





نتایج حل به روش عددی [ج]



$$a_P c_P = a_W c_W + a_E c_E + S_u$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

nodes	a_w	a_E	S_P	S_U	$a_P = a_w + a_E - S_P$
1	0	4000	-12000	1100	16000
2-499	6000	4000	0	0	10000
500	6000	0	-8000	0	14000



نتایج حل به روش عددی [ج]



$$L=10.00 \quad n=500$$

$$\text{delta } X= 0.02$$

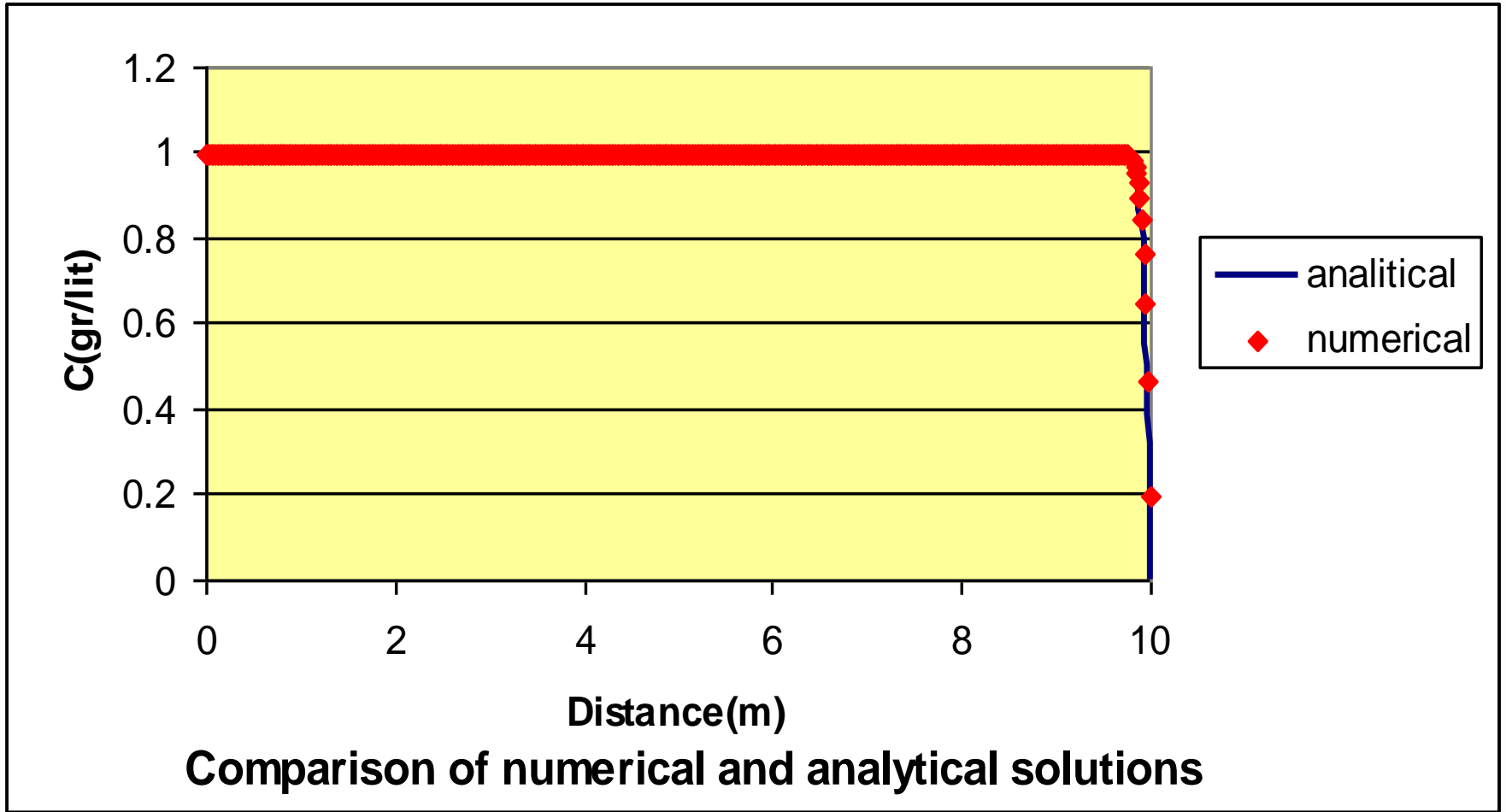
$$C0= 1.00 \quad CL= 0.00$$

$$u= 2.00 \quad Ro=1000.00 \quad Cof.= 100.00$$

C(1)=	1.0000	C(26)=	1.0000	C(476)=	1.0000
C(2)=	1.0000	C(27)=	1.0000	C(477)=	0.9999
C(3)=	1.0000	C(28)=	1.0000	C(478)=	0.9999
C(4)=	1.0000	C(29)=	1.0000	C(479)=	0.9998
C(5)=	1.0000	C(30)=	1.0000	C(480)=	0.9998
C(6)=	1.0000	C(31)=	1.0000	C(481)=	0.9996
C(7)=	1.0000	C(32)=	1.0000	C(482)=	0.9995
C(8)=	1.0000	C(33)=	1.0000	C(483)=	0.9992
C(9)=	1.0000	C(34)=	1.0000	C(484)=	0.9988
C(10)=	1.0000	C(35)=	1.0000	C(485)=	0.9982
C(11)=	1.0000	C(36)=	1.0000	C(486)=	0.9973
C(12)=	1.0000	C(37)=	1.0000	C(487)=	0.9959
C(13)=	1.0000	C(38)=	1.0000	C(488)=	0.9938
C(14)=	1.0000	C(39)=	1.0000	C(489)=	0.9908
C(15)=	1.0000	C(40)=	1.0000	C(490)=	0.9861
C(16)=	1.0000	C(41)=	1.0000	C(491)=	0.9792
C(17)=	1.0000	C(42)=	1.0000	C(492)=	0.9688
C(18)=	1.0000	C(43)=	1.0000	C(493)=	0.9532
C(19)=	1.0000	C(44)=	1.0000	C(494)=	0.9298
C(20)=	1.0000	C(45)=	1.0000	C(495)=	0.8947
C(21)=	1.0000	...		C(496)=	0.8420
C(22)=	1.0000			C(497)=	0.7630
C(23)=	1.0000	...		C(498)=	0.6444
C(24)=	1.0000			C(499)=	0.4667
C(25)=	1.0000	...		C(500)=	0.2000



مقایسه نتایج حل به روش عددی و تحلیلی (ج)





پروژه اول

یک برنامه کامپیوتری برای حل مثال قبل با طرح اختلاف مرکزی بنویسید.

موارد زیر نیز در نوشتن برنامه رعایت شود:

۱- برنامه با یکی از زبان های Basic, Pascal, Fortran, C یا ویژوال آن ها نوشته شود.

۲- برنامه حل ماتریس سه قطری نیز در یک زیر برنامه قرار گیرد.

۳- تاریخ تحویل پروژه دو هفته بعد.

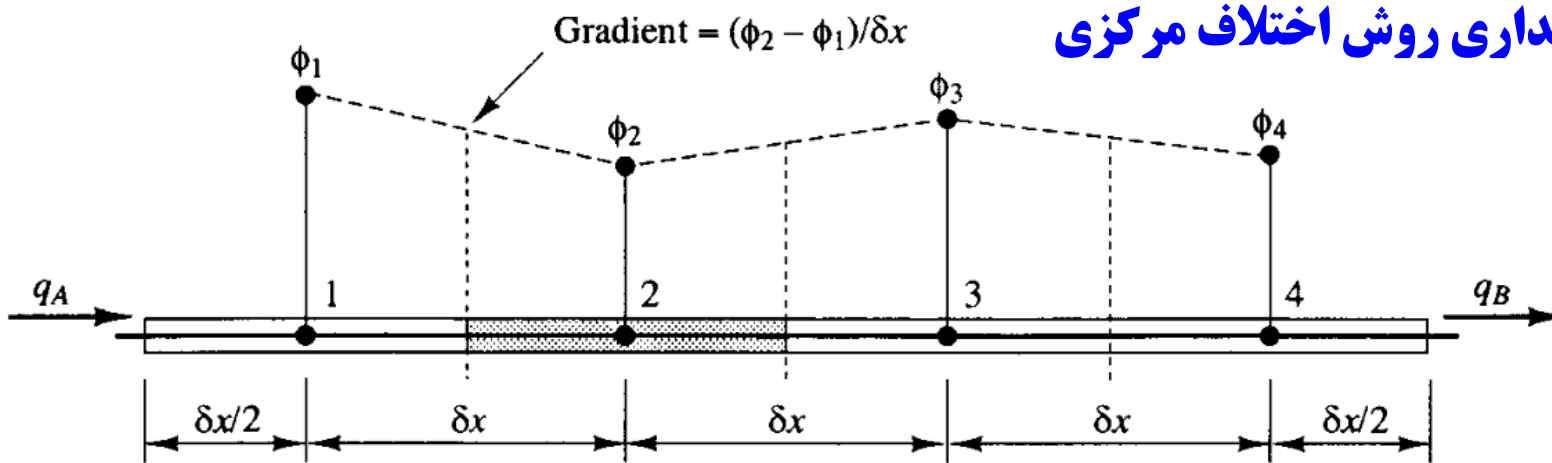


ارزیابی روش های گسسته سازی



• پایداری (Stability) یا بقائیت (Conservativeness):

مقدار شار، خاصیت ϕ که سطح مشخصی از حجم کنترل را ترک می کند باید به همان اندازه شار ϕ باشد که از همان سطح وارد حجم کنترل می شود.

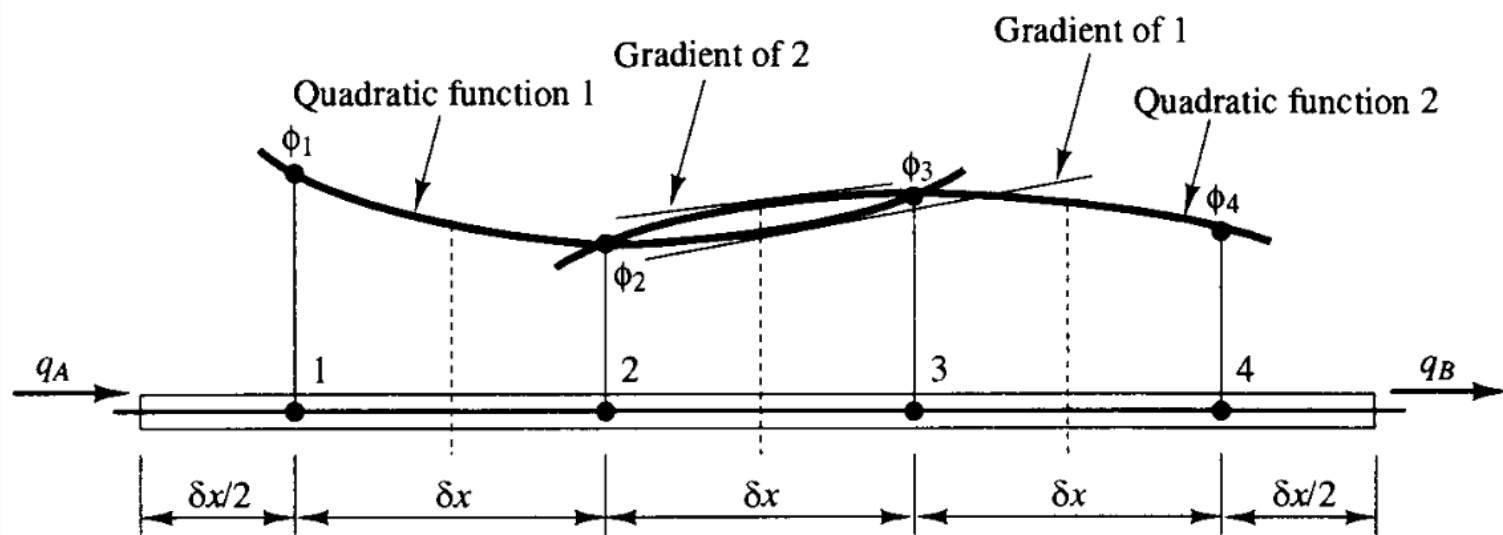




ارزیابی روش های گسسته سازی



نمونه ای از ناپایداری نوعی روش درون یابی مرتبه دوم





ارزیابی روش های گسسته سازی



• همگرایی (Convergence) یا محدودیت (Boundedness):

اسکاربرو (Scarborough, 1958) نشان داد شرط کافی برای همگرا شدن یا جلوگیری از نوسان در حل دستگاه معادلات گسسته شده عبارتست از:

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a'_{p}|} \begin{cases} \leq 1 \text{ at all nodes} \\ < 1 \text{ at one node at least} \end{cases}$$

مفرج کسر در واقع قدرمطلق ضرایب قائلن گره مرکزی یعنی a_{p-S_p} و صورت کسر، جمع جبری قدرمطلق ضرایب گره های همسایه می باشد.

لذا برای رسیدن به شرط اسکاربرو لازم است S_p همواره منفی و ضرایب معادلات گسسته هم علامت (معمولا مثبت) باشند.

به جداول ضرایب گره های مثال قبل توجه شود تا علت عدم جواب صحیح قسمت ب) معلوم گردد.



ارزیابی روش های گستره سازی

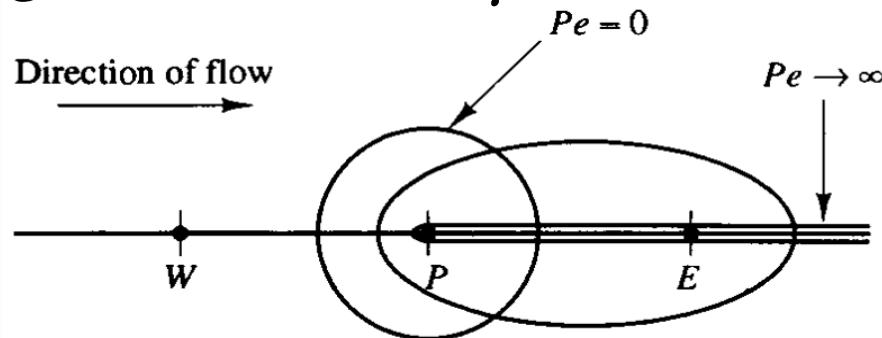


انتقال (Transportiveness):

عدد پی بعد پکلت (Peclet) به صورت یک کمیتی برای نسبت قدرت انتقال به انتشار استفاده می شود:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta x}$$

شکل زیر مقادیر مختلف عدد پکلت را نمایش می دهد:



Distribution of ϕ in the vicinity of a source at different Peclet numbers



ارزیابی روش های گستره سازی



$$a_E = D_e - F_e / 2$$

$$a_W = D_w + F_w / 2$$

در مثال قبل داشتیم:

اما برای همگرایی لازم است هر دو ضریب فوق مثبت باشند که ضریب غربی همیشه مثبت است اما برای ضریب شرقی داریم:

$$a_E = D_e - F_e / 2 > 0 \quad \rightarrow \quad F_e / D_e = Pe_e < 2$$

اما عدد پکلت برای بخش های الف، ب و ج) بترتیب ۲، ۰، ۴ و ۴، ۰ می باشد.

طرح اختلاف مرکزی، اثر همه همسایه های نقطه P را بطور یکسان برای شار انتشار و انتقال وارد می کند. لذا قادر به تشخیص جهت جریان یا قدرت انتقال نسبت به انتشار نمی باشد.



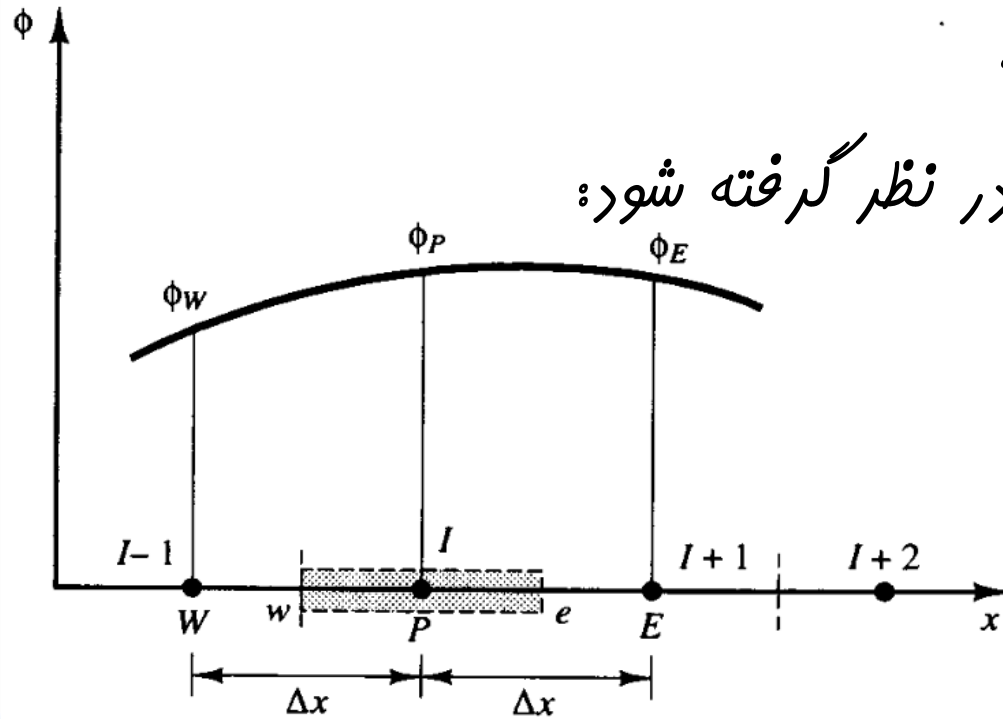
ارزیابی روش های گسسته سازی



دقت (Accuracy):

فضای قطع سری تیلور برای مناسبه گرا دیان ها دقت روش را تعیین می کند. هر چه دقت بالاتر باشد حساسیت مدل به ابعاد شبکه کمتر خواهد بود.

شبکه یک بعدی زیر را در نظر گرفته شود:





ارزیابی روش های گسسته سازی



$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_x \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

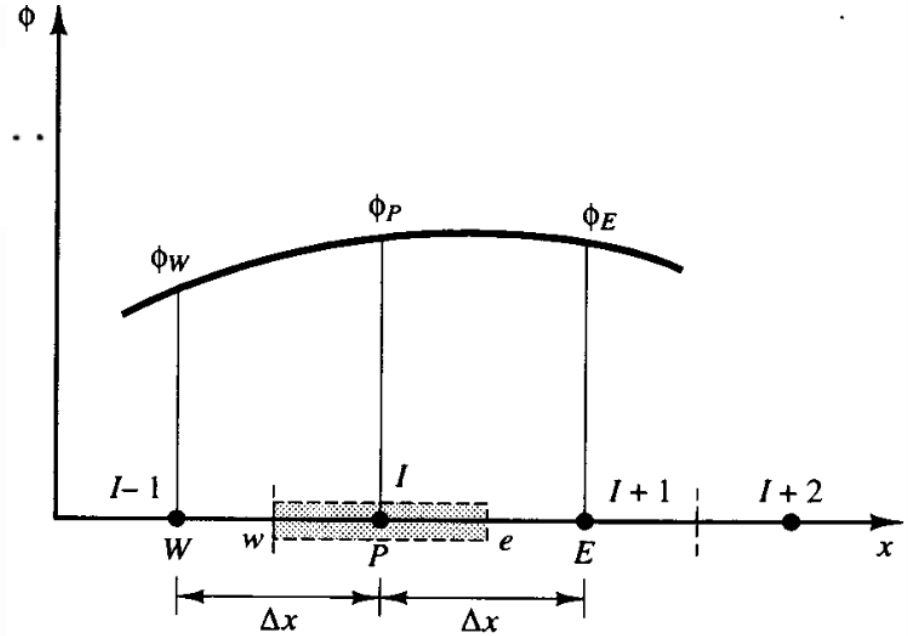
سلسله سری تیلور:

$$\phi_E = \phi_P + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_P \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P \Delta x = \phi_E - \phi_P - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_P \frac{\Delta x^2}{2} - \dots$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_P \frac{\Delta x}{2} - \dots$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} + \text{truncated terms}$$





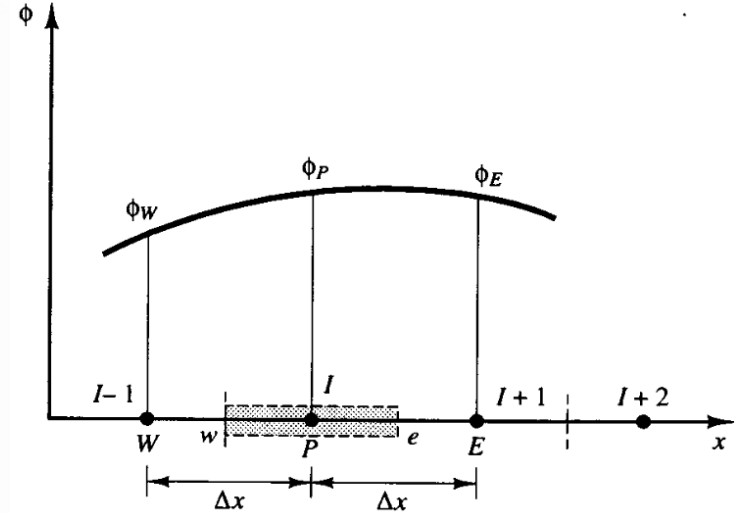
ارزیابی روش های گسسته سازی



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} + \text{truncated terms}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} + O(\Delta x)$$



اختلاف پیشرو (دقت: مرتبه اول)

$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_x \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

اختلاف پسرو (دقت: مرتبه اول)

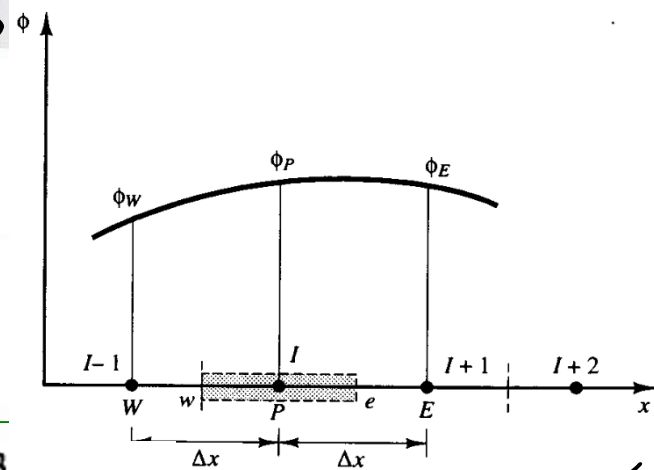


ارزیابی روش های گسسته سازی



$$\phi(x + \Delta x) = \phi(x) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_x \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

$$\phi(x - \Delta x) = \phi(x) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_x \Delta x + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_x \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$



کسر دو معادله فوق:

$$\phi(x + \Delta x) - \phi(x - \Delta x) = 2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P \Delta x + \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_P \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P = \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{2(\Delta x/2)} = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x}$$

اختلاف مرکزی (دقت: مرتبه دو)



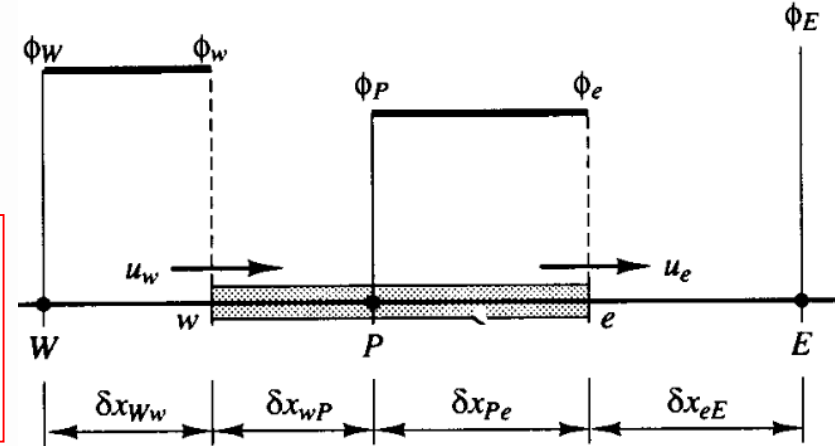
طرح اختلاف بالادست (Upwind differencing scheme)

$$u_w > 0, u_e > 0 (F_w > 0, F_e > 0)$$

جهت جریان از غرب به شرق (مثبت)

$$\phi_w = \phi_W \text{ and } \phi_e = \phi_P$$

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$



$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$(D_w + D_e + F_e) \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E$$

$$\rightarrow [(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E$$



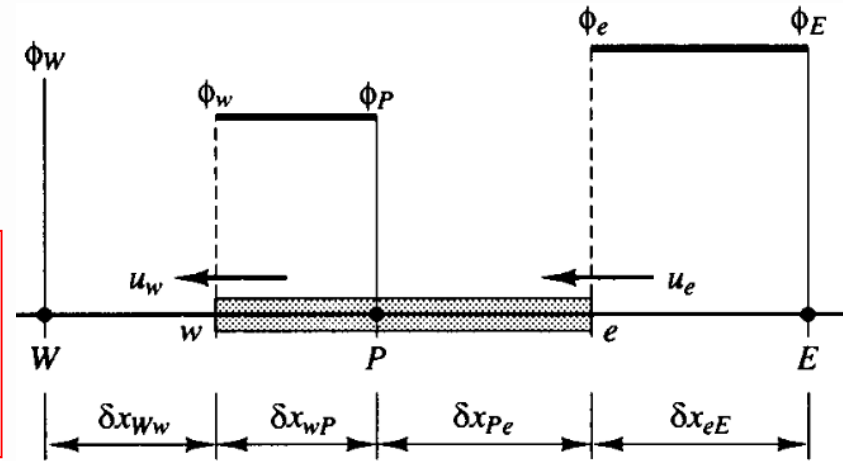
شرح اختلاف بالادست (Upwind differencing scheme)

جهت جریان از شرق به غرب (منفی)

$$u_w < 0, u_e < 0 (F_w < 0, F_e < 0)$$

$$\phi_w = \phi_P \text{ and } \phi_e = \phi_E$$

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$



$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W)$$

$$\Rightarrow [D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = D_w \phi_W + (D_e - F_e) \phi_E$$



طرح اختلاف بالادست (Upwind differencing scheme)

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)]\phi_P = (D_w + F_w)\phi_W + D_e\phi_E$$

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)]\phi_P = D_w\phi_W + (D_e - F_e)\phi_E$$

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

	a_W	a_E
$F_w > 0, F_e > 0$	$D_w + F_w$	D_e
$F_w < 0, F_e < 0$	D_w	$D_e - F_e$

or

a_W	a_E
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$



طرح اختلاف بالادست (Upwind differencing scheme)

ارزیابی طرح:

پایداری: طرح نتایج سازگاری را برای محاسبه شارهای عبوری از سطوح سلول به دست می دهد؛ لذا پایدار است.

همگرایی: تمامی ضرایب معادله گسسته شده مثبت است و ماتریس ضرایب به صورت قطری در می آید؛ لذا نوسانی در حل ماتریس رخ نمی دهد.

انتقال: خاصیت انتقال در طرح به خوبی دیده شده است.

دقت: طرح بر اساس قانده اختلاف پسر و است؛ لذا دقت فقط از مرتبه اول است. به همین دلیل در صورت انتخاب شبکه بندی درشت به خصوص زمانی که جریان هم راستا با خطوط شبکه نباشد خطای محاسبات زیاد خواهد بود.



پروژه دوم

زیر برنامه ای برای گستره سازی با طرح اختلاف بالادست نیز به پروژه اول اضافه شود.

موارد زیر نیز رعایت شود:

۱- طرح های مختلف در زیر برنامه های مختلف قرار گیرند (در برنامه سوال شود که از کدام

طرح استفاده شود).

۲- تاریخ تحویل پروژه یک هفته بعد.



طرح اختلاف پیوندی (Hybrid differencing scheme)



طرح اختلاف پیوندی (Spalding, 1972) ترکیبی است از طرح اختلاف مرکزی زمانی که عدد پکلت کوچکتر از ۲ می باشد و طرح اختلاف بالادست زمانی که عدد پکلت بزرگتر از ۲ است.

این طرح به عنوان نمونه برای سطح غربی حجم کنترل عبارتست از:

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{WP}}$$

$$q_w = F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_W + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_P \right] \quad \text{for} \quad -2 < Pe_w < 2$$

$$q_w = F_w A_w \phi_W \quad \text{for} \quad Pe_w \geq 2$$

$$q_w = F_w A_w \phi_P \quad \text{for} \quad Pe_w \leq -2$$

به سادگی دیده می شود که برای اعداد پکلت بزرگتر از ۲ با طرح اختلاف بالادست برای انتقال هم ارز است و **انتشار صفر است** و برای پکلت کمتر از ۲ هم ارز طرح اختلاف مرکزی برای انتقال و انتشار است.



طرح اختلاف پیوندی (Hybrid differencing scheme)



شکل عمومی معادله گسسته شده را به شکل زیر می توان نوشت:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

a_W	a_E
$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$

اختلاف بالادست.

و مقایسه شود با طرح های اختلاف مرکزی

a_W	a_E
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$

a_W	a_E
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$



پروژه سوم

زیر برنامه ای برای گستره سازی با طرح اختلاف پیوندی نیز به پروژه قبلی
اضافه شود.

تاریخ تحویل پروژه دو هفته بعد.

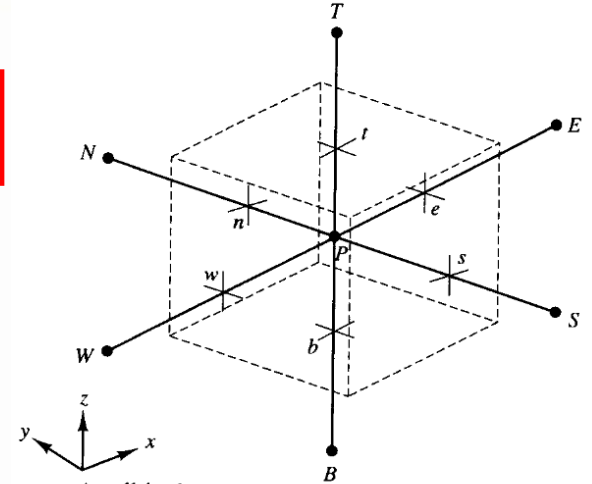


طرح اختلاف پیوندی برای مسائل انتشار- انتقال چند بعدی



$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F$$



A cell in three dimensions and neighbouring nodes

Face	w	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{BP}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$



طرح اختلاف پیوندی برای مسائل چند بعدی



	One-dimensional flow	Two-dimensional flow	Three-dimensional flow
a_w	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$
a_E	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$
a_S	-	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$
a_N	-	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$
a_B	-	-	$\max \left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2} \right), 0 \right]$
a_T	-	-	$\max \left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2} \right), 0 \right]$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$



طرح توان-پیرو (Power-Low scheme)



طرح اختلاف توان-پیرو (Patankar, 1980) تقریب دقیقی برای مسائل یک بعدی است.

در این روش هنگامی که عدد پکلت بزرگتر از ۱۰ باشد انتشار (پخشیدگی) صفر در نظر گرفته می شود و زمانی که عدد پکلت بین ۰ و ۱۰ باشد با استفاده از یک چند جمله ای ارزیابی می شود.

به عنوان نمونه شار خالص در واحد سطح در سمت غربی حجم کنترل عبارتست از:

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{WP}}$$

$$q_w = F_w [\phi_W - \beta_w (\phi_P - \phi_W)] \quad \text{for } 0 < Pe < 10$$

$$\text{where } \beta_w = (1 - 0.1Pe_w)^5 / Pe_w$$

and

$$q_w = F_w \phi_W \quad \text{for } Pe > 10$$



طرح توان - پیرو (Power-Low scheme)



ضرایب معادله گسسته شده انتشار - انتقال یک بعدی با این روش عبارتست از:

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

a_W	a_E
$D_w \max[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5] + \max[F_w, 0]$	$D_e \max[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5] + \max[-F_e, 0]$



پروژه چهارم



زیرنامه ای برای گستره سازی با طرح توان-پیرو نیز به پروژه قبلی اضافه
شود.

تاریخ تحویل پروژه دو هفته بعد.



پروژه نهائی

ذرات ریز رسوب با غلظت 1 gr/lit به یک کانال کوچک که سرعت آب در راستای جریان و در وسط آن u_{max} و تغییرات سرعت به سمت دیواره های کانال بصورت قطبی است و در مجاورت دیوار صفر است (شرط عدم لغزش)، وارد می شود. Lx متر پایین دست، غلظت به صفر می رسد. با فرض دائم بودن جریان و برقرار بودن تابع حاکم زیر، غلظت در کانال را در یک سیستم دوبعدی محاسبه کنید.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u c) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v c) = \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y})$$

۱- از روش های افتلاف مرکزی و افتلاف پیوندی استفاده شود.

۲- شرط مرزی نیومن (گرادیان متغیر در یک جهت روی مرز صفر است) را برای دیواره های کانال در نظر بگیرید و سپس با شرط مرزی دریشله (مقادیر معلوم متغیر در مرز) مقایسه کنید.

مفروضات برای حالت خاص:

$$\rho = 1000, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = 100$$

$$u_{max} = 2 \text{ m/s}, \quad Lx = 10 \text{ m}$$

$$Ly = 2 \text{ m} \quad \text{عرض کانال}$$

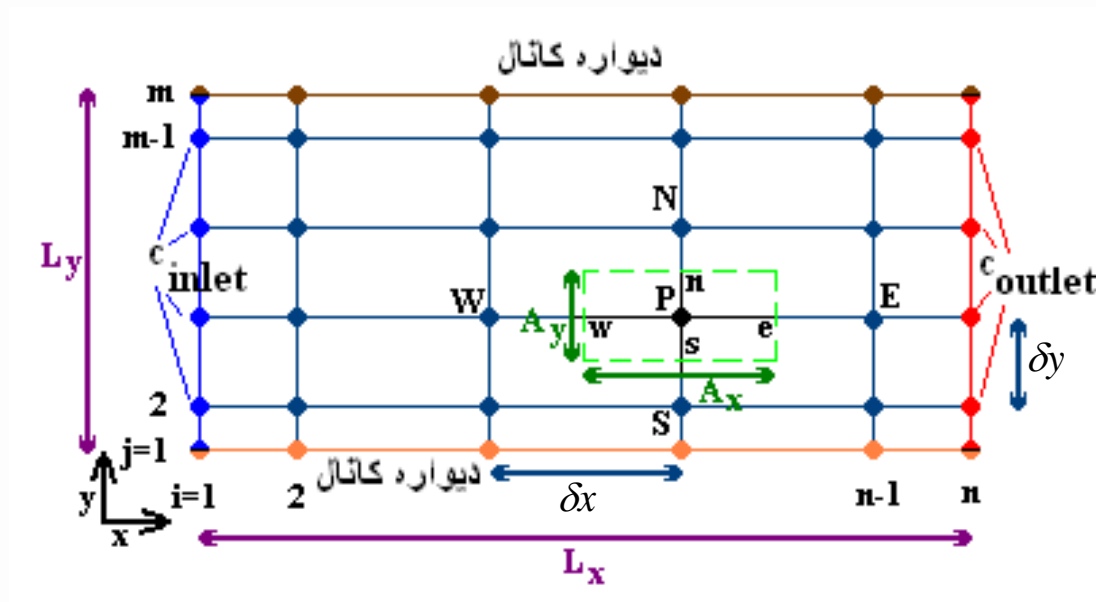
$$v = 0 \quad \text{جریان عرضی وجود ندارد}$$



راهنمایی



تولید شبکه:





راهنمایی



$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u c) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v c) = \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y})$$

گسسته سازی:

$$(\rho u A c)_e - (\rho u A c)_w + \cancel{(\rho v A c)_n} - \cancel{(\rho v A c)_s} = (\epsilon_x A \frac{\partial c}{\partial x})_e - (\epsilon_x A \frac{\partial c}{\partial x})_w$$

$$+ (\epsilon_y A \frac{\partial c}{\partial y})_n - (\epsilon_y A \frac{\partial c}{\partial y})_s$$

$$F_{ej} = F_{wj} = F_{xj} = \rho u_j A_y$$

$$D_e = D_w = D_x = \epsilon_x A_y / \delta x$$

$$D_n = D_s = D_y = \epsilon_y A_x / \delta y$$

با فرض فاصله یکسان گره ها در راستای جریان

و نیز فاصله یکسان گره ها در راستای عرضی:

$$F_{xj} c_e - F_{xj} c_w = D_x (c_E - c_P) - D_x (c_P - c_W) + D_y (c_N - c_P) - D_y (c_P - c_S)$$

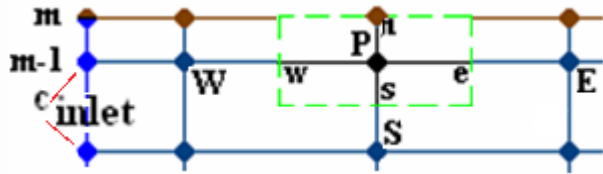
ادامه گسسته سازی معادله فوق با یکی از روش های افتلاف مرکزی یا افتلاف پیوندی انجام گیرد.



راهنمایی



$$F_{xj}c_e - F_{xj}c_w = D_x(c_E - c_P) - D_x(c_P - c_W) + D_y(c_N - c_P) - D_y(c_P - c_S)$$

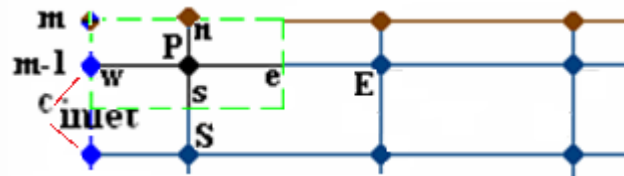


نمونه ای از معادلات گسسته در گره های مرزی به روش اختلاف مرکزی:
مرز شمالی (شرط نیومن):

$$\frac{F_{xj}}{2}(c_E + c_P) - \frac{F_{xj}}{2}(c_P + c_W) = D_x(c_E - c_P) - D_x(c_P - c_W) + D_y(0) - D_y(c_P - c_S)$$

مرز شمالی (شرط دریشله):

$$\frac{F_{xj}}{2}(c_E + c_P) - \frac{F_{xj}}{2}(c_P + c_W) = D_x(c_E - c_P) - D_x(c_P - c_W) + 2D_y(0 - c_P) - D_y(c_P - c_S)$$



مرز شمالی شرقی (شرط نیومن):

$$\frac{F_{xj}}{2}(c_E + c_P) - F_{xj}c_{inlet} = D_x(c_E - c_P) - 2D_x(c_P - c_{inlet}) + D_y(0) - D_y(c_P - c_S)$$



فصل یازدہم

الکوریتم حل توام سرعت و فشار در جریان های دائم

باروش حجم محدود (FVM)



کلیات



در فصول قبل سرعت جریان معلوم فرض شد، در حالی که در شرایط واقعی هدف اول حل جریان یا به عبارت بهتر محاسبه میدان سرعت است. در یک حالت دو بعدی، معادلات حاکم شامل دو معادله اندازه حرکت و یک معادله پیوستگی عبارتند از:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

برای حل معادلات فوق سه نکته قابل توجه است:

۱- عبارت های انتقال در معادلات اندازه حرکت شامل مقادیر غیر خطی است، همانند ρu^2 و ρv^2 ؛

۲- سرعت ها در هر سه معادله وجود دارند که باعث ترکیب پیچیده معادلات شده است؛

۳- به دلیل معمولاً نامعلوم بودن شیب فشار، میدان فشار نیز به عنوان مجهول در معادلات فوق باید محاسبه شود.

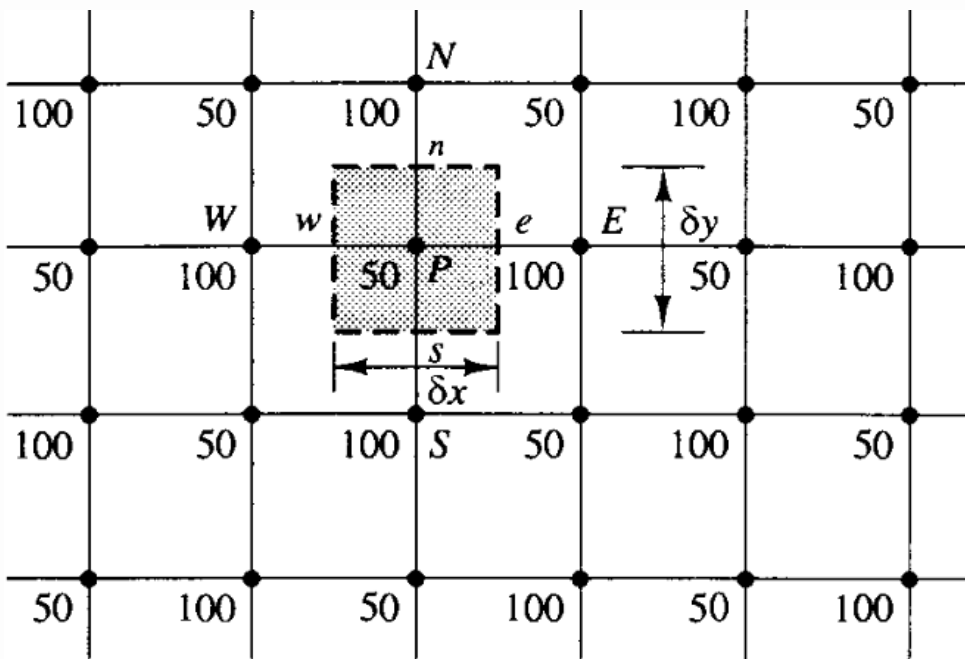


شبكة جابجاشده (Staggered grid)



در انجام شبکه بندی برای حل میدان های فشار و سرعت منطقی به نظر می رسد که محلی یکسان برای ذخیره متغیرهای برداری همانند سرعت و متغیرهای اسکالر همانند فشار، دما و ... در نظر گرفته شود؛ ولی در عمل این حالت باعث می شود یک میدان فشار به شدت غیر یکنواخت، شبیه یک میدان یکنواخت در معادلات اندازه حرکت گسسته شده، عمل کند. این

موضوع در مثال زیر نشان داده شده است:

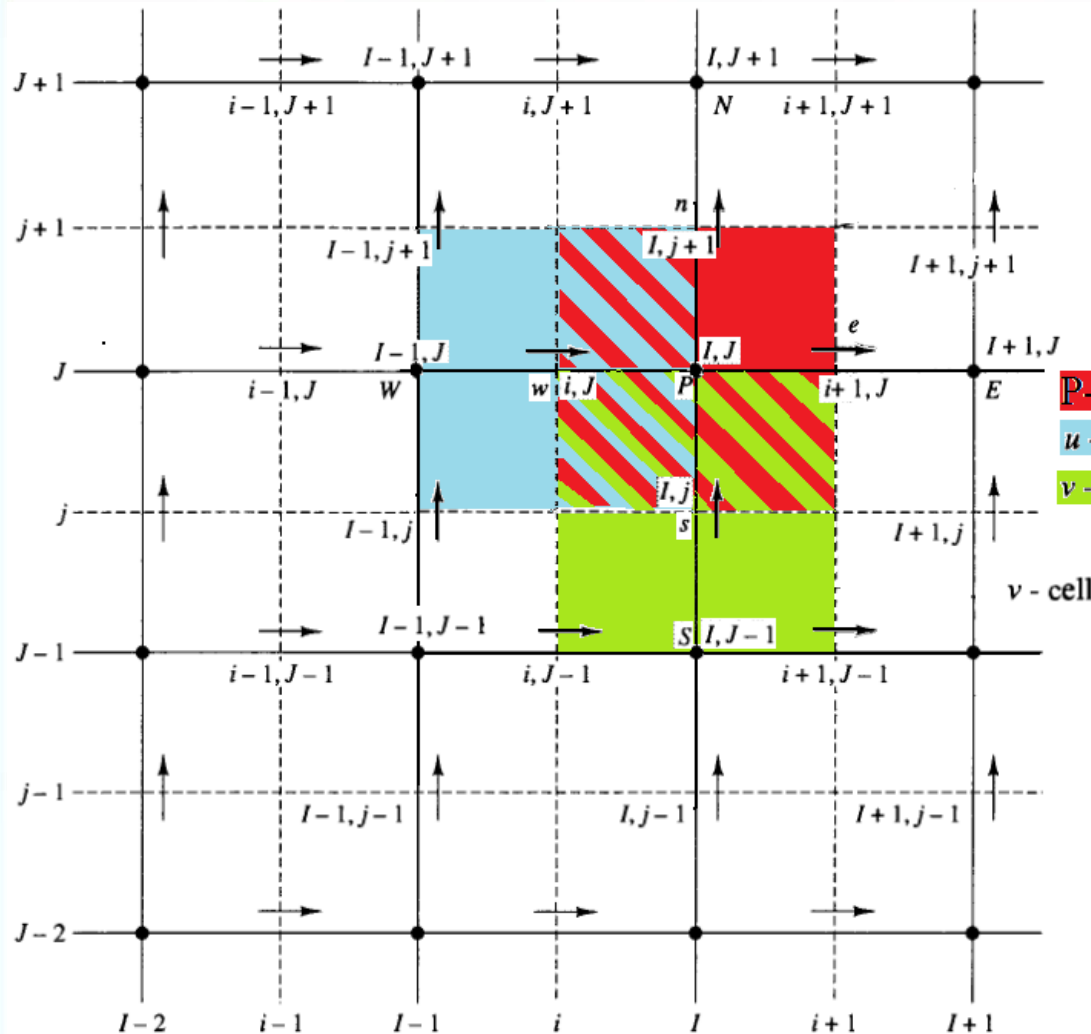


'checker-board' pressure field

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{p_e - p_w}{\delta x} \\ &= \frac{\left(\frac{p_E + p_P}{2}\right) - \left(\frac{p_P + p_W}{2}\right)}{\delta x} \\ &= \frac{p_E - p_W}{2\delta x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{p_N - p_S}{2\delta y} = 0 \end{aligned}$$



شبكة جابجاشده (Staggered grid)



برای حل مشکل بیان شده از شبکه جابجا شده می توان استفاده کرد (Harlow & Welch, 1965).

در این روش متغیرهای اسکالر در نقاط گرهی معمولی محاسبه و ذخیره می شوند و سرعت ها

P-cell
u - cell
v - cell

روی شبکه جابجا شده متمرکز در اطراف وجوه

سلول می باشد. به عبارتی حجم های کنترل مولفه

های سرعت با یکدیگر و با حجم های کنترل اسکالر

ها متفاوتند.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_P - p_W}{\delta x_u}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_P - p_S}{\delta y_v}$$

Solution algorithms for pressure-velocity coupling in steady flows



معادلات اندازه حرکت برای محاسبه میدان سرعت (میدان فشار معلوم)

برای محاسبه میدان سرعت می توان از شبکه های سرعت جابجا شده پسر و یا پیشرو استفاده کرد. در اسلاید قبل، شبکه جابجا شده پسر و استفاده شده است، به همین دلیل موقعیت i مربوط به سرعت u یعنی $u_{i,J}$ در فاصله $-1/2\delta x_u$ از گره اسکالر (I,J) قرار دارد. همچنین موقعیت j مربوط به سرعت v یعنی $v_{I,j}$ در فاصله $-1/2\delta y_v$ از گره اسکالر (I,J) قرار دارد. بنابراین معادله گسسته شده اندازه حرکت u در سیستم مختصات جدید اشاره شده، به شکل زیر نشان داده می شود:

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{p_{I,J} - p_{I-1,J}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u$$

or

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J})A_{i,J} + b_{i,J}$$

در معادلات فوق: ΔV_u حجم سلول u ، $b_{i,J} = \bar{S} \Delta V_u$ بخش چشمه اندازه حرکت و $A_{i,J}$ سطح وجه (غربی یا شرقی) سلول مربوط به حجم کنترل u است.

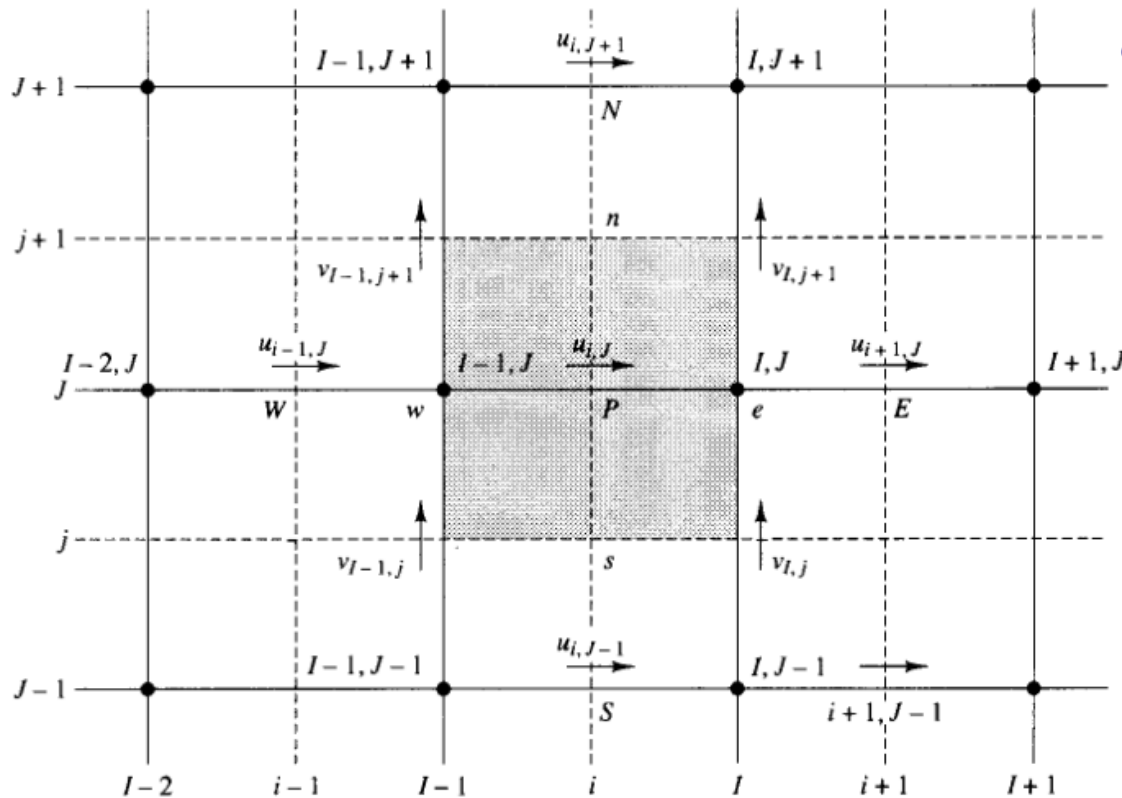
عبارت چشمه شیب فشار با درونیابی خطی بین گره های فشار واقع در مرزهای حجم کنترل u ، گسسته شده است.



معادلات اندازه حرکت برای محاسبه میدان سرعت (میدان فشار معلوم)

در سیستم شماره گذاری جدید، همسایه های W, E, N, S که در $\sum a_{nb} u_{nb}$ قرار دارند عبارتند از:

$(i-1, J), (i+1, J), (i, J+1)$ and $(i, J-1)$



A u -control volume and its neighbouring velocity components

مقادیر ضرایب a_{nb} و $a_{i,J}$ ممکن است با هریک از روش های گسسته سازی استفاده شده در مسائل انتشار-انتقال همانند اختلاف مرکزی، بالادست، پیوندی و ... قابل محاسبه باشند.
(با فرض معلوم بودن فشار)

با توجه به شبکه جابجا شده، مقادیر D و F هریک از وجوه E, W, N, S مربوط به حجم کنترل U به صورت معادلات اسلاید بعدی خواهند بود.



معادلات اندازه حرکت برای محاسبه میدان سرعت (میدان فشار معلوم)

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{l,j} + \rho_{l-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{l-1,j} + \rho_{l-2,j}}{2} \right) u_{i-1,j} \right]$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{l+1,j} + \rho_{l,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{l,j} + \rho_{l-1,j}}{2} \right) u_{i,j} \right]$$

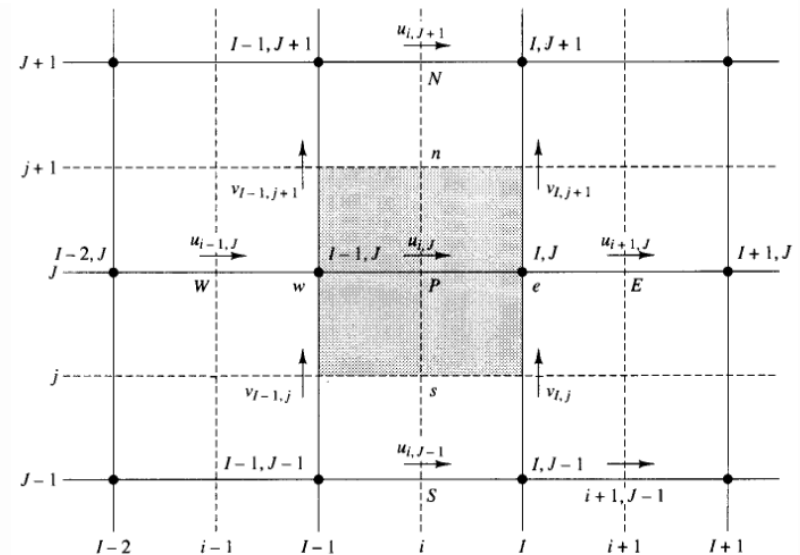
$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{l,j} + F_{l-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{l,j} + \rho_{l,j-1}}{2} \right) v_{l,j} + \left(\frac{\rho_{l-1,j} + \rho_{l-1,j-1}}{2} \right) v_{l-1,j} \right]$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{l,j+1} + F_{l-1,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{l,j+1} + \rho_{l,j}}{2} \right) v_{l,j+1} + \left(\frac{\rho_{l-1,j+1} + \rho_{l-1,j}}{2} \right) v_{l-1,j+1} \right]$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{l-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \quad D_e = \frac{\Gamma_{l,j}}{x_{i+1} - x_i}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{l-1,j} + \Gamma_{l,j} + \Gamma_{l-1,j-1} + \Gamma_{l,j-1}}{4(y_j - y_{j-1})}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{l-1,j+1} + \Gamma_{l,j+1} + \Gamma_{l-1,j} + \Gamma_{l,j}}{4(y_{j+1} - y_j)}$$



A u-control volume and its neighbouring velocity components



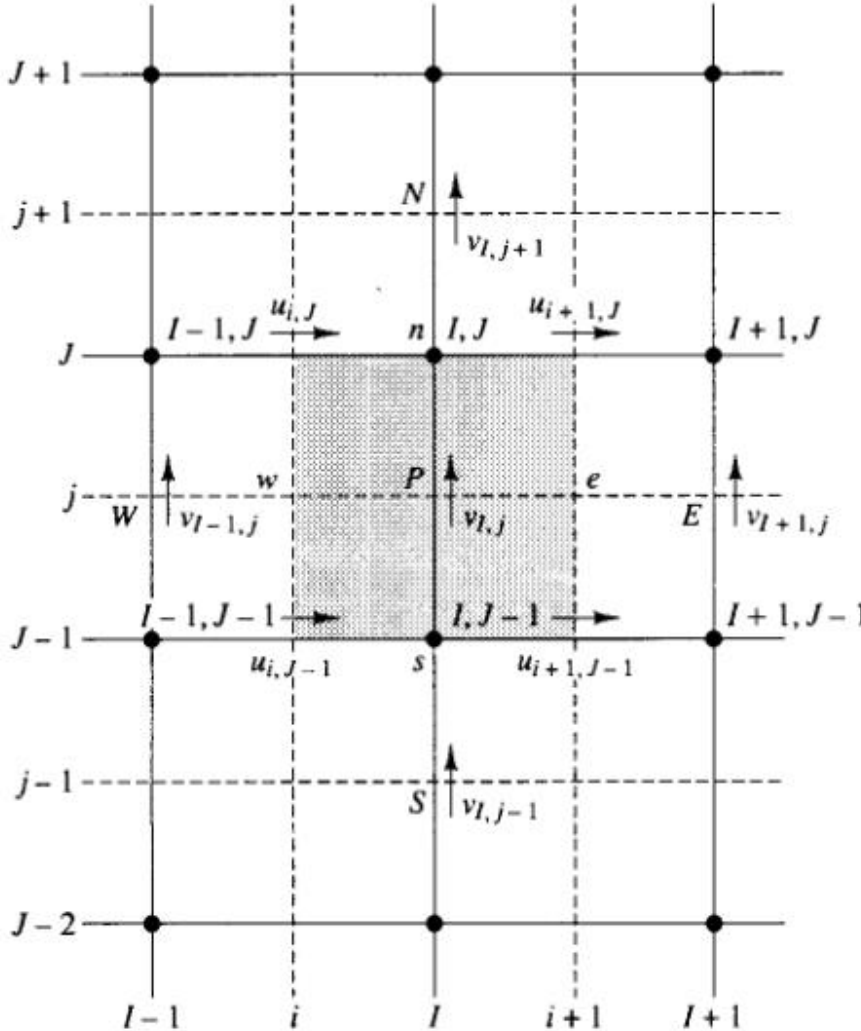
حل معادلات اندازه حرکت برای محاسبه میدان سرعت (میدان فشار معلوم)

نکات:

۱- جاییکه مقادیر اسکالر یا مولفه های سرعت روی وجوه حجم کنترل U در دسترس نباشد، از میانگین دو یا چهار نقطه مناسب بسیار نزدیک که مقادیر آن ها در دسترس است، استفاده می شود.

۲- برای حل میدان سرعت، ابتدا سرعت های حدسی در معادلات F قرار می گیرند و سپس گسسته سازی معادلات مومنتم انجام و دستگاه معادلات حل می شود؛ در تکرار بعدی سرعت های جدید در معادلات F جایگزین می شوند و این مسیر تا رسیدن به سرعت های تقریبا برابر در دو تکرار متوالی جلو می رود.

۳- برای سایر معادلات اندازه حرکت نیز همانند معادله اندازه حرکت U عملیات انجام می شود؛



حل معادله اندازه حرکت V :

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (p_{I,J-1} - p_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j}$$

A v -control volume and its neighbouring velocity components



معادلات اندازه حرکت برای محاسبه میدان سرعت (میدان فشار معلوم)



$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,J} + F_{i,J-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,J} + \rho_{I-1,J}}{2} \right) u_{i,J} + \left(\frac{\rho_{I-1,J-1} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) u_{i,J-1} \right]$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,J} + F_{i+1,J-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I+1,J} + \rho_{I,J}}{2} \right) u_{i+1,J} + \left(\frac{\rho_{I,J-1} + \rho_{I+1,J-1}}{2} \right) u_{i+1,J-1} \right]$$

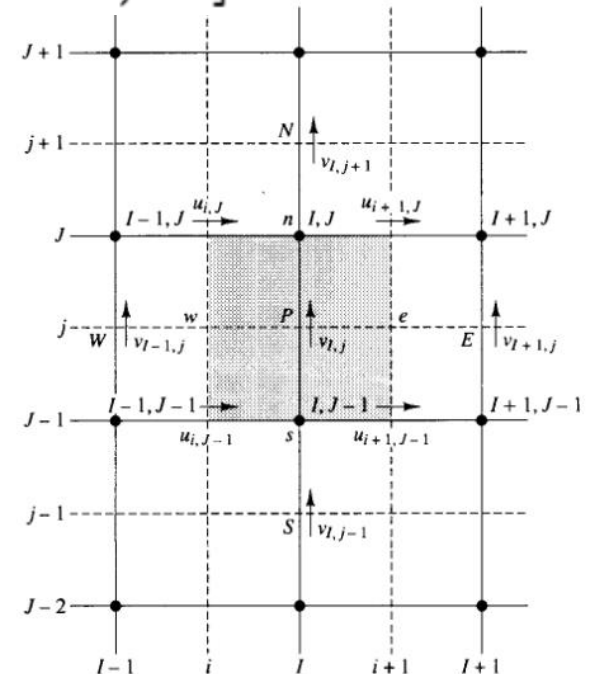
$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{I,j-1} + F_{I,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,J-1} + \rho_{I,J-2}}{2} \right) v_{I,j-1} + \left(\frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) v_{I,j} \right]$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{I,j} + F_{I,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}}{2} \right) v_{I,j} + \left(\frac{\rho_{I,J+1} + \rho_{I,J}}{2} \right) v_{I,j+1} \right]$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,J-1} + \Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I-1,J} + \Gamma_{I,J}}{4(x_I - x_{I-1})}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,J-1} + \Gamma_{I+1,J-1} + \Gamma_{I,J} + \Gamma_{I+1,J}}{4(x_{I+1} - x_I)}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I,J-1}}{y_j - y_{j-1}} \quad D_n = \frac{\Gamma_{I,J}}{y_{j+1} - y_j}$$



A v-control volume and its neighbouring velocity components



حل معادلات اندازه حرکت برای محاسبه میدان سرعت و فشار



* الگوریتم SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)

روش حدس و تصحیح برای فشار است که روی شبکه جابجا شده عمل می شود. مراحل حل به شکل زیر می باشد:

۱- یک میدان فشار حدس زده می شود (P^*) ؛

۲- معادلات اندازه حرکت با معلوم بودن فشار (حدسی)، گسسته سازی و سپس دستگاه معادلات گسسته حل می شود تا مولفه های سرعت (u^*, v^*) بدست آیند؛ (در زیر معادلات جریان دائم و آرام دوبعدی تشریح شده است)

$$a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j}$$

$$a_{I,j} v_{I,j}^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_{I,j-1}^* - p_{I,j}^*) A_{I,j} + b_{I,j}$$

۳- تصحیح P', u', v' به صورت اختلاف بین میدان فشار یا سرعت صحیح و حدسی تعریف می شود؛

$$p = p^* + p' \quad u = u^* + u' \quad v = v^* + v'$$



۴- با کسر معادلات گسسته صحیح از معادلات گسسته حدسی خواهیم داشت:

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j})A_{i,j} + b_{i,j}$$

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{I-1,j}^* - p_{I,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j}$$

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + \left[(p_{I-1,j} - p_{I-1,j}^*) - (p_{I,j} - p_{I,j}^*) \right] A_{i,j}$$

و بطور مشابه:

$$a_{I,j}(v_{I,j} - v_{I,j}^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + \left[(p_{I,j-1} - p_{I,j-1}^*) - (p_{I,j} - p_{I,j}^*) \right] A_{I,j}$$

۵- با جایگذاری معادلات تصحیح P', u', v' در معادلات فوق خواهیم داشت:

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (p'_{I-1,j} - p'_{I,j})A_{i,j}$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (p'_{I,j-1} - p'_{I,j})A_{I,j}$$



۶- برای ساده تر شدن، عبارات سیگما در معادلات مرحله ۵ حذف می شود؛ که این عمل تقریب اصلی الگوریتم SIMPLE می باشد؛ و بنابراین داریم:

$$u'_{i,J} = d_{i,J} (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})$$

$$v'_{I,j} = d_{I,j} (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})$$

$$\text{where } d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}} \text{ and } d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}$$

۷- با جایگذاری معادلات فوق در معادلات تصحیح u' ، v' (مرحله ۳) خواهیم داشت:

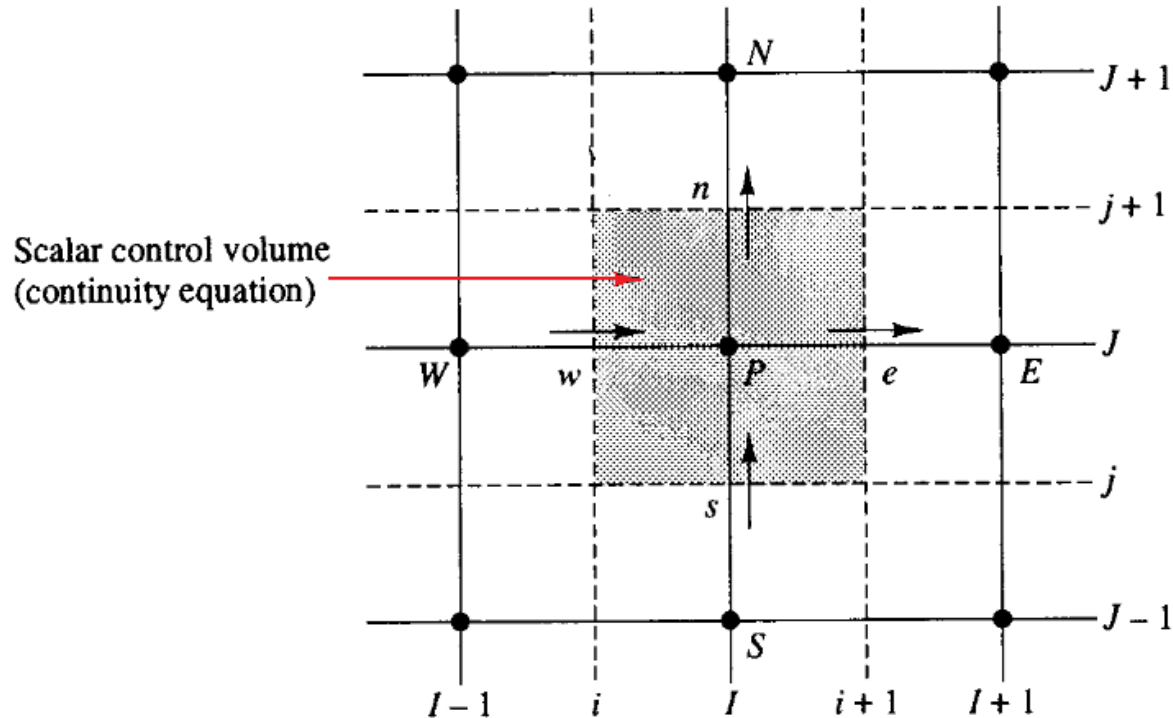
$$u_{i,J} = u_{i,J}^* + d_{i,J} (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})$$

$$v_{I,j} = v_{I,j}^* + d_{I,j} (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})$$



۸- در این مرحله نوبت به گسسته سازی معادله پیوستگی روی شبکه جابجا شده همانند زیر می باشد:

$$\left[(\rho u A)_{i+1, J} - (\rho u A)_{i, J} \right] + \left[(\rho v A)_{I, j+1} - (\rho v A)_{I, j} \right] = 0$$



The scalar control volume used for the discretisation of the continuity equation



۹- با جایگذاری سرعت های تصحیح شده (مرحله ۷) در معادله پیوستگی گسسته شده (مرحله ۸) داریم:

$$\left[\rho_{i+1,J} A_{i+1,J} \left(u_{i+1,J}^* + d_{i+1,J} (p'_{I,J} - p'_{I+1,J}) \right) - \rho_{i,J} A_{i,J} \left(u_{i,J}^* + d_{i,J} (p'_{I-1,J} - p'_{I,J}) \right) \right] +$$

$$\left[\rho_{I,j+1} A_{I,j+1} \left(v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1} (p'_{I,J} - p'_{I,J+1}) \right) - \rho_{I,j} A_{I,j}^* \left(v_{I,j}^* + d_{I,j} (p'_{I,J-1} - p'_{I,J}) \right) \right] = 0$$

و پس از بازنویسی مجدد:

$$\left[(\rho d A)_{i+1,J} + (\rho d A)_{i,J} + (\rho d A)_{I,j+1} + (\rho d A)_{I,j} \right] p'_{I,J} =$$

$$(\rho d A)_{i+1,J} p'_{I+1,J} + (\rho d A)_{i,J} p'_{I-1,J} + (\rho d A)_{I,j+1} p'_{I,J+1} + (\rho d A)_{I,j} p'_{I,J-1}$$

$$+ \left[(\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1} \right]$$



الگوریتم SIMPLE



۱۰- ضرایب P' را به شکل عمومی همانند زیر در نظر می گیریم:

$$a_{I,J} p'_{I,J} = a_{I+1,J} p'_{I+1,J} + a_{I-1,J} p'_{I-1,J} + a_{I,J+1} p'_{I,J+1} + a_{I,J-1} p'_{I,J-1} + b'_{I,J}$$

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}$$

که در آن:

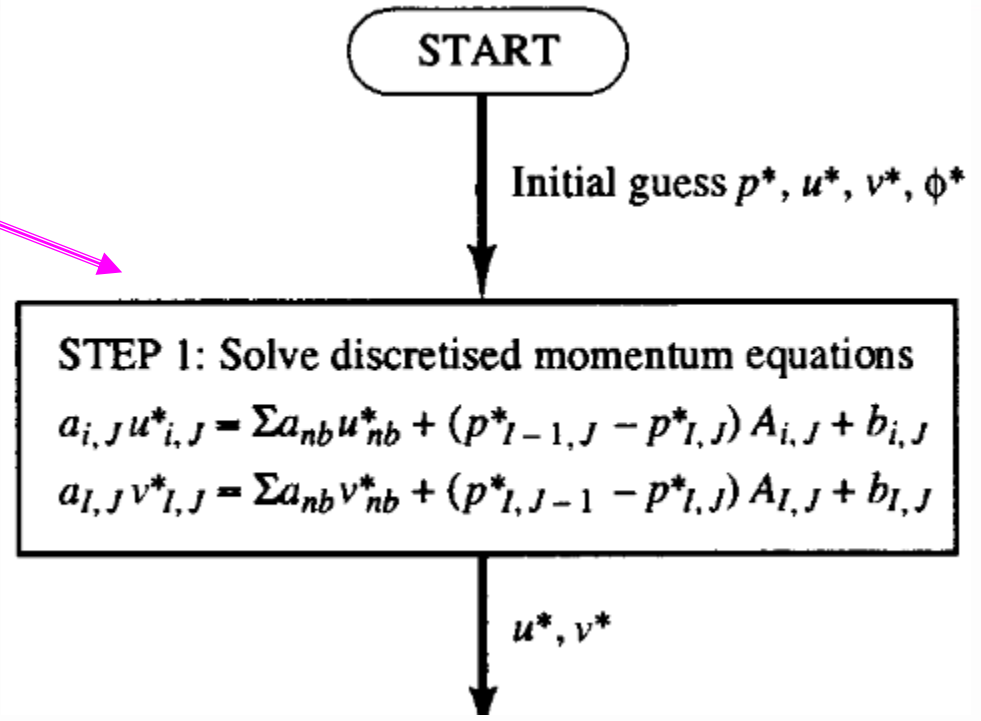
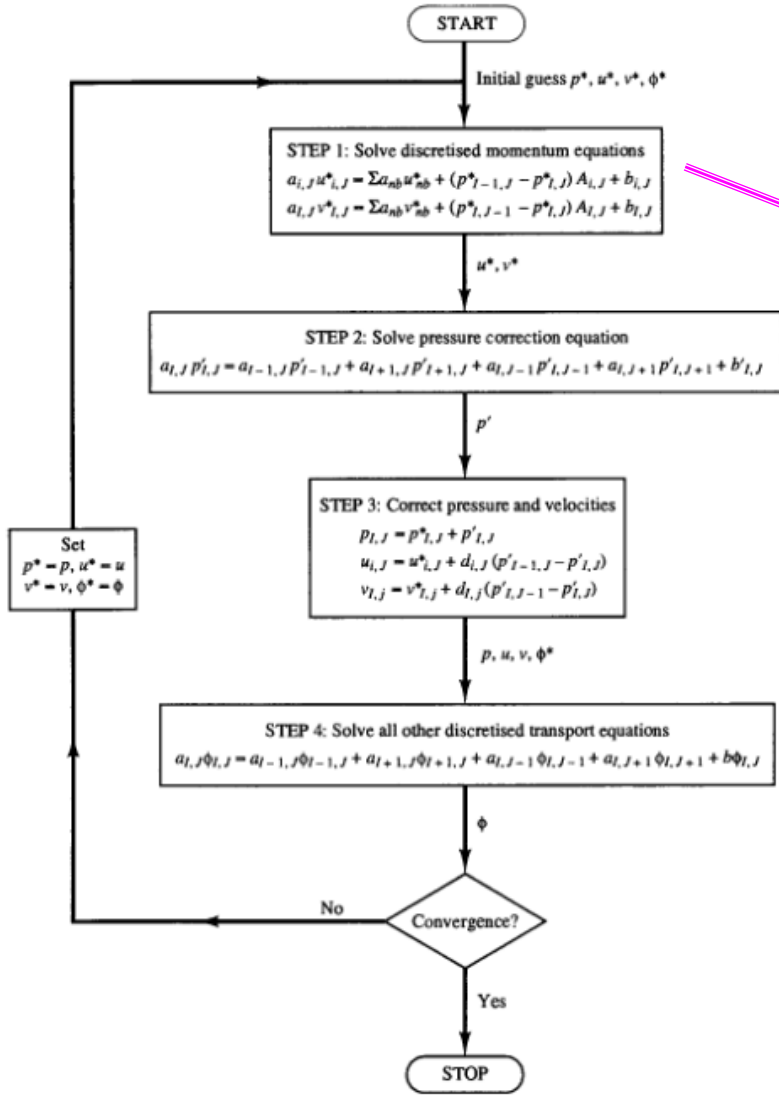
$a_{I+1,J}$	$a_{I-1,J}$	$a_{I,J+1}$	$a_{I,J-1}$
$(\rho dA)_{i+1,J}$	$(\rho dA)_{i,J}$	$(\rho dA)_{I,j+1}$	$(\rho dA)_{I,j}$

$$b'_{I,J}$$

$$(\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}$$

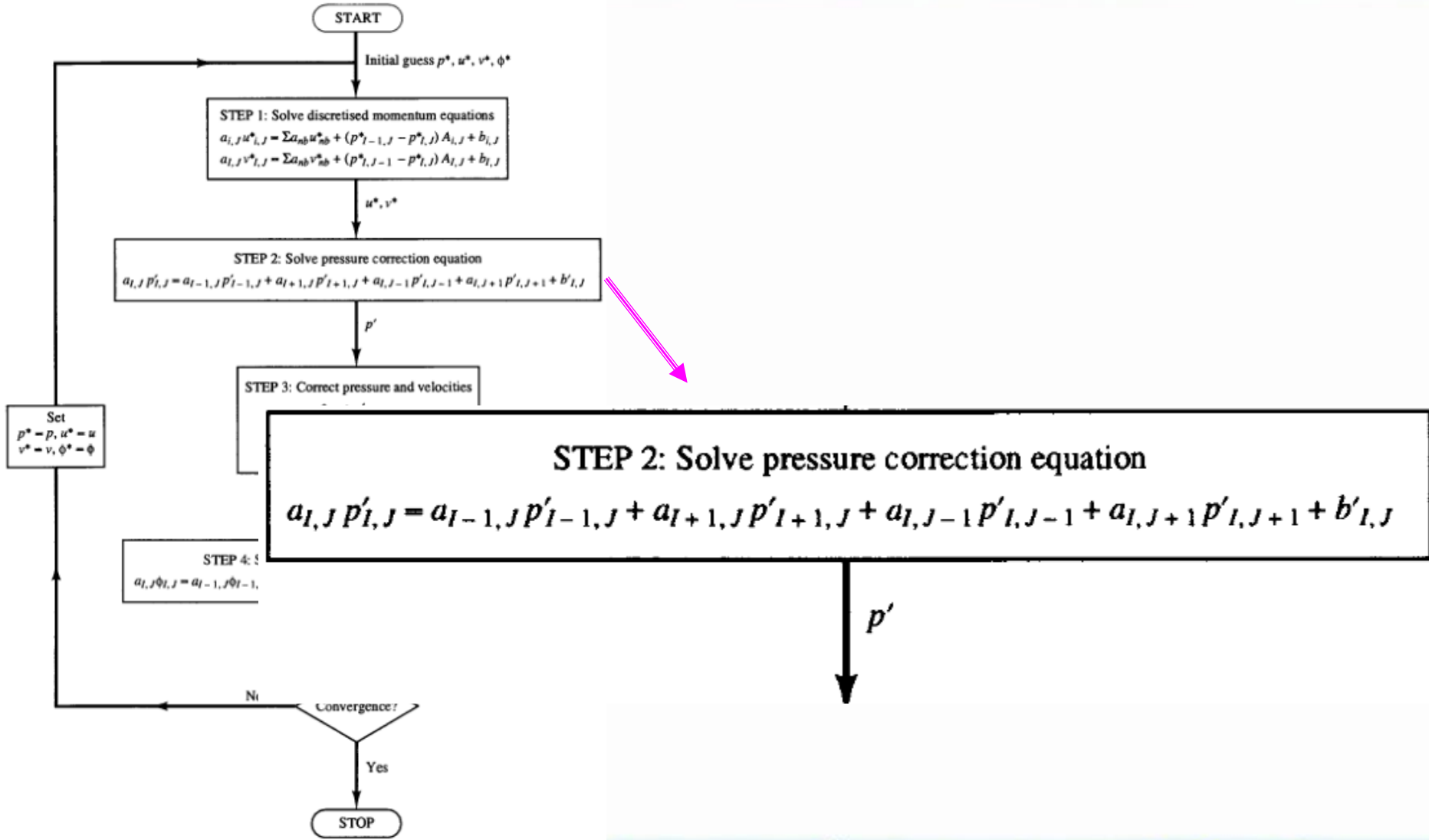


الگوریتم SIMPLE





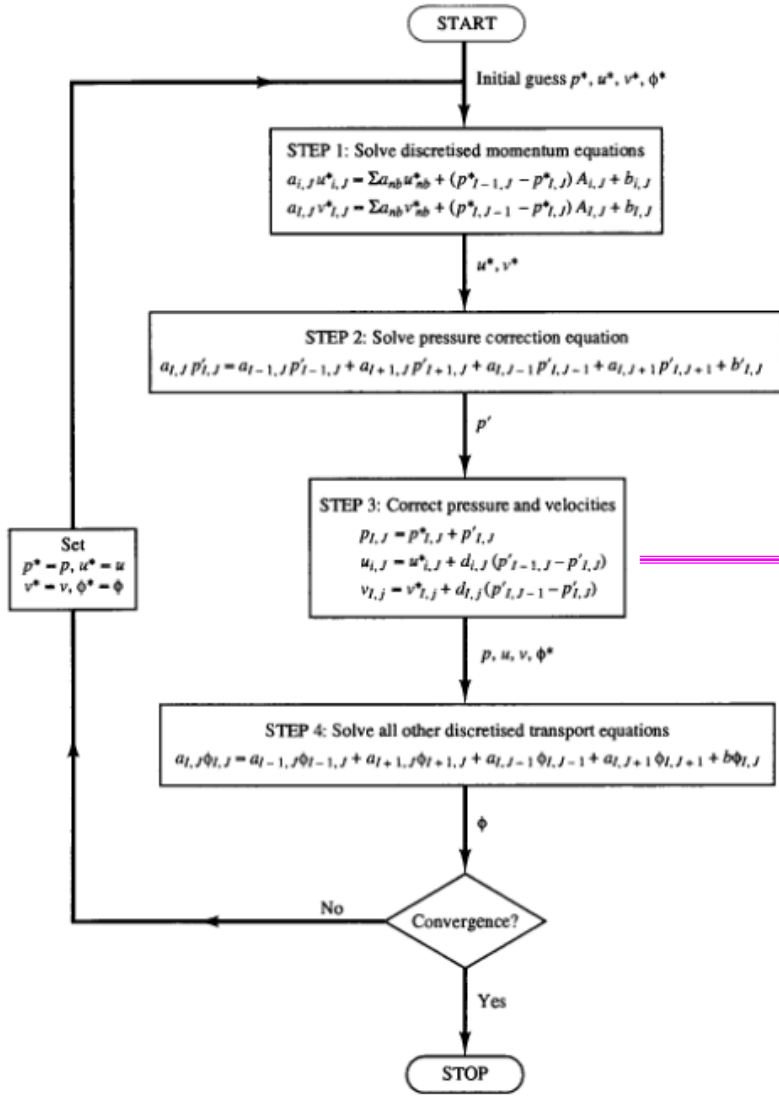
الگوریتم ساده





الگوریتم ساده

SIMPLE



STEP 3: Correct pressure and velocities

$$p_{i,j} = p_{i,j}^* + p'_{i,j}$$

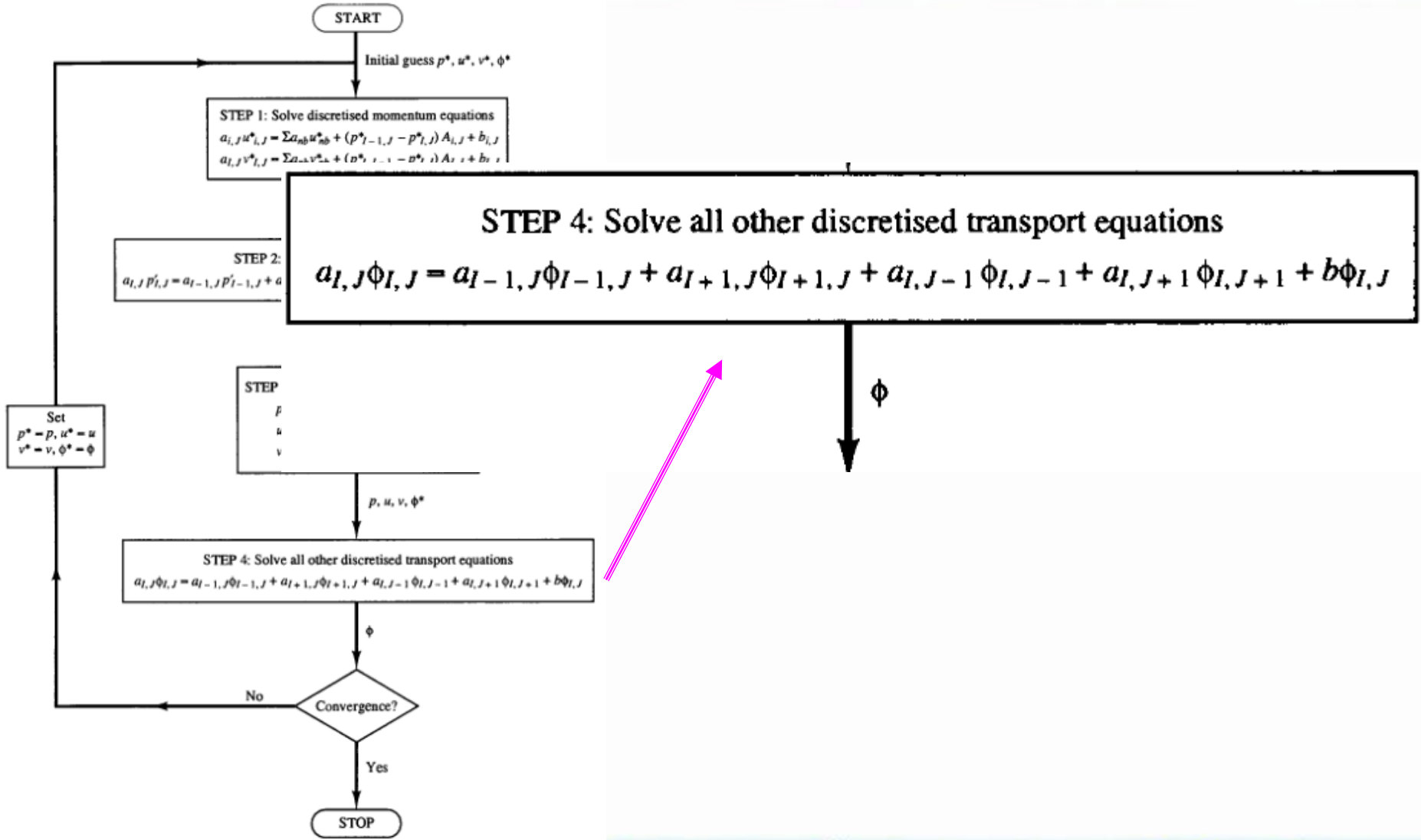
$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + d_{i,j} (p'_{i-1,j} - p'_{i,j})$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^* + d_{i,j} (p'_{i,j-1} - p'_{i,j})$$

p, u, v, ϕ^*

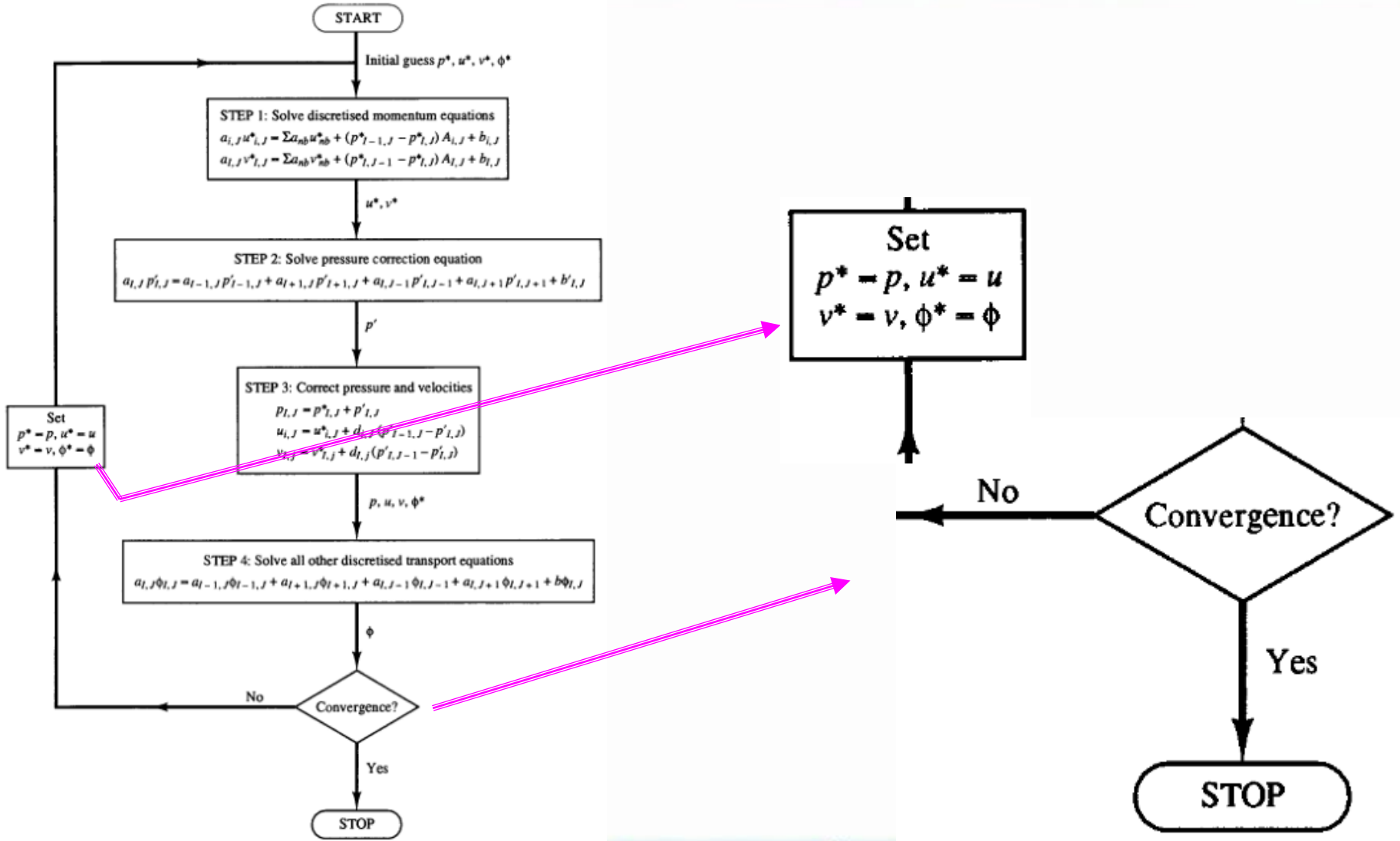


الگوریتم ساده





الگوریتم SIMPLE





الگوریتم SIMPLE و ضریب مادون رهائی Under-relaxation

معادله تصحیح فشار P' (مرحله ۱۰) تمایل به واگرایی دارد مگر اینکه در طول فرایند تکرار از ضریب مادون رهائی استفاده شود. این ضریب بین ۰ و ۱ است و هرچه کوچکتر باشد همگرایی بیشتر است ولی زمان محاسبات طولانی تر خواهد بود. با بکار بردن این ضریب معادلات به شکل زیر تغییر می کنند:

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p'$$

$$u^{new} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \quad v^{new} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)}$$

که در آن توان $n-1$ برای سرعت ها نشان دهنده مقادیر بدست آمده آن ها در تکرار قبلی است. و برای معادلات کسسته اندازه حرکت داریم:

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_u} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + \left[(1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{\alpha_u} \right] u_{i,j}^{(n-1)}$$

$$\frac{a_{I,j}}{\alpha_v} v_{I,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{I,j-1} - p_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j} + \left[(1 - \alpha_v) \frac{a_{I,j}}{\alpha_v} \right] v_{I,j}^{(n-1)}$$

در معادله تصحیح فشار نیز عبارات d به شکل زیر تعریف می کنند:

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j} \alpha_u}{a_{i,j}}, \quad d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j} \alpha_u}{a_{i+1,j}}, \quad d_{I,j} = \frac{A_{I,j} \alpha_v}{a_{I,j}}, \quad d_{I,j+1} = \frac{A_{I,j+1} \alpha_v}{a_{I,j+1}}$$



الگوریتم SIMPLER



$$\hat{u}_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}}$$

$$\hat{v}_{I,j} = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_{I,j}}{a_{I,j}}$$

۱- سرعت های غیر واقعی به شکل زیر تعریف می شوند:

۲- با جایگذاری سرعت های فوق در معادلات گسسته اندازه حرکت خواهیم داشت:

$$u_{i,j} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_{i,j}}{a_{i,j}} + \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} (p_{I-1,j} - p_{I,j})$$

$$v_{I,j} = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_{I,j}}{a_{I,j}} + \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}} (p_{I,j-1} - p_{I,j})$$



$$u_{i,j} = \hat{u}_{i,j} + d_{i,j} (p_{I-1,j} - p_{I,j})$$

$$v_{I,j} = \hat{v}_{I,j} + d_{I,j} (p_{I,j-1} - p_{I,j})$$



الگوریتم SIMPLER



۳- با جایگذاری در معادله پیوستگی گسسته خواهیم داشت:

$$\left[(\rho u A)_{i+1, J} - (\rho u A)_{i, J} \right] + \left[(\rho v A)_{I, j+1} - (\rho v A)_{I, j} \right] = 0$$

$$\left[\rho_{i+1, J} A_{i+1, J} (\hat{u}_{i+1, J} + d_{i+1, J} (p_{I, J} - p_{I+1, J})) - \rho_{i, J} A_{i, J} (\hat{u}_{i, J} + d_{i, J} (p_{I-1, J} - p_{I, J})) \right]$$

$$+ \left[\rho_{I, j+1} A_{I, j+1} (\hat{v}_{I, j+1} + d_{I, j+1} (p_{I, J} - p_{I, j+1})) - \rho_{I, j} A_{I, j} (\hat{v}_{I, j} + d_{I, j} (p_{I, j-1} - p_{I, j})) \right] = 0$$

۴- با بازنویسی معادله فوق، معادله فشار گسسته حاصل می شود:

$$a_{I, J} p_{I, J} = a_{I+1, J} p_{I+1, J} + a_{I-1, J} p_{I-1, J} + a_{I, J+1} p_{I, J+1} + a_{I, J-1} p_{I, J-1} + b_{I, J}$$

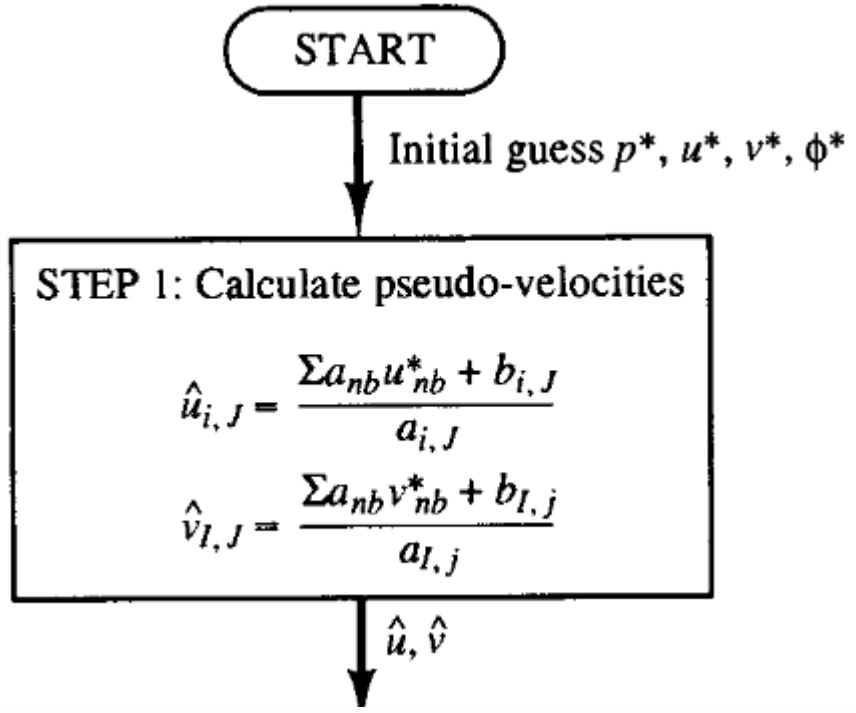
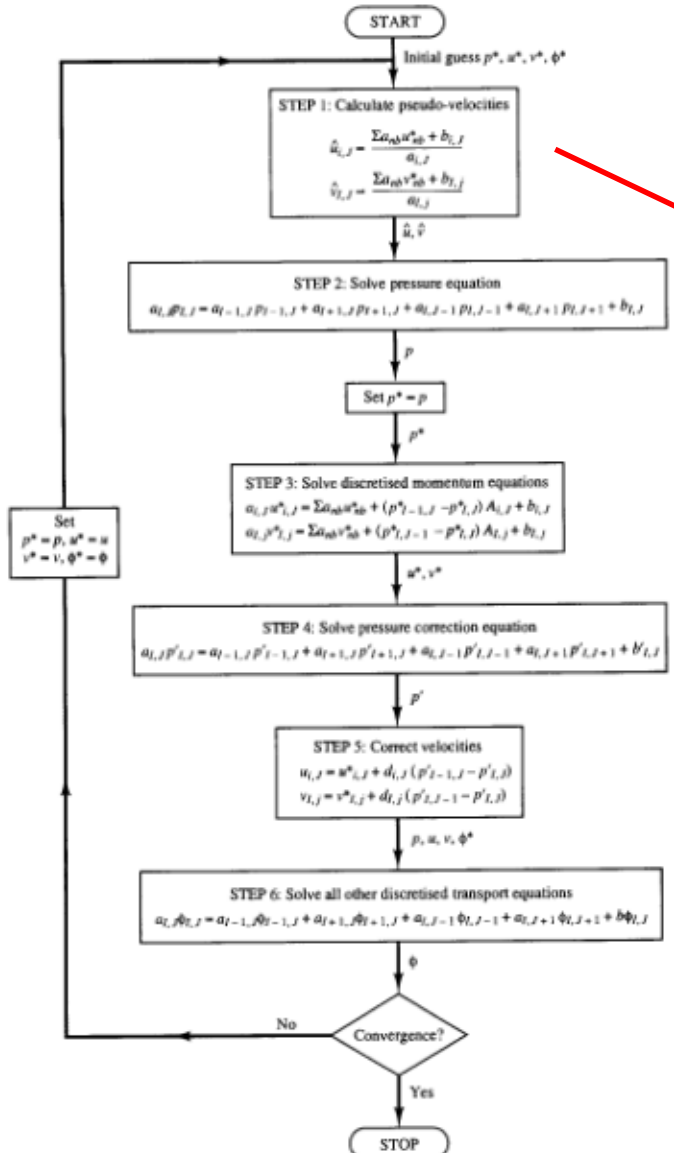
$$a_{I, J} = a_{I+1, J} + a_{I-1, J} + a_{I, J+1} + a_{I, J-1}$$

$a_{I+1, J}$	$a_{I-1, J}$	$a_{I, J+1}$	$a_{I, J-1}$	$b_{I, J}$
$(\rho dA)_{i+1, J}$	$(\rho dA)_{i, J}$	$(\rho dA)_{I, j+1}$	$(\rho dA)_{I, j}$	$(\rho \hat{u} A)_{i, J} - (\rho \hat{u} A)_{i+1, J} + (\rho \hat{v} A)_{I, j} - (\rho \hat{v} A)_{I, j+1}$

ضرایب معادله فوق همانند معادله گسسته تصحیح فشار روش SIMPLE است با این تفاوت که در اینجا بخش چشمه با سرعت های غیر واقعی ارزیابی شده است.

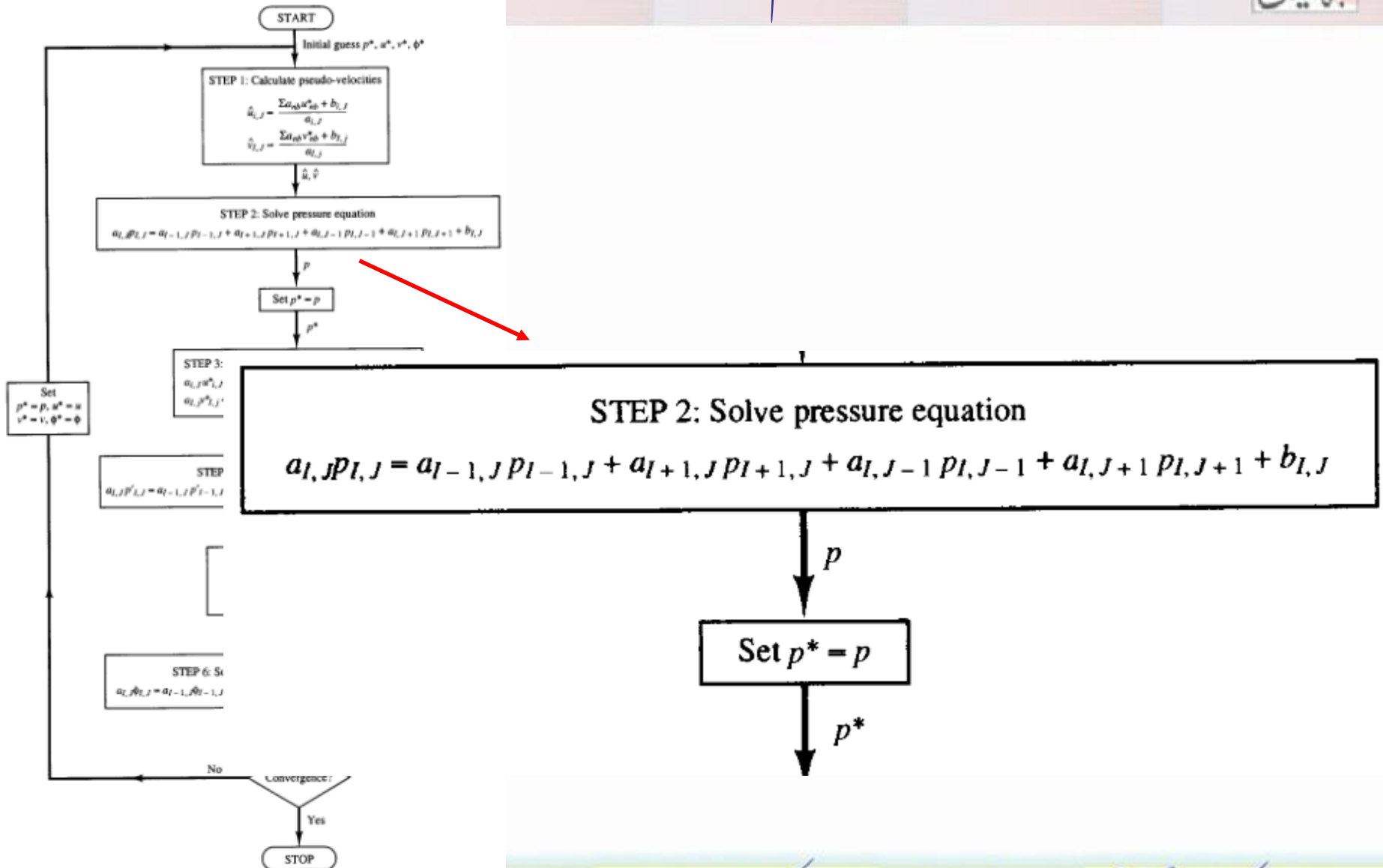


الگوریتم SIMPLER



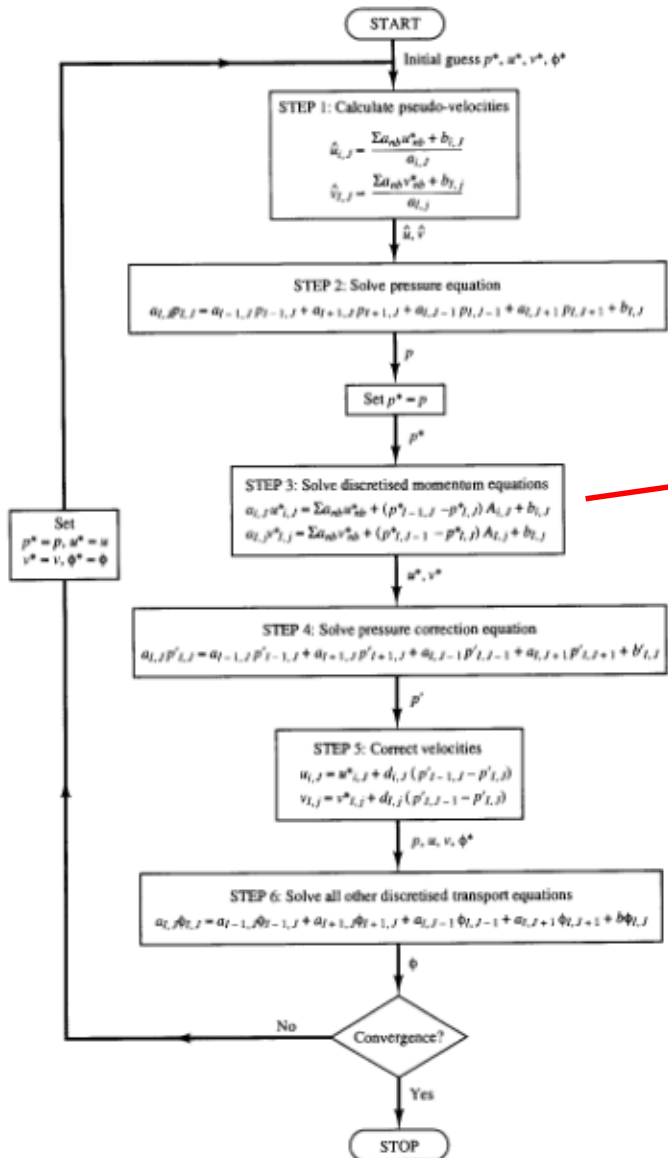


الگوریتم SIMPLER





الگوریتم SIMPLER



STEP 3: Solve discretised momentum equations

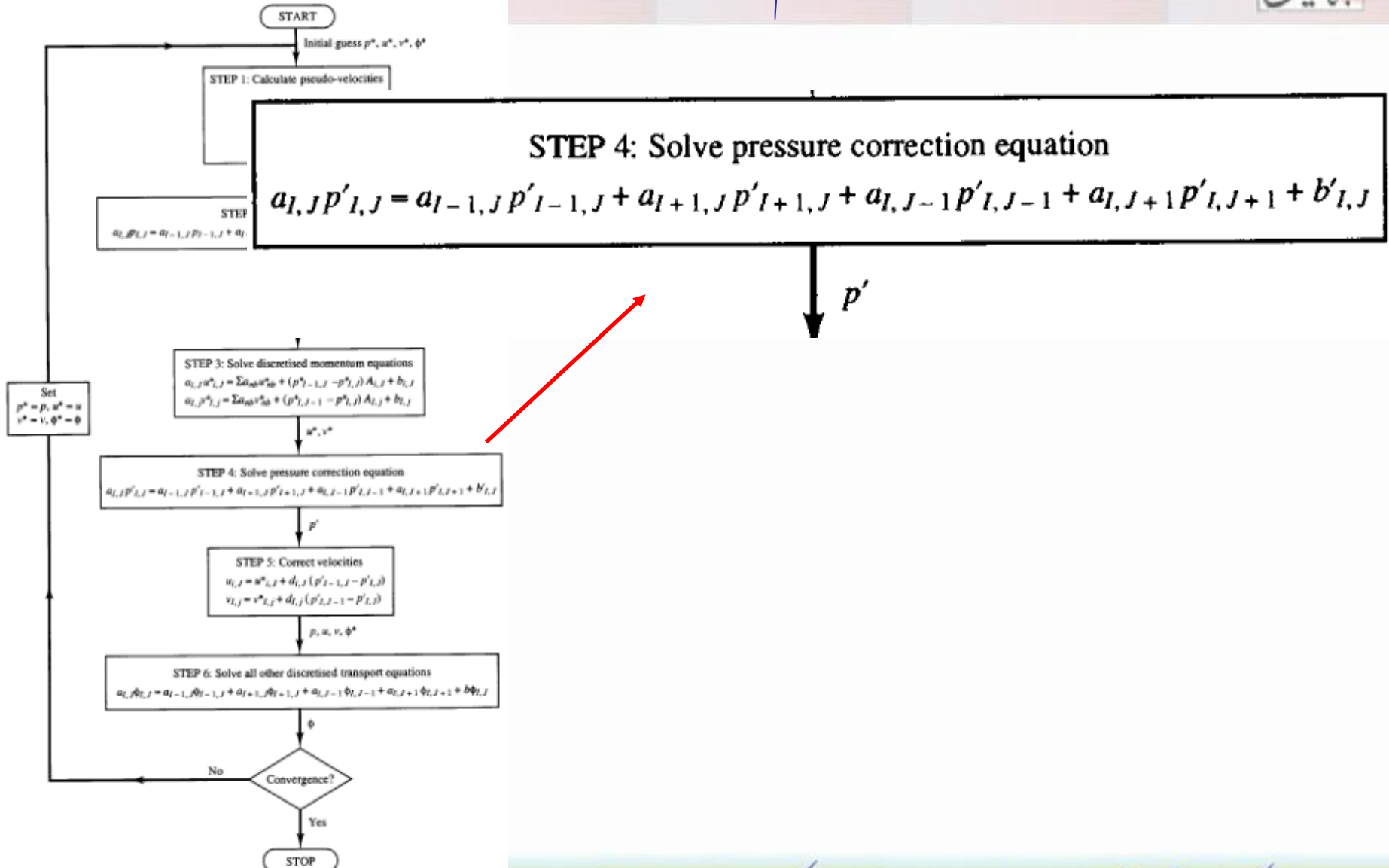
$$a_{i,j} u_{i,j}^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j}$$

$$a_{i,j} v_{i,j}^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*) A_{i,j} + b_{i,j}$$

u^*, v^*

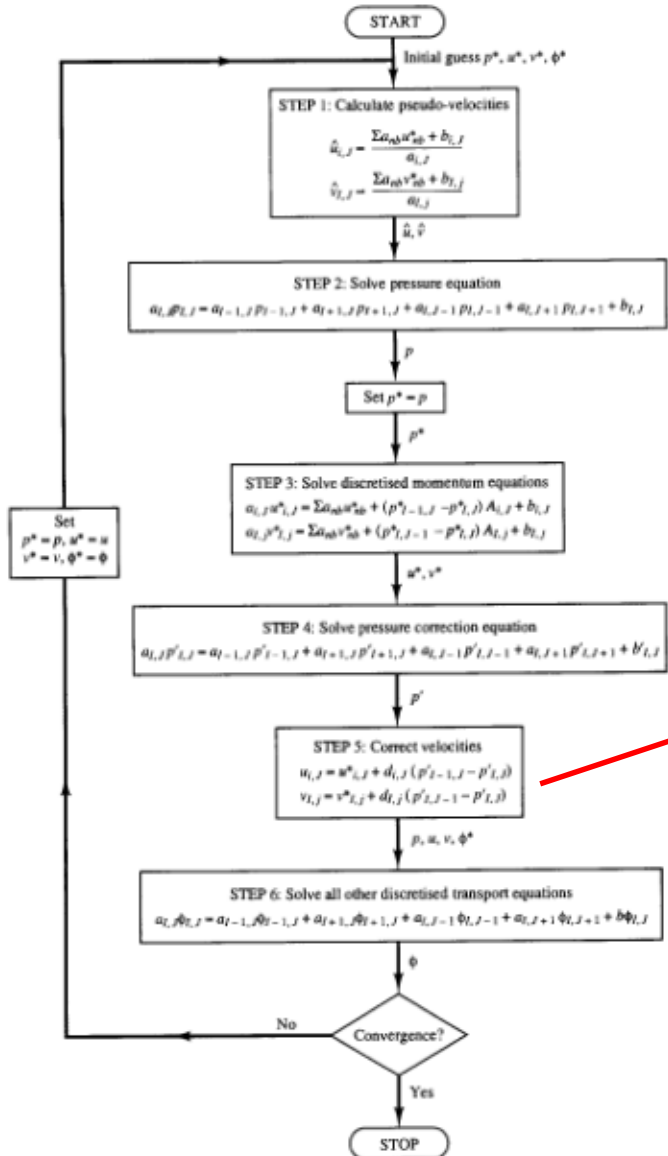


الگوریتم SIMPLER





SIMPLER الگوریتم



STEP 5: Correct velocities

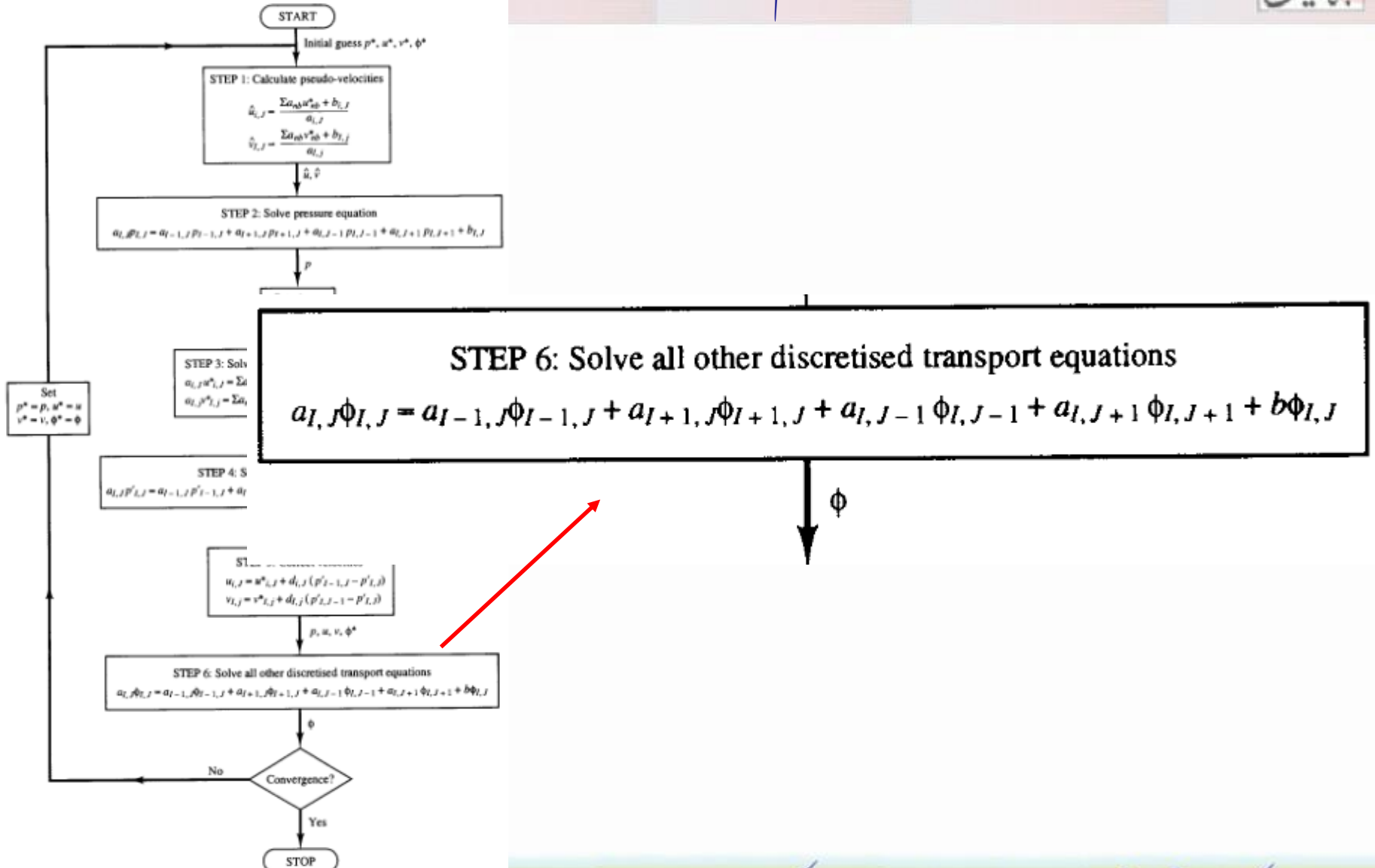
$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{i-1,j} - p'_{i,j})$$

$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{i,j-1} - p'_{i,j})$$

p, u, v, ϕ^*

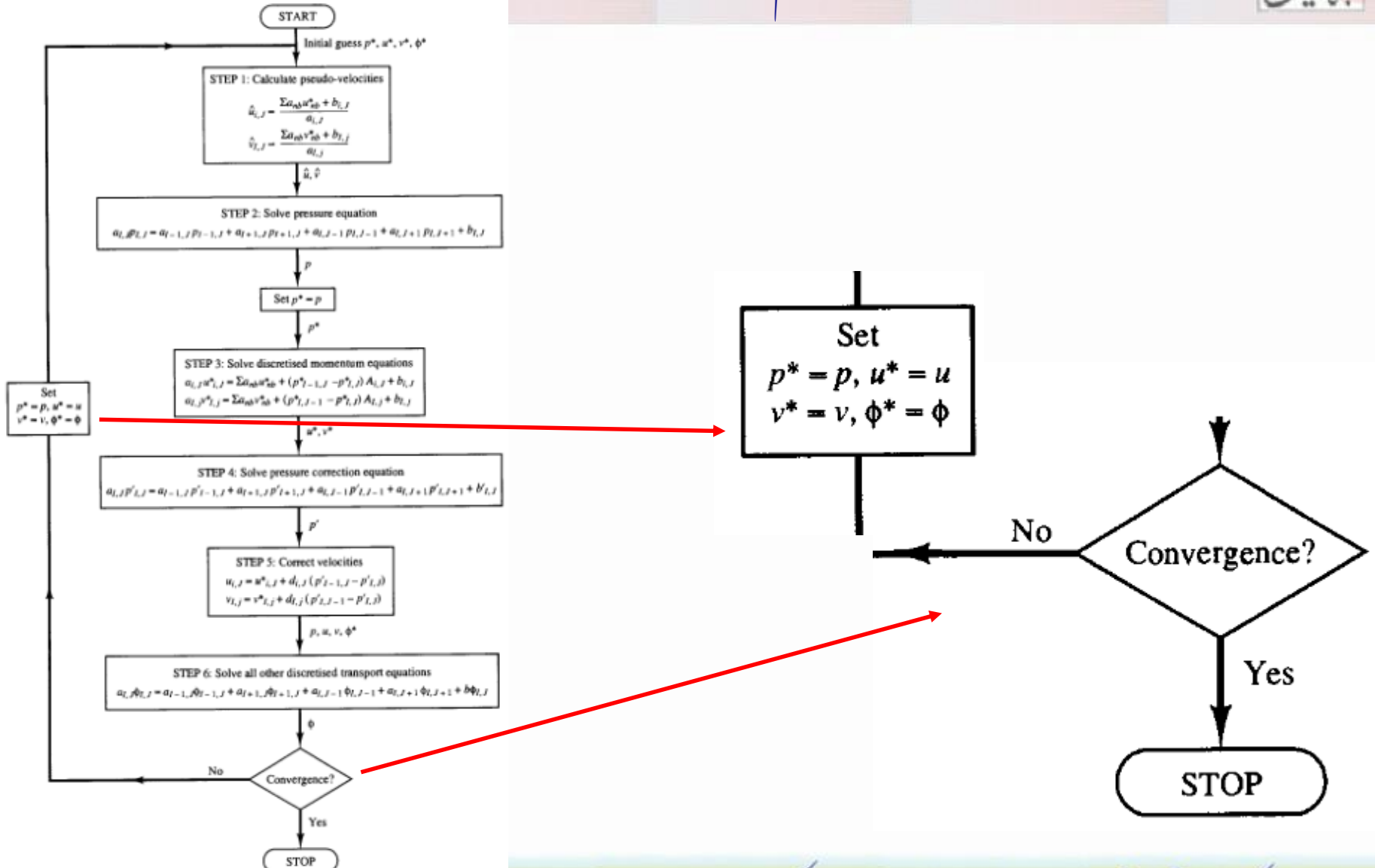


SIMPLER الگوریتم





الگوریتم SIMPLER





فصل دوازدهم

شرایط مرزی

(در روش حجم محدود)



کلیات



کلیه مسائل CFD با شرایط اولیه و مرزی تعریف می شوند و فهم درست آن ها از اصول اصلی الگوریتم عددی است.

❖ شرایط اولیه: در مسائل غیردائم، لازم است مقادیر اولیه تمام متغیرهای جریان در تمامی گره های شبکه مشخص شود که کار چندان مشکلی نیست.

❖ شرایط مرزی: اغلب شرایط مرزی مورد بحث در حجم کنترل عبارتند از؛

✚ ورودی (Inlet)

✚ خروجی (Outlet)

✚ دیوار (Wall)

✚ فشار ثابت (Prescribed pressure)

✚ تقارن (Symmetry)

✚ متناوب یا شرایط مرزی تکراری (Periodicity or cyclic boundary condition)



کلیات



برای تولید یک شبکه جابجا شده، در اطراف مرز فیزیکی، گره های اضافی همانند شکل نمونه زیر ایجاد می کنیم:

نکات:

۱- محاسبات فقط در گره های داخلی یعنی

$I=2$ و $J=2$ به بعد انجام می شود.

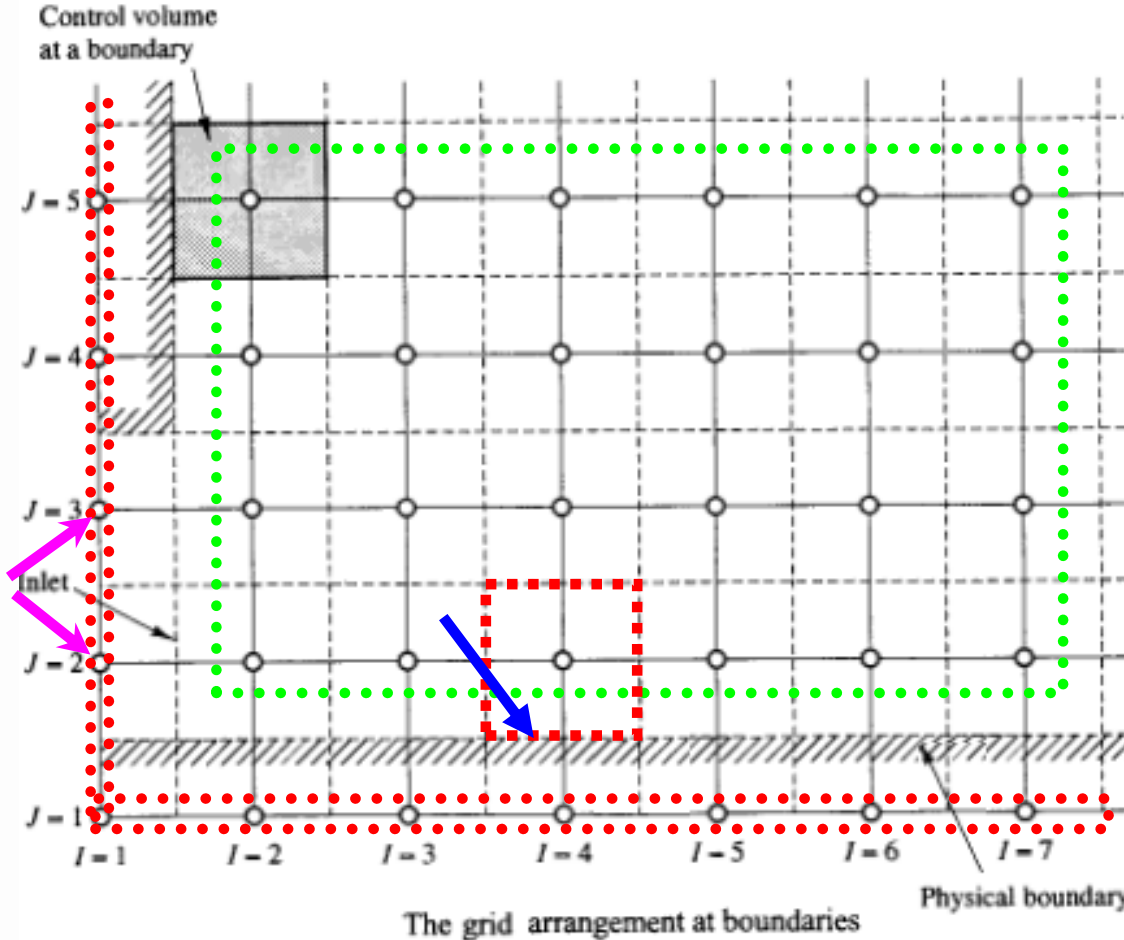
۲- مرزهای فیزیکی با مرزهای حجم کنترل

اسکالر منطبق هستند.

۳- گره های خارجی نزدیک محدوده ورودی

(در راستای $I=1$) برای ذخیره شرایط ورودی

قابل استفاده می باشد.

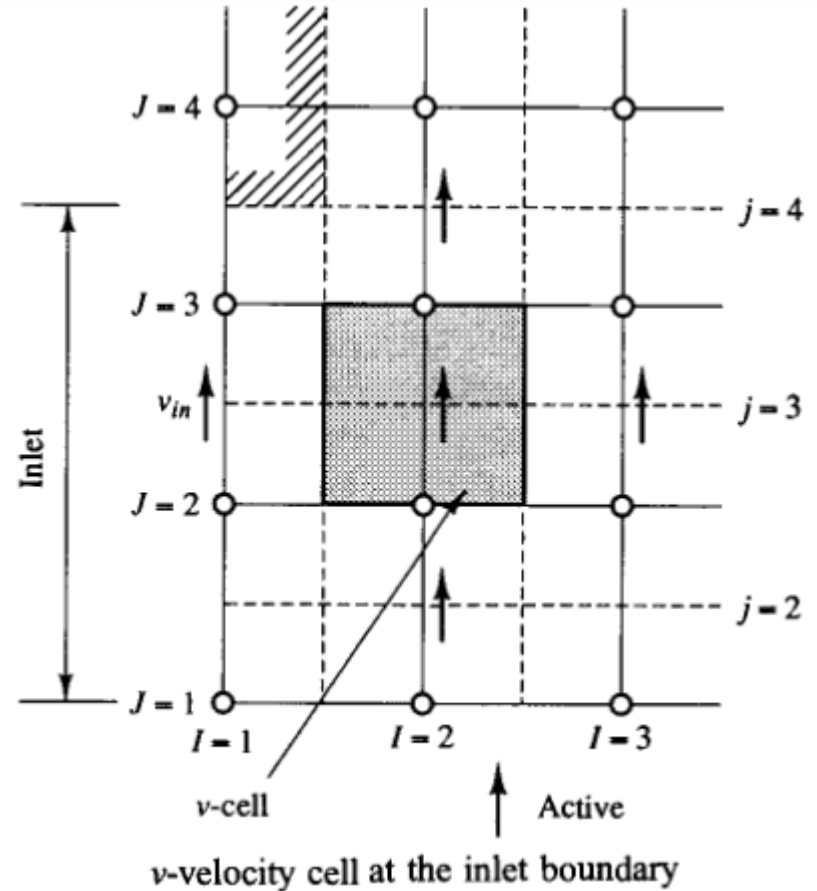
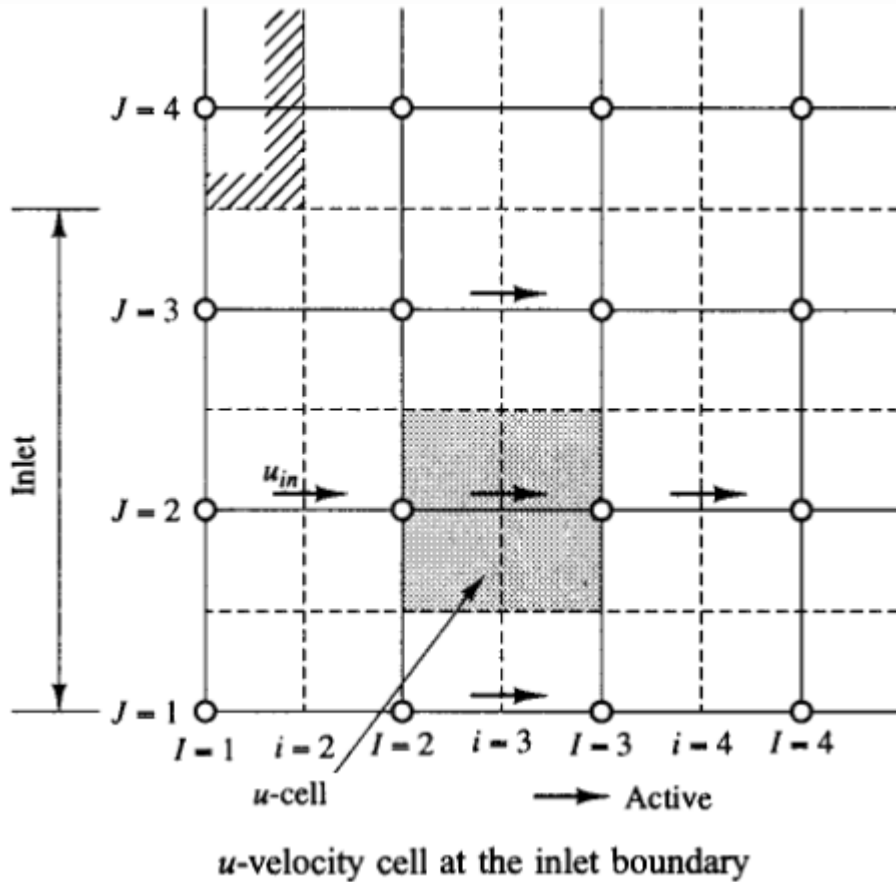




شرایط مرزی ورودی

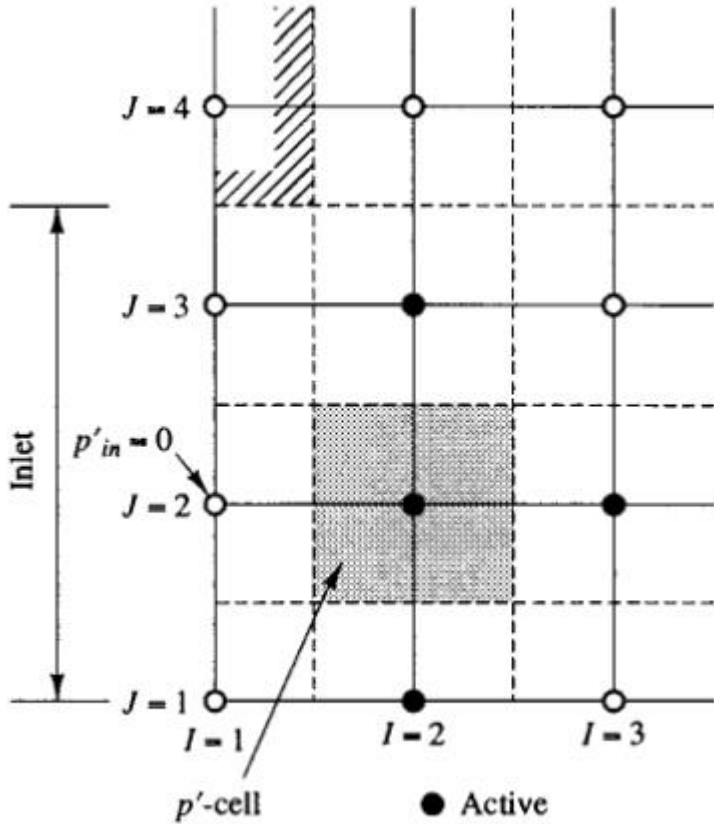


توزیع تمامی متغیرهای جریان نیازمند تعریف آنها در مرزهای ورودی است.

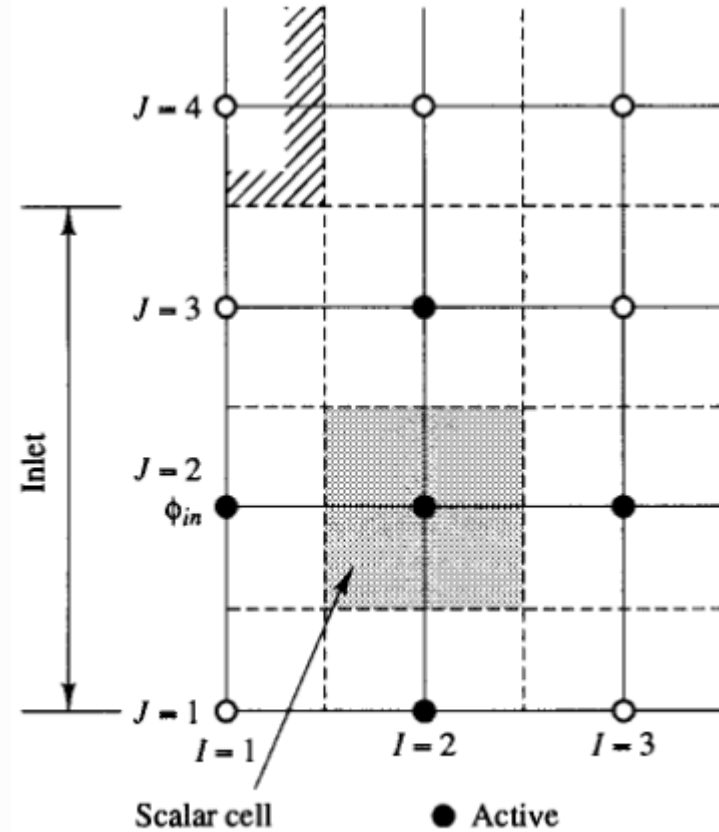




شرایط مرزی ورودی



Pressure correction cell at inlet boundary



Scalar cell at inlet boundary



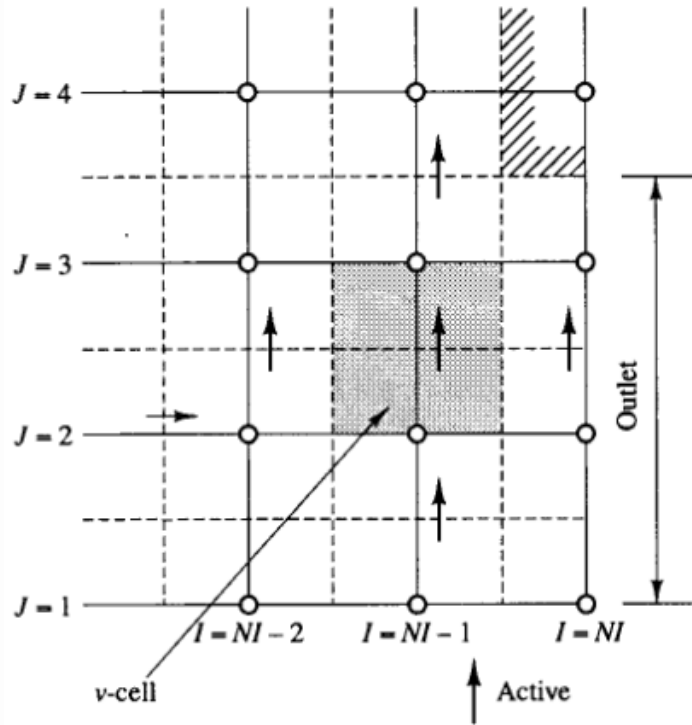
شرایط مرزی خروجی



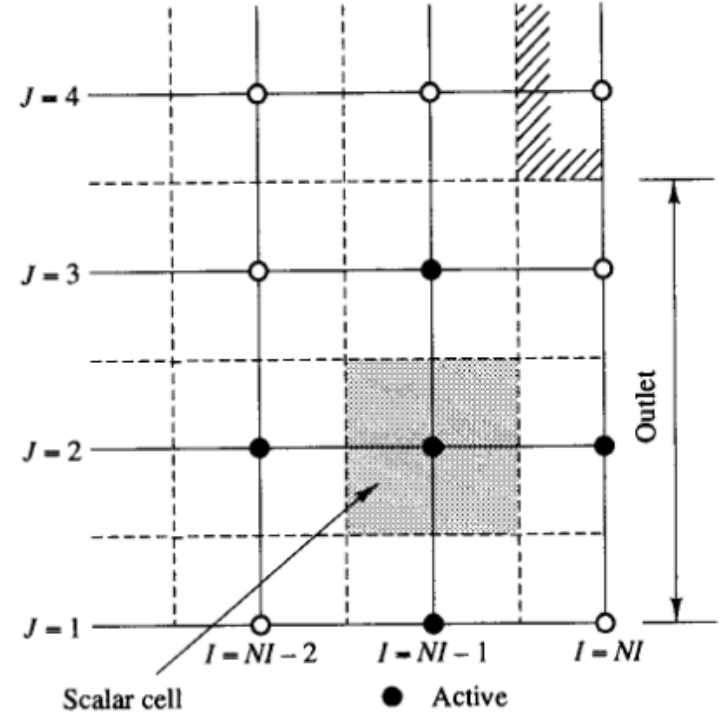
۱- شرایط مرزی خروجی می تواند مانند آنچه برای شرایط مرزی ورودی گفته شد باشد.

۲- برای شرایط مرزی خروجی به شرط فاصله زیاد از موانع، می توان از شرایط مرزی نیومن (گرادیان صفر) در راستای

جریان، بجز برای فشار استفاده کرد. مثلا برای سرعت v و معادله اسکالر داریم: $v_{NI,j} = v_{NI-1,j}$ & $\phi_{NI,J} = \phi_{NI-1,J}$



v-control volume at an outlet boundary



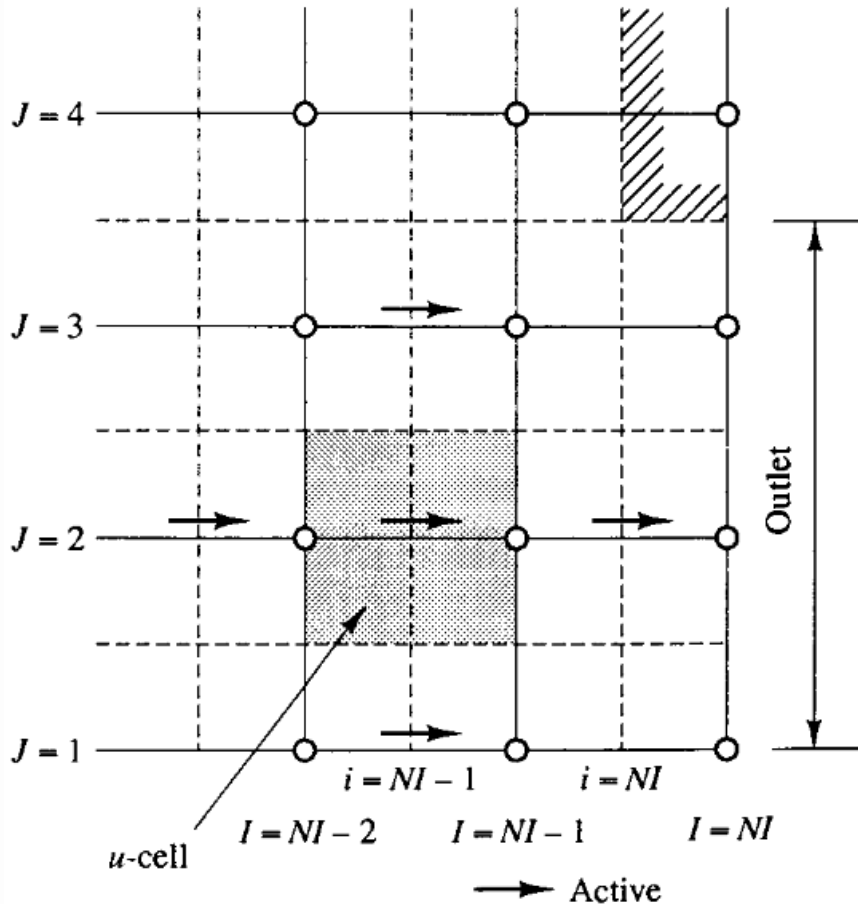
Scalar cell at an outlet boundary



شرایط مرزی خروجی



۳- توجه ویژه ای در مورد سرعت u باید داشت. محاسبه u در $i=NI$ با فرض گرادیان صفر می دهد: $u_{NI, J} = u_{NI-1, J}$



u-control volume at an outlet boundary

در طی تکرار حلقه های مربوط به الگوریتم SIMPLE هیچ تضمینی نیست که سرعت های حاصل شده، بقای جرم را در محدوده محاسباتی حفظ کند. لذا لازم است بجای فرمول فوق از معادله تصحیح پیوستگی به شکل زیر استفاده کرد:

$$u_{NI, J} = u_{NI-1, J} \times \frac{M_{in}}{M_{out}}$$

که در آن M_{in} و M_{out} به ترتیب شار جرمی جریان خروجی و ورودی به ناحیه در تکرار قبلی است.

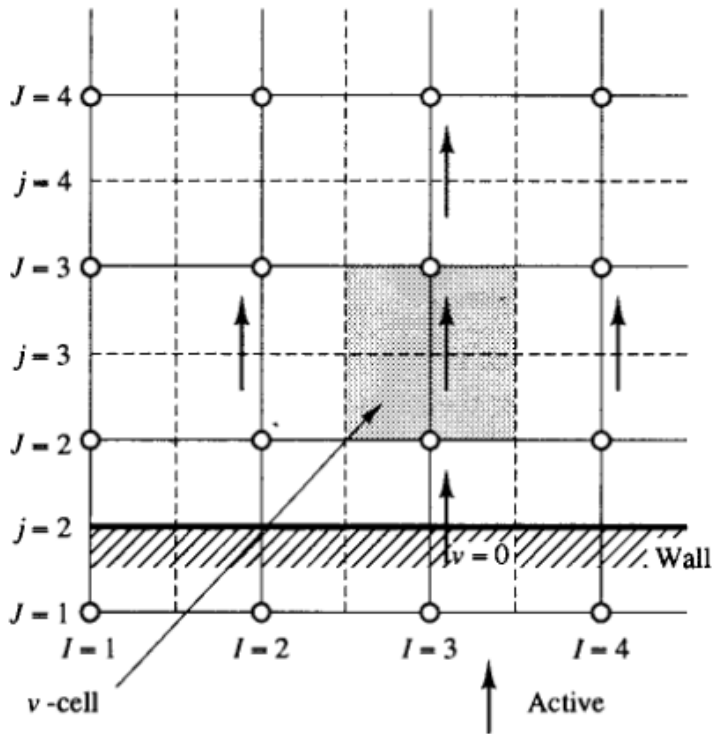


شرایط مرزی دیوار

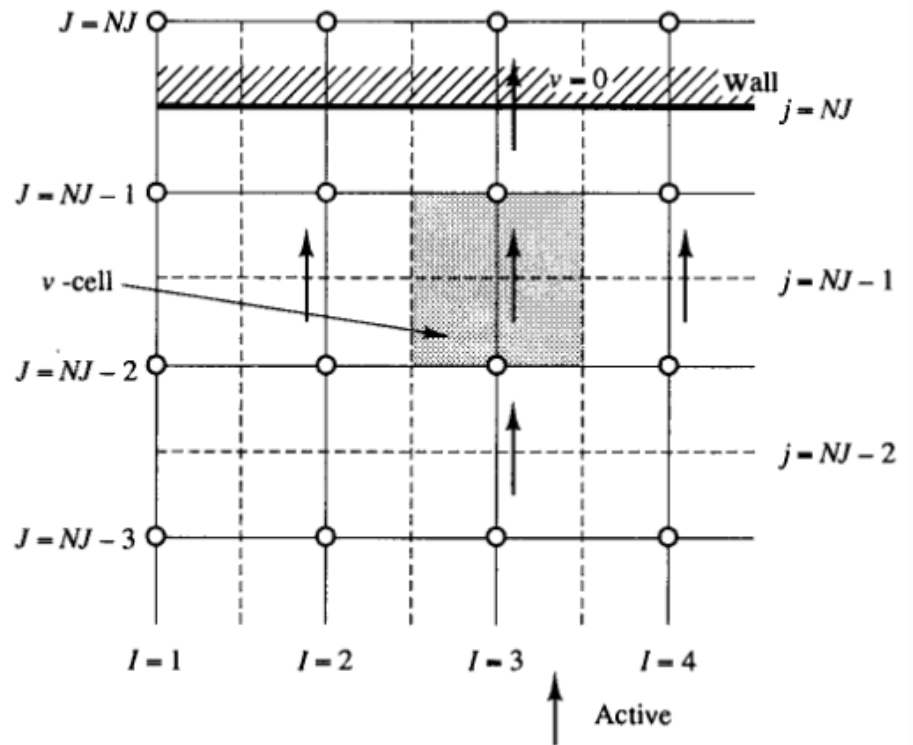


❖ در دیوارهای ساکن شرط عدم لغزش برقرار است ($u=v=0$) و همانگونه که در شکل‌ها مشخص است می‌توان جریان

عرضی از دیوار را صفر گرفت ($v=0$).



(a)



(b)

v-cell at a wall boundary (a) $j = 3$ and (b) $j = NJ$



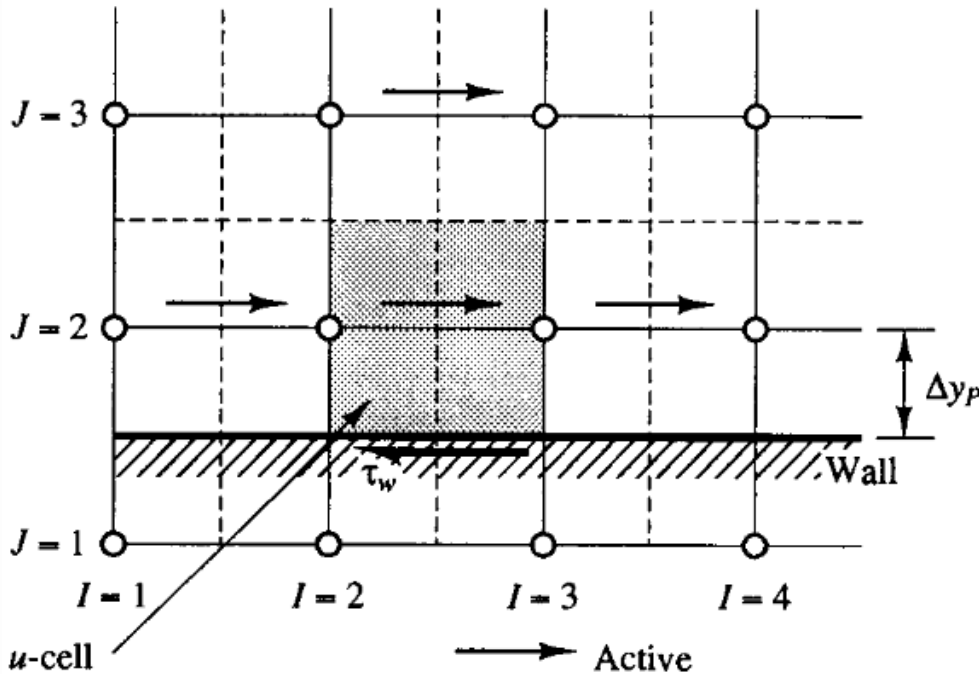
شرایط مرزی دیوار



❖ بردارهای سرعت u در مجاورت دیوار را باید از توابع دیوار بدست آورد.

❖ توابع دیوار برای جریان آرام و آشفته متفاوت است.

❖ در جریان آشفته ممکن است در نزدیکی دیوار جریان آرام یا آشفته باشد که معیار تشخیص آن به شرح زیر است:



$$y^+ = \frac{\Delta y_p}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

the flow is laminar $y^+ \leq 11.63$

the flow is turbulent $y^+ > 11.63$

u -velocity cell at a wall boundary

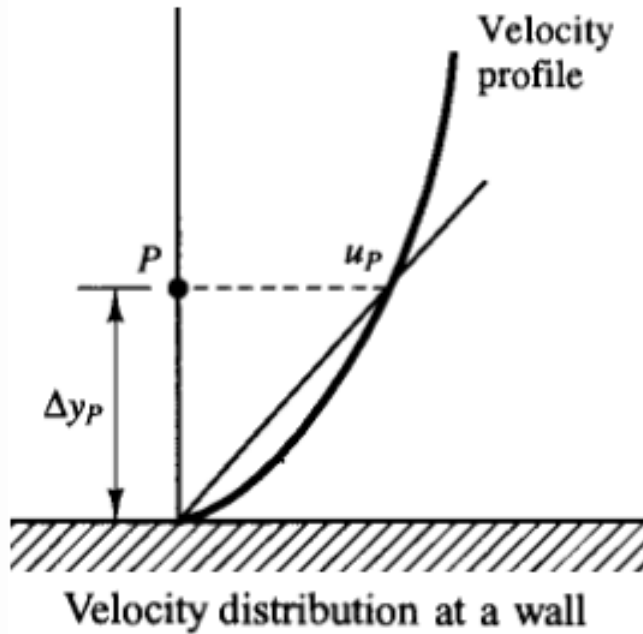


شرایط مرزی دیوار



جریان آرام / زیر لایه خطی

۱: جریان آرام $y^+ \leq 11.63$ که جریان آشفته هنگامی که



$$\text{wall shear stress } \tau_w = \mu \frac{u_p}{\Delta y_p}$$

$$\begin{aligned} \text{shear force } F_s &= -\tau_w A_{\text{Cell}} \\ &= -\mu \frac{u_p}{\Delta y_p} A_{\text{Cell}} \end{aligned}$$



$$S_p = -\frac{\mu}{\Delta y_p} A_{\text{Cell}}$$



جریان آشفته:

جریان آشفته هنگامی که $y^+ > 11.63$

Near wall relationships for the standard $k-\epsilon$ model

- *Momentum equation tangential to wall*
wall shear stress $\tau_w = \rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} u_P / u^+$
wall force $F_s = -\tau_w A_{Cell} = -(\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} u_P / u^+) A_{Cell}$
- *Momentum equation normal to wall*
normal velocity = 0
- *Turbulent kinetic energy equation*
net k -source per unit volume = $(\tau_w u_P - \rho C_\mu^{3/4} k_P^{3/2} u^+) \Delta V / \Delta y_P$
- *Dissipation rate equation*
set nodal value $\epsilon_P = C_\mu^{3/4} k_P^{3/2} / (\kappa \Delta y_P)$



شرایط مرزی دیوار



جریان آشفته:

جریان آشفته هنگامی که $y^+ > 11.63$

discretised u -equation as a source term: $S_p = -\frac{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{u^+} A_{Cell}$

discretised k -equation: $S_p = -\frac{\rho C_\mu^{3/4} k_p^{*1/2} u^+}{\Delta y_p} \Delta V$ and $S_u = \frac{\tau_w u_p}{\Delta y_p} \Delta V$

discretised ε -equation: $S_p = -10^{30}$ and $S_u = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa \Delta y_p} \times 10^{30}$



شرایط مرزی فشار ثابت

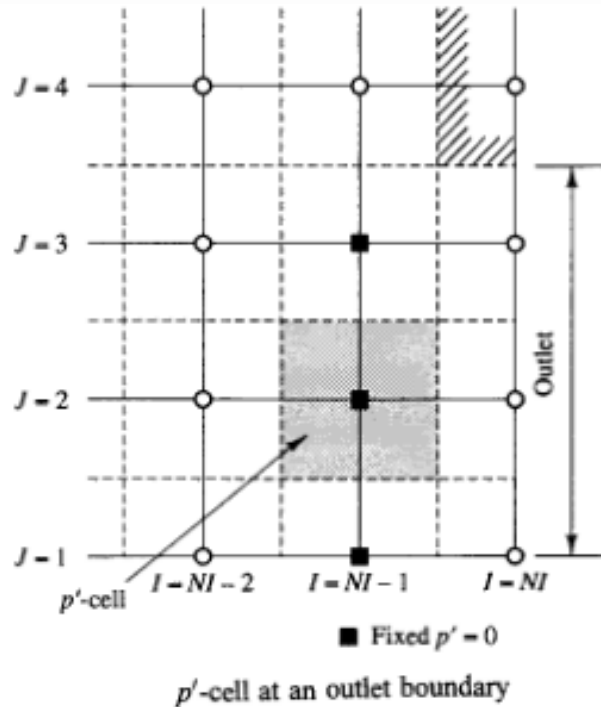
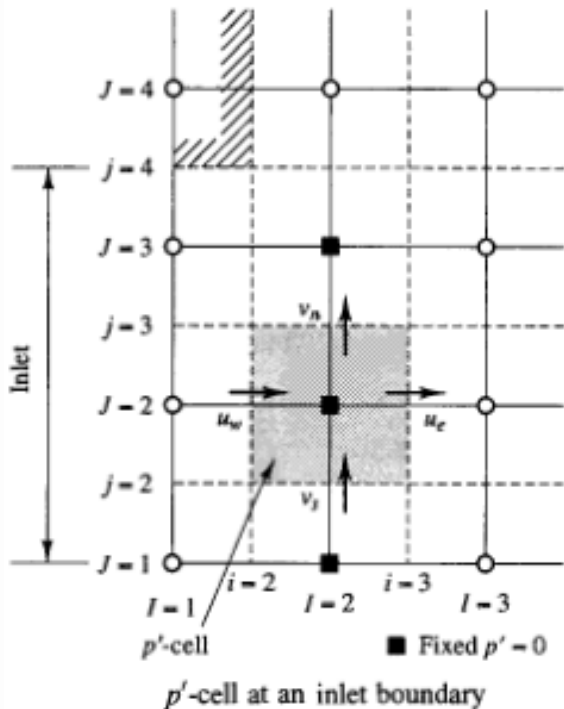


– شرط فشار ثابت در جایی استفاده می شود که جزئیات دقیق توزیع جریان نامعلوم بوده، اما مقادیر مرزی فشار معلوم است.

– در اعمال شرط مرزی فشار ثابت، تصحیح فشار در گره های مرزی برابر صفر فرض می شود.

– یک روش مناسب پیشنهادی برای استفاده از شرط مرزی فشار ثابت، قرار دادن فشار در گره های داخلی مرز فیزیکی است؛ (در شکل با

مربع های توپر نشان داده شده است).



– با توجه با به شکل مقادیر مربوط به U_e ،

V_n و V_s از حل معادلات کسسته شده اندازه

حرکت در داخل محدوده حاصل می شوند؛

اما U_w با توجه به بقای جرم در سلول مربوط

به فشار، توسط معادله زیر حاصل می شود:

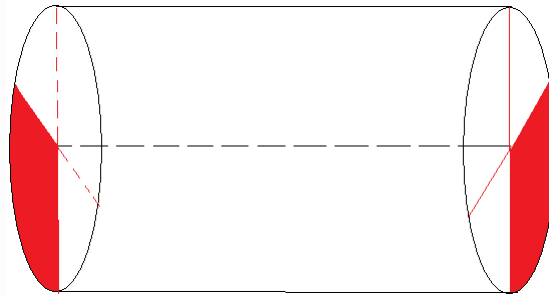
$$u_w = \frac{(\rho v A)_n - (\rho v A)_s + (\rho u A)_e}{(\rho A)_w}$$



شرط مرزی تقارن و شرط مرزی متناوب یا تکراری



شرایط مرزی تقارن عبارتست از:



– هیچ جریان عرضی از مرز وجود نداشته باشد.

– هیچ شار اسکالر به صورت عرضی از مرز صورت نگیرد.

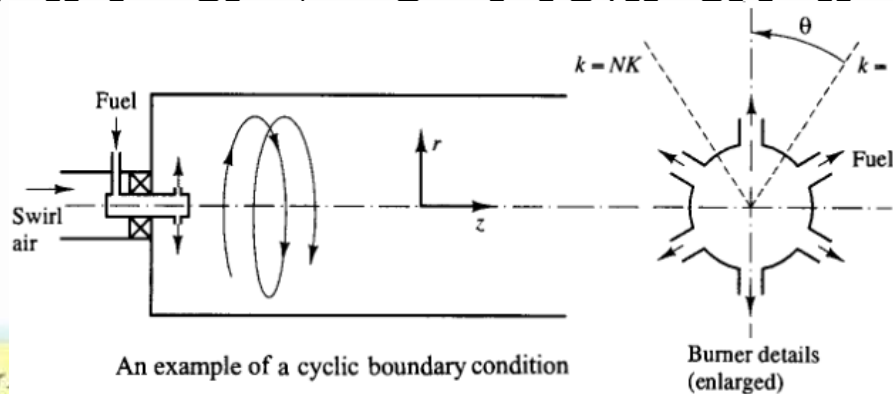
در این صورت این متغیرها در گره خارج از محدوده حل و نزدیک ترین گره داخل محدوده حل برابرند؛ همانند: $\phi_{1,J} = \phi_{2,J}$

شرایط مرزی متناوب یا تکراری:

نوع دیگری از تقارن است و زمانی مطرح می شود چند خروجی یا ورودی کاملاً مشابه وجود داشته باشد. در اینصورت

لازم است شار تمام متغیرهای جریان که مرز تکراری خروجی را ترک می کنند با شاری که از مرز تکراری ورودی وارد

می شوند برابر باشند.





پروژه دوم



میدان جریان آب را برای هوضپه زیر شبیه سازی نمایید.

- سرعت جریان ورودی و عمق آب در هوضپه معلوم فرض شود.
- ابعاد هوضپه و ابعاد و موقعیت ورودی و خروجی ها قابل تغییر باشد.
- خروجی به صورت جدولی حاوی مقادیر سرعت طولی و عرضی و فشار در هر گره بدست دهد.
- خروجی گرافیکی نیز شامل بردارهای سرعت به طور مستقیم در برنامه یا بواسطه نرم افزارهای گرافیکی ترسیم گردد.





فصل سیزدهم

کسب سازی معادلات جریان های غیر دانه

(در روش حجم محدود)



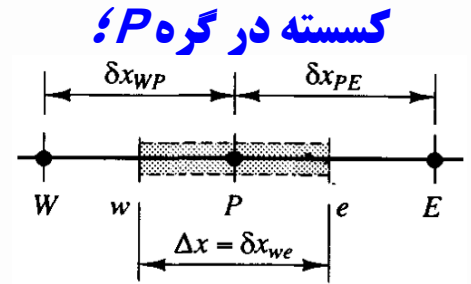
گستره سازی مسائل انتشار حالت غیر دائم یک بعدی



رابطه کلی انتشار غیر دائم برای خاصیت ϕ در ناحیه یک بعدی: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$

قدم اول: انتگرال از معادله روی حجم کنترل و روی یک فاصله زمانی از t تا $t+\Delta t$ برای رسیدن به معادله

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{CV} S_\phi dV dt$$



$$\int_{CV} \left[\int_t^{t+\Delta t} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \right] dV = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$



با جایگذاری $(\phi_P - \phi_P^o) / \Delta t$ برای $\partial \phi / \partial t$ سمت چپ معادله با استفاده از

$$\rho(\phi_P - \phi_P^o) \Delta V$$

روش اختلاف پسر و که مرتبه اول می باشد به شکل روبرو گستره می شود.

است. $t+\Delta t$ بدون اندیس بالا، مربوط به زمان ϕ می باشد و t در زمان ϕ مبین "o" اندیس



کسته سازی مسائل اشار حالت غیر دائم یک بعدی



$$\rho(\phi_P - \phi_P^o) \Delta V = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$

اگر در معادله فوق اختلاف مرکزی را برای عبارت پخشیدگی اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$\rho(\phi_P - \phi_P^o) \Delta V = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\Gamma_e A \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \left(\Gamma_w A \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \right] dt + \int_t^{t+\Delta t} \bar{S} \Delta V dt$$

برای محاسبه سمت راست معادله، به یک فرضی برای تغییر ϕ_P و ϕ_E و ϕ_W با زمان، نیاز داریم.

می توان از ϕ در زمان های t و $t+\Delta t$ برای محاسبه انتگرال زمانی یا تناوبی استفاده کرد.

برای این منظور از یک پارامتر وزنی θ بین ۰ و ۱ بهره می گیریم تا به روش عمومی دست یابیم. لذا با تعریف انتگرال I_T

$$I_T = \int_t^{t+\Delta t} \phi_P dt = \left[\theta \phi_P + (1 - \theta) \phi_P^o \right] \Delta t$$

به شکل زیر خواهیم داشت:

با بکارگیری معادله I_T در معادله فوق و تقسیم دو طرف معادله بر $A \Delta t$ ، خواهیم داشت:



کسته سازی مسائل اشاره حالت غیر دائم یک بعدی



$$\rho \left(\frac{\phi_P - \phi_P^o}{\Delta t} \right) \Delta x = \theta \left[\left(\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \left(\Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \right] + (1 - \theta) \left[\left(\Gamma_e \frac{\phi_E^o - \phi_P^o}{\delta x_{PE}} \right) - \left(\Gamma_w \frac{\phi_P^o - \phi_W^o}{\delta x_{WP}} \right) \right] + \bar{S} \Delta x$$

و پس از بازنویسی خواهیم داشت:

$$\left[\rho \frac{\Delta x}{\Delta t} + \theta \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \right) \right] \phi_P = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \left[\theta \phi_E + (1 - \theta) \phi_E^o \right] + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \left[\theta \phi_W + (1 - \theta) \phi_W^o \right] + \left[\rho \frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - \theta) \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} - (1 - \theta) \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \right] \phi_P^o + \bar{S} \Delta x$$



کسته سازی مسائل اشارة حالت غير دائم يك بعدی



و به صورت استاندارد می توان نوشت:

$$a_P \phi_P = a_W [\theta \phi_W + (1 - \theta) \phi_W^o] + a_E [\theta \phi_E + (1 - \theta) \phi_E^o] + [a_P^o - (1 - \theta) a_W - (1 - \theta) a_E] \phi_P^o + b$$

$$a_P = \theta (a_W + a_E) + a_P^o$$

$$a_P^o = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

a_W	a_E	b
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$	$\bar{S} \Delta x$

روش صریح (Explicit scheme)

با قرار دادن $\theta=0$ و بخش چشمه به صورت خطی $b = S_u + S_P \phi_P^o$ روش صریح حاصل می شود:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W^o + a_E \phi_E^o + \left[a_P^o - (a_W + a_E - S_P) \right] \phi_P^o + S_u$$

$$a_P = a_P^o$$

$$a_P^o = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

a_W	a_E
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$

— سمت راست معادله فقط شامل مقادیر قدم زمانی قبلی می باشد، لذا با توجه به معلوم بودن شرایط اولیه در تمامی گره ها،

بدون نیاز به حل دستگاه معادلات سمت چپ معادله حاصل می گردد.



ارزیابی روش صریح



- این روش نسبت به زمان براساس اختلاف پس رو می باشد لذا دقت خطای قطع سری تیلور در آن از مرتبه اول می باشد.
- بنابراین آنچه قبلا گفته شده؛ تمامی ضرایب معادله گسسته شده باید مثبت باشند، یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} a_P^o - a_W - a_E > 0 \\ \text{if } \Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma \\ \& \delta x_{PE} = \delta x_{WP} = \Delta x \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{2\Gamma}{\Delta x} \Rightarrow \Delta t < \rho \frac{(\Delta x)^2}{2\Gamma}$$

- معادله فوق نشان می دهد که کاهش Δx نیازمند کاهش شدید قدم زمانی می شود، لذا این روش از نظر زمانی بسیار گران است و برای مسائل گذرای عمومی توصیه نمی شود (برای محاسبات هدایت ساده مفید می باشد).
- روش های صریح دیگری نیز پیشنهاد شده است که دقت ظاهری بیشتری دارد و یا از بیش از دو سطح زمانی استفاده می کند که بررسی در مورد آنها به دانشجویان واگذار می شود.



روش کاملاً ضمنی (Fully implicit scheme)



با قرارداد $\theta = 1$ و بخش چشمه به صورت خطی $b = S_u + S_P \phi_P$ روش کاملاً ضمنی حاصل می شود:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_P^o \phi_P^o + S_u$$

$$a_P = a_P^o + a_W + a_E - S_P$$

$$a_P^o = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

a_W	a_E
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$

– هر دو طرف معادله شامل مقادیر قدم زمانی جدید می باشد، سمت راست شامل مقدار متغیر در گره مرکزی در قدم زمانی قبلی نیز می باشد.

ارزیابی: – همه ضرایب مثبتند لذا این روش بطور نامشروط پایدار است.

– با توجه به اینکه این روش نسبت به زمان از مرتبه اول است، قدم های زمانی کوچک برای داشتن نتایج دقیقتر لازم است.



روش ضمنی (Implicit scheme)

نیز گویند حاصل می شود: (Crank-Nicolson) روش ضمنی که به آن روش کرانک-نیکلسون $\theta = 1/2$ با قرارداد

$$a_P \phi_P = a_W \left[\frac{\phi_W + \phi_W^o}{2} \right] + a_E \left[\frac{\phi_E + \phi_E^o}{2} \right] + \left[a_P^o - \frac{a_E}{2} - \frac{a_W}{2} \right] \phi_P^o + b$$

$$a_P = \frac{1}{2} (a_W + a_E) + a_P^o - \frac{1}{2} S_P$$

$$a_P^o = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

a_W	a_E	b
$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$	$S_u + \frac{1}{2} S_P \phi_P^o$



ارزیابی روش ضمنی



- این روش نسبت به زمان براساس اختلاف مرکزی بوده، لذا دقت خطای قطع سری تیلور در آن از مرتبه دوم می باشد.
- تمامی روش ها که در آن $1/2 \leq \theta \leq 1$ از جمله روش کرانک نیکلسون، برای تمامی مقادیر قدم زمانی بطور غیر مشروط پایدار می باشد؛ لذا در محاسبات خیلی مهم است که تمام ضرایب برای نتایج فیزیکی واقعی مثبت باشند،

یعنی:

$$a_P^o - \left[\frac{a_W}{2} - \frac{a_E}{2} \right] > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } \Gamma_e = \Gamma_w = \Gamma \\ \& \delta x_{PE} = \delta x_{WP} = \Delta x \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} > \frac{\Gamma}{\Delta x} \Rightarrow \Delta t < \rho \frac{(\Delta x)^2}{\Gamma}$$

- این محدوده قدم زمانی فقط دارای اندکی محدودیت کمتر از روش صریح می باشد.
- روی هم رفته با استفاده از قدم های زمانی به اندازه کافی کوچک، می توان به دقت بیشتری نسبت به سایر روش ها

رسید.



روش کاملاً ضمنی چند بعدی



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$$

به عنوان نمونه فرمول های مربوط به روش کاملاً ضمنی

در حالت ۲ و ۳ بعدی در زیر نشان داده شده است:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T + a_P^o \phi_P^o + S_u$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^o - S_P$$

$$a_P^o = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

	a_W	a_E	a_S	a_N	a_B	a_T
1D	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	—	—	—	—
2D	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	—	—
3D	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$

	1D	2D	3D
ΔV	Δx	$\Delta x \Delta y$	$\Delta x \Delta y \Delta z$
$A_w = A_e$	1	Δy	$\Delta y \Delta z$
$A_n = A_s$	—	Δx	$\Delta x \Delta z$
$A_b = A_t$	—	—	$\Delta x \Delta y$



کسته سازی مسائل ایشار- انتقال حالت غیردائم



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho u\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$$

معادله مربوطه عبارتست از:

or

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) + S_\phi$$

با استفاده از روش **کاملاً ضمنی اختلاف پیوندی** که روشی پایدار است خواهیم داشت:

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + a_B\phi_B + a_T\phi_T + a_P^o\phi_P^o + S_u$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + a_P^o + \Delta F - S_p$$

$$a_P^o = \frac{\rho_P^o \Delta V}{\Delta t}$$

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P$$



کست سازی مسائل اشار- انتقال حالت غیر دائم



	One-dimensional flow	Two-dimensional flow	Three-dimensional flow
a_w	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$
a_E	$\max \left[-F_e, \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$
a_S	-	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$
a_N	-	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$
a_B	-	-	$\max \left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2} \right), 0 \right]$
a_T	-	-	$\max \left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2} \right), 0 \right]$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$



کسته سازی مسائل اشار- انتقال حالت غیردائم



Face	w	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{BP}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$



	1D	2D	3D
ΔV	Δx	$\Delta x \Delta y$	$\Delta x \Delta y \Delta z$
$A_w = A_e$	1	Δy	$\Delta y \Delta z$
$A_n = A_s$	-	Δx	$\Delta x \Delta z$
$A_b = A_t$	-	-	$\Delta x \Delta y$



روش های حل میدان جریان گذرا



- ❖ الگوریتم هائی همچون *SIMPLE* که برای جریان های دائم تشریح شد، می تواند برای جریان های غیر دائم نیز بسط داده شود، با توجه به این نکته که معادلات گسسته اندازه حرکت شامل عبارات گذرای است که در همین فصل تشریح شد.
- ❖ یک عبارت اضافی نیز در معادله تصحیح فشار مورد نیاز است که با توجه به **معادله پیوستگی گذرا** در زیر تشریح می شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

صورت انتگرال گیری شده معادله فوق روی حجم کنترل اسکالر دو بعدی می دهد:

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^o)}{\Delta t} \Delta V + [(\rho u A)_e - (\rho u A)_w] + [(\rho u A)_n - (\rho u A)_s] = 0$$



روش های حل میدان جریان کذرا



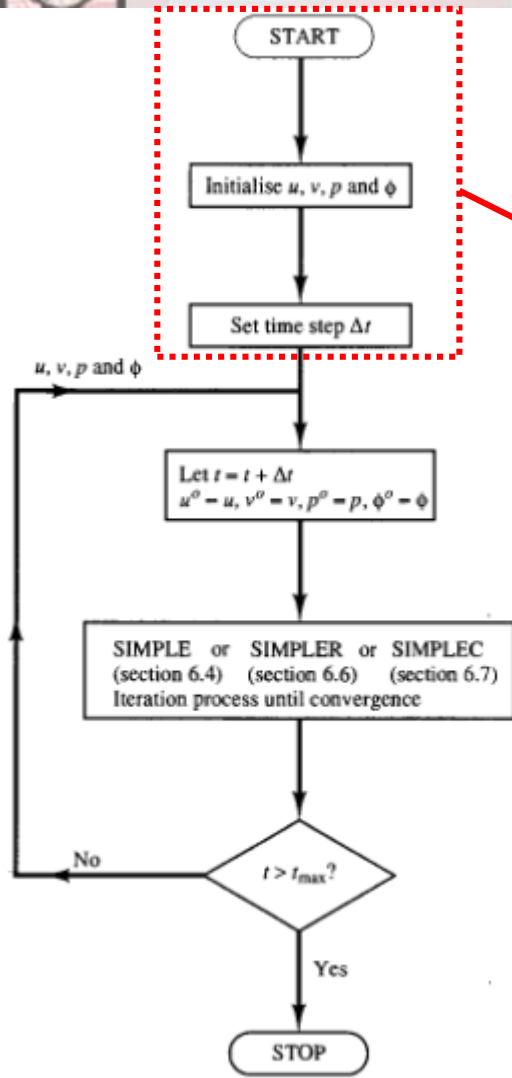
$$a_{I,J} p'_{I,J} = a_{I+1,J} p'_{I+1,J} + a_{I-1,J} p'_{I-1,J} + a_{I,J+1} p'_{I,J+1} + a_{I,J-1} p'_{I,J-1} + b'_{I,J}$$

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}$$

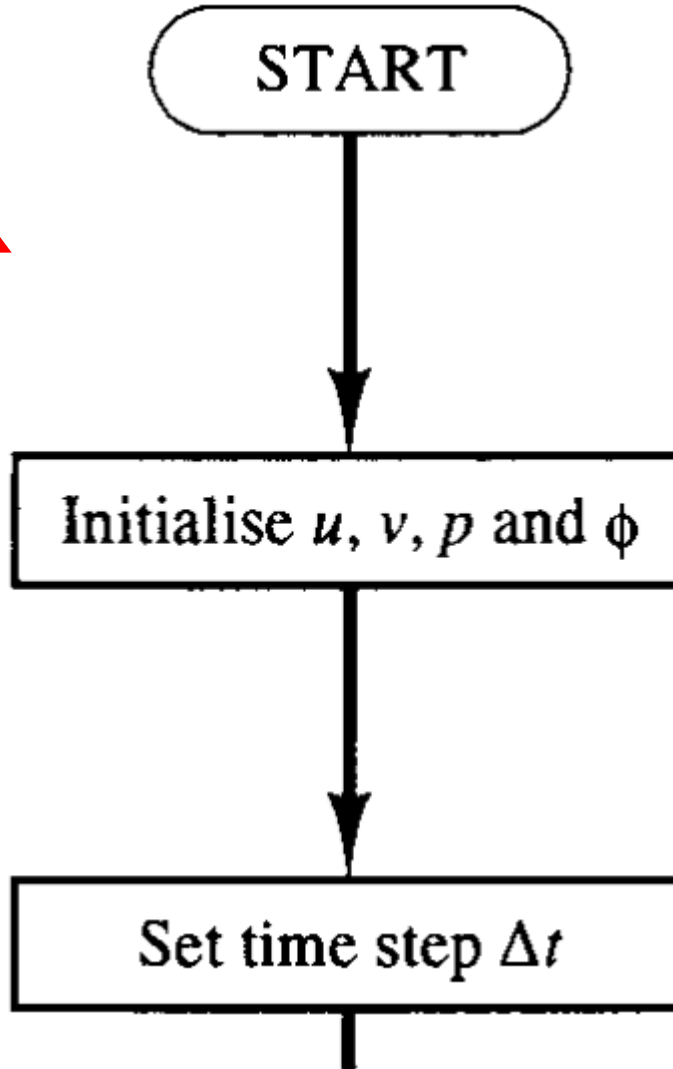
$$b'_{I,J} = (\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1} + \frac{(\rho_p^o - \rho_p) \Delta V}{\Delta t}$$

$a_{I-1,J}$	$a_{I+1,J}$	$a_{I,J-1}$	$a_{I,J+1}$
$(\rho dA)_{i,j}$	$(\rho dA)_{i+1,j}$	$(\rho dA)_{I,j}$	$(\rho dA)_{I,j+1}$

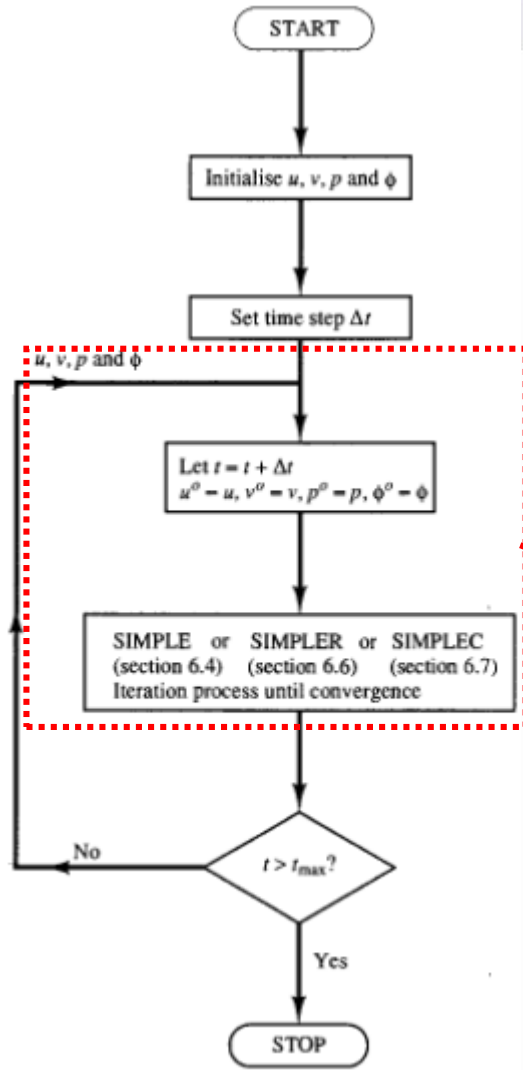
روش های حل میدان جریان گذرا



Transient flow SIMPLE algorithm and its variants



روش های حل میدان جریان گذرا



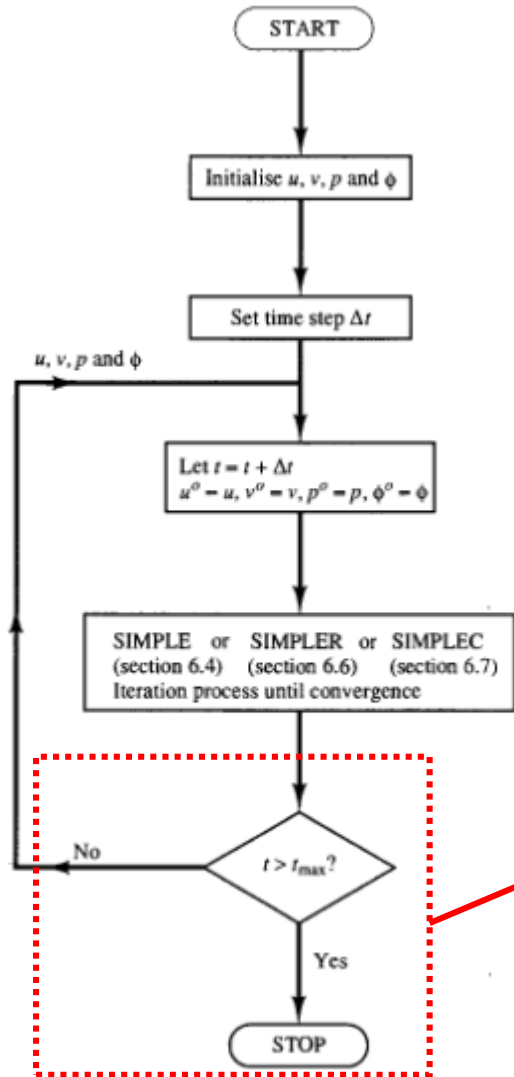
u, v, p and ϕ

Let $t = t + \Delta t$
 $u^o = u, v^o = v, p^o = p, \phi^o = \phi$

SIMPLE or SIMPLER or SIMPLEC
 (section 6.4) (section 6.6) (section 6.7)
 Iteration process until convergence

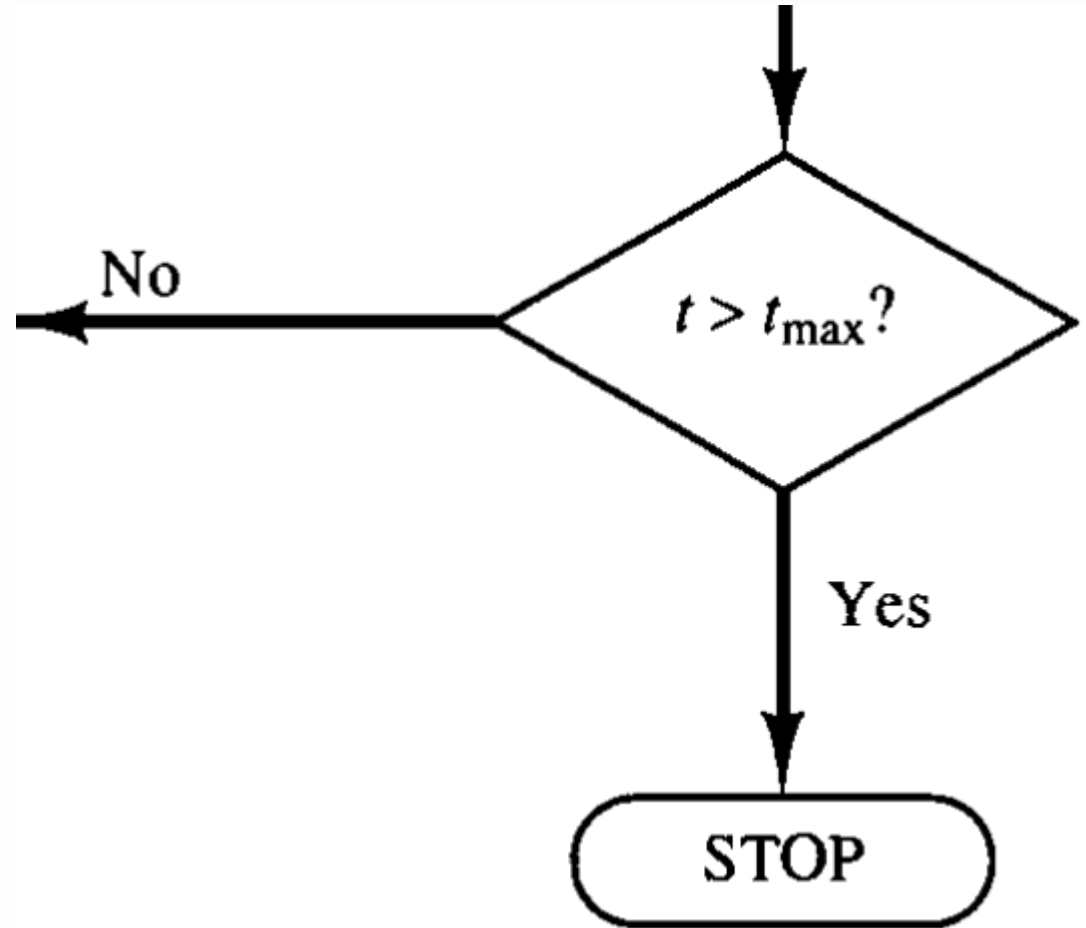
Transient flow SIMPLE algorithm and its variants

روش های حل میدان جریان گذرا



Transient flow SIMPLE algorithm and its variants

۲۳۵





فصل چهاردهم

مدل کردن جریان های آشفته



کلیات



❖ عدد رینولدز یک جریان، نسبت اندازه نیروی اینرسی جریان به نیروی لزجت را می دهد.

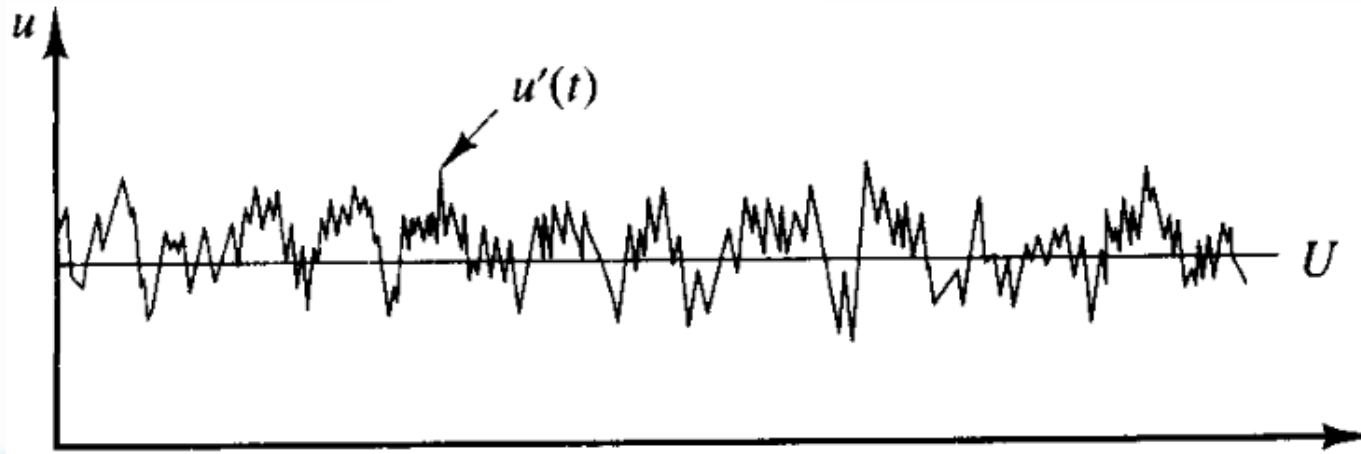
❖ در عدد رینولدز پایین تر از حد بحرانی (R_{crit})، جریان صاف و لایه های هم جوار سیال روی یکدیگر می لغزند و اگر شرایط مرزی با زمان تغییر نکند، جریان دائمی است. این منطقه جریان آرام نامیده می شود.

❖ در مقادیر عدد رینولدز بالاتر از بحرانی، یک سری حوادث اتفاق می افتد که نهایتا سبب تغییرات جدی در رفتار جریان می شود؛ و باعث رفتاری تصادفی و نامنظم می گردد، حتی با شرایط مرزی ثابت حرکت کاملا غیردائمی می شود. این منطقه جریان آشفته نامیده می شود.

❖ به دلیل طبیعت تصادفی جریان آشفته و عدم امکان بررسی کامل همه ذرات سیال، معمولا سرعت را به دو بخش مقدار متوسط دائمی U

و مولفه نوسانی $u'(t)$ که با آن جمع می شود تقسیم می کنند:

$$u(t) = U + u'(t)$$



Typical point velocity measurement in turbulent flow



کلیات



- ❖ نوسانات آشفته همواره دارای رفتار سه بعدی هستند، حتی در شرایطی که سرعت های متوسط و فشارها در یک یا دو بعد از فضا تغییر کنند.
- ❖ آنچه در جریان های آشفته مشاهده می شود، جریان های چرخشی است که ادی آشفته نامیده می شود.
- ❖ ادی های آشفته بزرگتر بوسیله تحولی که کشش گردابه ای نامیده می شود، انرژی گرفته و یا می دهد.
- ❖ ادی های کوچکتر به طور قوی توسط ادی های بزرگتر کشیده می شود و توسط جریان متوسط ضعیفتر می شوند. در این مسیر انرژی جنبشی از ادی های بزرگتر به ادی های کوچک و کوچکتر منتقل می شود که به آن آبشار انرژی گویند.
- ❖ بدست آوردن اطلاعات کافی در مورد جریان های آشفته نیاز به پیش بینی اثرات هر ادی در جریان دارد؛ اما خوشبختانه اکثر مسائل CFD با اطلاعاتی در رابطه با میانگین زمانی خواص جریان قابل حل است؛ لذا اغلب فقط اثرات حضور اغتشاشات آشفته روی خواص جریان متوسط مورد بررسی قرار می گیرد.



اثر آشفتگی روی جریان متوسط معادلات ناویر-استوکس



معادلات رینولدز:

$$\varphi(t) = \Phi + \varphi'(t)$$

تعاریف:

$$\Phi = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi(t) dt$$

طبق تعریف

$$\overline{\varphi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \varphi'(t) dt \equiv 0$$

انرژی جنبشی مربوط به آشفتگی (در واحد جرم)

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$



اثر آشفتگی روی جریان متوسط معادلات ناویر-استوکس



$$\varphi = \Phi + \varphi' \text{ and } \psi = \Psi + \psi'$$

$$\overline{\varphi'} = \overline{\psi'} = 0; \quad \overline{\Phi} = \Phi; \quad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}; \quad \int \overline{\varphi} ds = \int \Phi ds$$

$$\overline{\varphi + \psi} = \Phi + \Psi; \quad \overline{\varphi\psi} = \Phi\Psi + \overline{\varphi'\psi'}; \quad \overline{\varphi\Psi} = \Phi\Psi; \quad \overline{\varphi'\Psi} = 0$$

$$\text{vector quantity } \mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}'$$

$$\overline{\text{div } \mathbf{a}} = \text{div } \mathbf{A}; \quad \overline{\text{div}(\varphi \mathbf{a})} = \text{div}(\overline{\varphi \mathbf{a}}) = \text{div}(\Phi \mathbf{A}) + \text{div}(\overline{\varphi' \mathbf{a}'})$$

$$\overline{\text{div grad } \varphi} = \text{div grad } \Phi$$



اثر آشفتگی روی جریان متوسط معادلات ناویر-استوکس



$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \text{div grad } u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{div}(v\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \text{div grad } v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(w\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \text{div grad } w$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$$

$$u = U + u'$$

$$v = V + v'$$

$$w = W + w'$$

$$p = P + p'$$



اثر آشفتگی روی جریان متوسط معادلات ناویر-استوکس



$$\left. \begin{aligned} \overline{\text{div } \mathbf{u}} &= 0 \\ \overline{\text{div } \mathbf{u}} &= \text{div } \mathbf{U} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\text{div } \mathbf{U} = 0} \quad \begin{array}{l} \text{معادله پیوستگی} \\ \text{جریان متوسط} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \text{div grad } u}$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \overline{\text{div}(u\mathbf{u})} = \text{div}(U\mathbf{U}) + \text{div}(\overline{u'u'})$$

$$\overline{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \overline{\nu \text{div grad } u} = \nu \text{div grad } U$$

معادله میانگین زمانی
اندازه حرکت در
راستی x

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(U\mathbf{U}) + \text{div}(\overline{u'u'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div grad } U}$$



اثر آشفتگی روی جریان متوسط معادلات ناویر-استوکس



$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(UU) + \text{div}(\overline{u'u'}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div grad } U \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) + \text{div}(\overline{v'u'}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div grad } V \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) + \text{div}(\overline{w'u'}) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div grad } W \end{aligned} \right.$$

عبارات جدید شامل سرعت های نوسانی و انتقال انداز حرکت جابجائی ناشی از نوسانات سرعت می باشد که معمولاً به عنوان تنش های اضافی آشفته (شامل ۳ تنش قائم و ۳ تنش برشی) روی مولفه های سرعت متوسط در سمت راست معادله قرار می گیرند و **تنش های رینولدز** نامیده می شوند.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(UU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div grad } U + \left[-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div grad } V + \left[-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div grad } W + \left[-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right] \end{aligned} \right.$$



اثر آشفتگی روی جریان متوسط معادلات ناویر-استوکس



Turbulent flow equations for compressible flows

Continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}) = 0$$

Reynolds equations

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } U) + \left[-\frac{\partial(\rho \overline{u'^2})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{u'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{u'w'})}{\partial z} \right] + S_{Mx}$$

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \text{div}(\rho V \mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } V) + \left[-\frac{\partial(\rho \overline{u'v'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v'^2})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{v'w'})}{\partial z} \right] + S_{My}$$

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \text{div}(\rho W \mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } W) + \left[-\frac{\partial(\rho \overline{u'w'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v'w'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{w'^2})}{\partial z} \right] + S_{Mz}$$

Scalar transport equation

$$\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \Phi \mathbf{U}) = \text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad } \Phi) + \left[-\frac{\partial(\rho \overline{u'\phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v'\phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{w'\phi'})}{\partial z} \right] + S_{\Phi}$$



مدل های آشفتگی

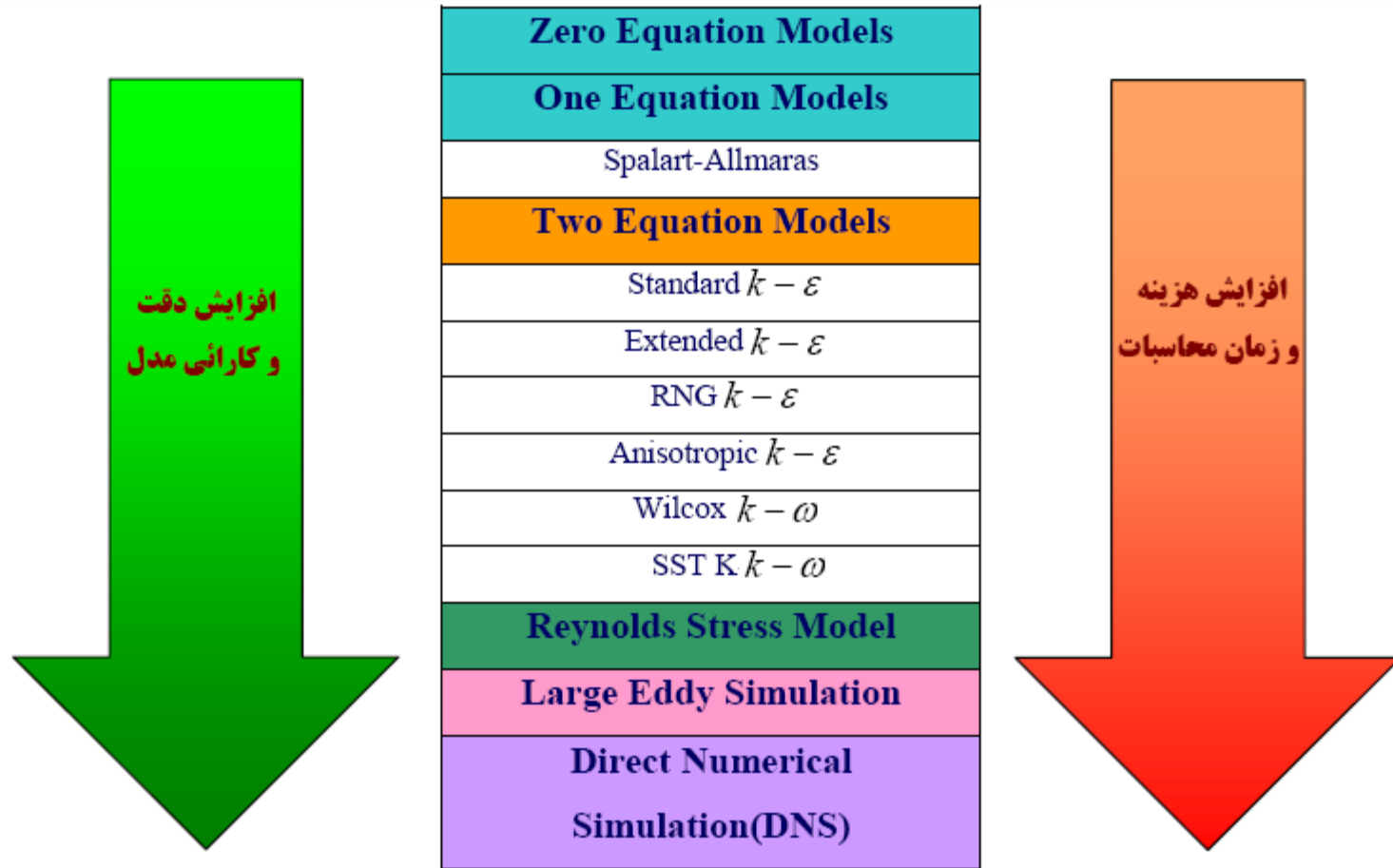


تعدادی از مدل های آشفتگی عبارتند از:

روابط اساسی	RANS Based Models				
	Eddy_viscosity Models			RSM	LES
<ul style="list-style-type: none"> - Boussinesq - Speziale - Launder 	مدلهای صفر معادله ای	مدلهای یک معادله ای	مدلهای دو معادله ای	Reynolds Stress Models	Large Eddy Simulation
	<ul style="list-style-type: none"> - Automatic Mixing Length - User-specified Mixing Length 	Spalart-Allmaras	<ul style="list-style-type: none"> - Standard $k - \epsilon$ - Extended $k - \epsilon$ - RNG $k - \epsilon$ - Anisotropic $k - \epsilon$ - Wilcox $k - \omega$ - SST $k - \omega$ 		



مدل های آشفتگی





Standard $k-\varepsilon$ معادلات مدل

برای مناسبه تنش های رینولدز با مدل $k-\varepsilon$ معمولاً از معادله بوزینسک (*Boussinesq*) استفاده می شود:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} = 2\mu_t E_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij}, \text{ the Kronecker delta } \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{if } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$$\mu_t = C_\mu \rho \ell^2 \varepsilon = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

where C_μ is a dimensionless constant

k is turbulent kinetic energy

ε is viscous dissipation



Standard $k-\varepsilon$ معادلات مدل

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad } k \right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Rate of change of k or ε	+ Transport of k or ε by convection	= Transport of k or ε by diffusion	+ Rate of production of k or ε	- Rate of destruction of k or ε
---	---	--	--	---

$$C_\mu = 0.09; \quad \sigma_k = 1.00; \quad \sigma_\varepsilon = 1.30; \quad C_{1\varepsilon} = 1.44; \quad C_{2\varepsilon} = 1.92$$