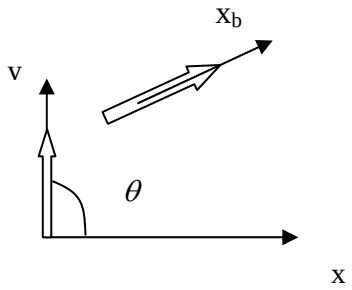
**P-1** یک موشک بالستیک در نظر بگیرید که در صفحه x-y از مبداء و شرایط سکون شروع به حرکت می‌کند.




جرم این سیستم با الگوی زیر با زمان تغییر می‌کند:

$$m(t) = -\frac{m_{p_0} t}{t_b} + m_0$$

همان گونه که از شکل مشخص است، نیروهای وارد به این سیستم شامل نیروی تراست در راستای محور $x_b$ بدنی، نیروی جاذبه در خلاف جهت محور y اینرسی و نیروی درگ که مقدار آن در راستای $x_b$ بدنی از رابطه $\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_\alpha} \alpha$ تبعیت می‌کند. مشخصات این سیستم و شرایط محیطی در جدول زیر داده شده است.

| ردیف | پارامتر | واحد | مقدار | نماد |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | جرم اولیه | kg | 6000 | $m_0$ |
| ۲ | جرم سوخت اولیه | kg | 5000 | $m_{p_0}$ |
| ۳ | ایمپالس ویژه | sec | 240 | $I_{sp}$ |
| ۴ | دانسیته هوا | kg/m^3 | 1.25 | $\rho$ |
| ۵ | شتاب جاذبه | m/s^2 | 9.81 | g |
| ۶ | مساحت مبناء | m^2 | 0.1 | S |
| ۷ | شیب ضریب درگ | $Rad^{-1}$ | 0.01 *for* $\alpha>0$<br>−0.01 *for* $\alpha>0$ | $C_{D_\alpha}$ |
| ۸ | زمان سوزش موتور | sec | 60 | $t_b$ |

ارتفاع جو غلیظ را ۱۰۰ کیلومتر فرض کنید، که **بعد از آن از ائرودینامیک صرف نظر خواهد شد**. براحتی میتوان نشان داد که معادلات حرکت سیستم فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$(T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_\alpha} \alpha)\cos\theta(t) = m(t)\ddot{x}(t)$$

$$(T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_\alpha} \alpha)\sin\theta(t) - m(t)g = m(t)\ddot{y}(t)$$

$$\alpha = \theta - \gamma \ , \ \gamma = \tan^{-1}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \ , \ I_{sp} = \frac{T t_b}{m_{p_0} g}$$

**مطلوب است :**

۱. معادلات فوق را در فرمولاسیون کنترل بهینه ارائه دهید و بردار حالت را $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ و کنترل را زاویه پیچ در نظر بگیرید.

۲. با در نظر گرفتن برنامه پیچ نامی داده شده زیر (الزاما بهینه نمیباشد)، ابتدا نتایج یک شبیه سازی اولیه را بدست آورید و نمودارهای زاویه حمله برحسب زمان و ارتفاع بر حسب برد را تا زمان برخورد نهایی با زمین نشان دهید. مقدار برد نهایی را نیز مشخص نمایید.

$$\text{Pitch Command } \theta(t)^{\circ} = \begin{cases} 90 & t \le 5 \\ 45(1+e^{(-\frac{10(t-5)^2}{t_b^2})}) & 5 < t \le t_b \\ \theta(t_b) & t \ge t_b \end{cases}$$

۳. با فرض توابع هزینه بندهای ۴ و ۵ ، هزینه ماموریت را برای بند ۱ محاسبه کنید.

۴. با فرض مجهول بودن سیاست کنترل بهینه (غیر فاز عمود پرواز در ۵ ثانیه اولیه) زاویه فراز بهینه ( $\theta^*(t) = ?$ ) ، و یا سیاست کنترل را به گونه‌ای تولید کنید که **برد موشک** ماکزیمم شود.

۵. با هدف برد ماکزیمم و کاهش زاویه حمله در فاز زمان روشن بودن موتور، سیاست کنترل بهینه (غیر فاز عمود پرواز در ۵ ثانیه اولیه) را تولید کنید.

- در بندهای ۴ و ۵ نمودارهای $\theta^*(t)$ و $\alpha^*(t)$ را بر حسب زمان ترسیم کنید همچنین نمودار $y^*(t)$ بر حسب $x^*(t)$ را رسم کرده و برد موشک را مشخص نمایید. هزینه ماموریت را نیز محاسبه کنید.

# Last Bonus Parts

۶. در ادامه پروژه فوق، با مشخص شدن $\theta^*(t)$ مایلیم با استفاده از سطوح کنترلی که در انتهای نازل موتور قرار دارد موشک را طوری کنترل کنیم که زاویه بهینه $\theta^*(t)$ را تعقیب کند. در این حالت معادلات حرکت به صورت زیر اصلاح می‌شوند:

$$(T-\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_\alpha}\alpha)\cos\theta(t)-L_{\delta_e}\,\delta_e\sin\theta(t)=m(t)\ddot{x}(t)$$

$$(T-\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_\alpha}\alpha)\sin\theta(t)-m(t)g+L_{\delta_e}\delta_e\cos\theta(t)=m(t)\ddot{y}(t)$$

$$L_{\delta_e}\,\delta_e\,x_{cg}=-I_{yy}\ddot{\theta}(t)$$

$$\alpha=\theta-\gamma\ ,\ \ \gamma=\tan^{-1}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\ ,\ I_{sp}=\frac{Tt_b}{m_{p_0}g}$$

که در روابط فوق

| ردیف | پارامتر | واحد | مقدار | نماد |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ممان اینرسی جرمی حول محور y بدنی | $kg.m^2$ | $2\times10^6$ | $I_{yy}$ |
| ۲ | فاصله مرکز جرم تا مرکز فشار سطح کنترلی (ثابت فرض میشود) | m | 5 | $x_{cg}$ |
| ۳ | ضریب لیفت سطح کنترلی | N/degree | 100 | $L_{\delta_e}$ |
| ۴ | زاویه سطح کنترلی | degree | ? | $\delta_e$ |

در روابط فوق، زاویه سطح کنترلی به سمت پایین مثبت فرض شده است که باعث ایجاد یک نیرو به سمت بالا میشود و درای محدودیت حرکت $|\delta_e|<30^0$ می‌باشد. مطلوبست تاریخچه سطح کنترلی $\delta_e^*$ بطوریکه با کمترین تلاش کنترلی و کمترین انحرافات نسبت به مسیر بهینه $\theta^*(t)$ بتوان موشک را کنترل کرد. تابع هزینه پیشنهادی (تعقیب) به صورت زیر می‌باشد:

$$J=\frac{1}{2}\Big(\theta(t_b)-\theta^*(t_b)\Big)^2 h+\frac{1}{2}\int_0^{t_b}\Big[\Big(\theta(t)-\theta^*(t)\Big)^2 q+\delta_e^2\ r\Big]dt$$

توجه کنید که چون معادلات سیستم غیر خطی می‌باشد لذا مسئله فوق از نوع LQT نمی‌باشد. لذا مسئله فوق را به دو صورت می‌توان حل کرد:

- حل غیر خطی مسئله تعقیب
- خطی سازی معادلات سیستم حول مسیر نامی $\theta^*(t)$ و استفاده از روابط LQT

**۷.** حل تمرینات کتاب شماره : ۶-۲۷ و ۶-۲۸