

فرمولهای مهم انتگرال گیری

1. $\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$
2. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
3. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
6. $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + c$
7. $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c$
8. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + c$
9. $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + c = -\ln |\csc u + \cot u| + c$
10. $\int \sec^2 u \, du = \int (1 + \tan^2 u) du = \tan u + c$
11. $\int \csc^2 u \, du = \int (1 + \cot^2 u) du = -\cot u + c$
12. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + c$
13. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + c$
14. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c, \quad \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$
15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c, \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$

انتگرال گیری به کمک تغییر متغیر

معمولا در حل انتگرال هایی که شامل یک تابع و مشتق آن می باشند، از روش تغییر متغیر استفاده می شود.

مثال .

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$$

$$= \int \sin u \, du = -\cos u + c = -\cos(\ln x) + c$$

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \quad \text{تغییر متغیر:}$$

مثال.

$$\int (\cos^4 x) (\sin^3 x) dx$$

$$= \int (\cos^4 x) (\sin^2 x) (\sin x) dx = \int (\cos^4 x) (1 - \cos^2 x) (\sin x) dx$$

$$= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) (\sin x) dx$$

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$= \int (u^4 - u^6)(-du) = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c.$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$$

$$x = t^2, \quad dx = 2t dt \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$= \int \frac{2t dt}{t^2 - t} = 2 \int \frac{dt}{t-1} = 2 \ln|t-1| + c = 2 \ln|\sqrt{x} - 1| + c.$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{(\tan^{-1} x)(1+x^2)}$$

$$t = \tan^{-1} x \rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln|\tan^{-1} x| + c$$

مثال.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

$$= \int \frac{e^x}{1+e^x} e^x dx$$

$$t = 1 + e^x \rightarrow dt = e^x dx \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$= \int \frac{t-1}{t} dt = \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln|t| + c = (1 + e^x) - \ln(1 + e^x) + c$$

انتگرال گیری جزء به جزء

با استفاده از روش جزء به جزء می توان انتگرال های دشوار را به انتگرال های ساده تر تبدیل کرد. این روش در مورد انتگرال هایی به صورت $\int f(x)g(x)dx$ کاربرد دارد که در آن f تابعی است که پس از چند بار مشتق گرفتن صفر می شود و g تابعی است که می توان بارها و بدون هیچ مشکلی از آن انتگرال گرفت. معمولاً f و g توابعی مانند $\sin x, \cos x, \ln x, e^x, x^n$ می باشند.

فرمول انتگرال جز به جز به صورت زیر می باشد که از قاعده $d(uv) = u dv + v du$ حاصل می شود.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

مثال.

$$\int x \cos x dx \quad u = x \rightarrow du = dx, \cos x dx = dv \rightarrow v = \sin x$$

$$= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

مثال.

$$\int \ln x dx \quad u = \ln x, dv = dx \implies du = \frac{dx}{x}, v = x$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

نکته. برای انتخاب u و dv دقت کنید که u را تابعی می گیریم که پس از مشتق گیری ساده تر شود و dv را قسمتی می گیریم که محاسبه انتگرالش ساده باشد. به مثال بعد توجه کنید.

مثال.

$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad u = \sin^{-1} x \rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad dv = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow v = -\sqrt{1-x^2}$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + \int dx = -\sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x + x + c.$$

مثال.

$$\int x \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow du = -\frac{1}{x^2} \times \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$x dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int 2x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad t = 1 + x^2 \rightarrow dt = 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{4} \sqrt{t} = \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + c.$$

حل کردن معادله انتگرالی نسبت به انتگرال مجهول

گاهی اوقات با یک بار استفاده از روش جز به جز، انتگرالی دیگر ظاهر می شود که شبیه انتگرال اولی می باشد. برای حل این نوع انتگرال ها باید دو بار از روش جز به جز استفاده کرد. مثال زیر را ببینید.

مثال.

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \quad u = e^{2x}, dv = \cos 3x dx \implies du = 2e^{2x} dx, v = \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx \quad \star$$

اکنون برای حل انتگرال $\int e^{2x} \sin 3x dx$ دوباره باید از جز به جز استفاده کنیم.

$$\int e^{2x} \sin 3x dx \quad u = e^{2x}, dv = \sin 3x dx \implies du = 2e^{2x} dx, v = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$= -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx$$

بنابراین با قرار دادن در رابطه $\star$ داریم:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \cos 3x dx &= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx = \\ &= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\int e^{2x} \cos 3x dx + \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{9}{13} \left(\frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x \right).$$

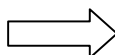
انتگرال گیری جز به جز به کمک تشکیل جدول

در زیر روش محاسبه انتگرال جز به جز به کمک تشکیل جدول با یک مثال نمایش داده شده است.

$f(x)$ و مشتقاتش

$g(x)$ و انتگرال هایش

x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x



$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

انتگرال گیری از حاصلضربها و توانهای توابع مثلثاتی

توان های فرد مثبت سینوس ها و کسینوس ها

به حسب u

$-du$

$-d \cos x = -du$

$$\int \sin^{2n+1} x dx = \int (\sin^{2n} x) (\sin x) dx = \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx = - \int (1 - u^2)^n du$$

$d \sin x = du$

$$\int \cos^{2n+1} x dx = \int \cos^{2n} x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx = \int (1 - u^2)^n du$$

به حسب u

$d \sin x$

مثال.

$\text{بر حسب } u \quad d \sin x = du$

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \, dx &= \int \overbrace{\cos^4 x}^{\text{بر حسب } u} \cdot \overbrace{\cos x \, dx}^{du} = \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 du = \int (1 - 2u^2 + u^4) du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c \\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c. \end{aligned}$$

$u = \sin x$

انتگرال توان های زوج سینوس ها و کسینوس ها

در این انتگرال ها با استفاده از اتحاد های $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ سعی در کاهش توان های

زوج و حذف ریشه ها داریم.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \end{aligned}$$

✓ کاهش توان های زوج.

مثال.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)) \, dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c. \end{aligned}$$

نکته. اگر حاصل ضربی از توان های زوج سینوس و کسینوس داشته باشیم، آنها را تبدیل به فرم فوق می نماییم.

مثال.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \, dx = \int \cos^4 x \, dx - \int \cos^6 x \, dx$$

حال انتگرال های بوجود آمده توان های زوجی از $\cos$ هستند که به روش بالا حل می شوند.

✓ حذف ریشه های دوم. **عکس روش بالا**

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \\ 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \end{array} \right.$$

مثال.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos 4x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 \cos^2 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x| dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \sqrt{2} \left. \frac{\sin 2x}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

انتگرال های سکانت و کسکانت

ایزاک بارون معلم آیزاک نیوتن در دانشگاه کمبریج، نخستین روش واضح محاسبه انتگرال سکانت را در کتاب خود به نام درس های هندسه عرضه کرد.

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x} dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\tan x + \sec x} dx = \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \ln|\sec x + \tan x| + c \\ \int \csc x dx &= \ln|\csc x - \cot x| + c = -\ln|\csc x + \cot x| \end{aligned}$$

انتگرال های $\int \sec^n x dx$ و $\int \csc^n x dx$

الف. اگر n زوج باشد. $n = 2, 4, 6, \dots$

برای محاسبه انتگرال توان های زوج $\sec$ و $\csc$ از تغییر متغیر استفاده می کنیم. فرض کنید $n = 2k$ زوج باشد.

در مورد $\sec$ از تغییر متغیر $t = \tan x$ و در مورد $\csc$ از تغییر متغیر $t = \cot x$ به صورت زیر استفاده می کنیم.

$$\int \sec^n x dx = \int (\sec^{n-2} x) (\sec^2 x) dx = \int (\sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}} (\sec^2 x) dx$$

$$= \int (1 + \tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}} (\sec^2 x) dx = \int (1 + t^2)^{\frac{n-2}{2}} dt$$

$$\begin{cases} \int \sec^2 x dx = \tan x + C \\ \int \csc^2 x dx = -\cot x + C \end{cases}$$

$$\int dt$$

$$t = \tan x$$

مثال.

$$\int \sec^6 x dx = \int (\sec^4 x) (\sec^2 x) dx = \int (\sec^2 x)^2 (\sec^2 x) dx$$

$$= \int (1 + \tan^2 x)^2 (\sec^2 x) dx = \int (1 + t^2)^2 dt = \int (1 + 2t^2 + t^4) dt$$

$$= t + \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + c = \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c.$$

ب. اگر n فرد باشد. $n = 3, 5, 7, \dots$

برای محاسبه انتگرال توان های فرد $\sec$ و $\csc$ از روش جز به جز استفاده می شود

$$\int \sec^n x dx = \int (\sec^{n-2} x) \sec^2 x dx$$

$$\sec^{n-2} x = u \rightarrow du = (n-2) \sec^{n-3} x \cdot \sec x \cdot \tan x dx = (n-2) (\sec^{n-2} x) (\tan x) dx$$

$$\sec^2 x dx = dv \rightarrow v = \tan x$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sec^n x \, dx = \int \overbrace{(\sec^{n-2} x)}^u \cdot \overbrace{\sec^2 x \, dx}^{dv} \\
 &= \underbrace{(\tan x)(\sec^{n-2} x)}^{uv} - (n-2) \int (\tan^2 x)(\sec^{n-2} x) \, dx \\
 &= (\tan x)(\sec^{n-2} x) - (n-2) \int (\sec^2 x - 1)(\sec^{n-2} x) \, dx \\
 &= (\tan x)(\sec^{n-2} x) - (n-2) \underbrace{\int \sec^n x \, dx}_I + (n-2) \underbrace{\int \sec^{n-2} x \, dx}
 \end{aligned}$$

روش بازگشتی

بنابراین

$$(n-1) \int \sec^n x \, dx = \tan x \cdot \sec^{n-2} x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx$$

برای حل این انتگرال

روش فوق را تکرار می کنیم

مثال.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sec^3 x \, dx = \int \overbrace{\sec x}^u \cdot \overbrace{\sec^2 x \, dx}^{dv} \\
 &= \underbrace{\sec x \tan x}_{uv} - \underbrace{\int \sec x \tan^2 x \, dx}_{\int v \, du} = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\
 &\rightarrow \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x \, dx}_I + \underbrace{\int \sec x \, dx} \\
 &\rightarrow 2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| \\
 &\rightarrow \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + c.
 \end{aligned}$$

$u = \sec x \rightarrow du = \sec x \cdot \tan x \, dx$
 $dv = \sec^2 x \, dx \rightarrow v = \tan x$

انتگرال حاصلضرب های سینوس ها و کسینوس ها

$$\int \sin(nx) \sin(mx) \, dx \quad \text{و} \quad \int \sin(mx) \cos(nx) \, dx \quad \text{و} \quad \int \cos(mx) \cos(nx) \, dx$$

با این انتگرال ها در موارد، جریان متناوب، مسائل انتقال گرما، خمش تیرها، تحلیل تنش کابلها در پل های معلق و مسائل مربوط به مهندسی و علوم و ریاضیات که در آنها از سری های مثلثاتی استفاده می شود، برخورد می کنیم.

برای حل آنها می توان دوبار از روش جزء به جزء استفاده کرد. ولی روش ساده تر استفاده از اتحادهای زیر است.

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

مثال.

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(3-5)x + \sin(3+5)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(-2x) dx + \frac{1}{2} \int \sin 8x dx = \frac{\cos(-2x)}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + c. \end{aligned}$$

انتگرال های $\int \cot^n x dx$ و $\int \tan^n x dx$ ($n \geq 2$)

برای حل آنها به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\begin{aligned} \int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx = \int t^{n-2} dt - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \frac{1}{n-1} t^{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \end{aligned}$$

$t = \tan x$

اکنون برای حل $\int \tan^{n-2} x dx$ دوباره از همین روش استفاده می کنیم. با ادامه این روند، هر بار توان انتگرالده کمتر می شود تا به توان یک یا دو برسد که انتگرال آن ها شناخته شده است. مثال زیر را ببینید.

$$\star \left\{ \begin{aligned} \int \tan^n u &= \ln |\sec u| + C \\ \int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int 1 dx = \tan x - x + C \end{aligned} \right.$$

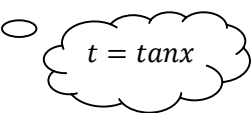
مثال.

$$\begin{aligned}
 \int \tan^8 x dx &= \int \tan^6 x \cdot \overbrace{\tan^2 x}^{d t} dx = \int \tan^6 x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \int \tan^6 x \sec^2 x dx - \int \tan^6 x dx = \frac{1}{7} \tan^7 x - \int \tan^4 x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \int \tan^4 x \sec^2 x dx + \int \tan^4 x dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{1}{5} \tan^5 x + \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \tan^2 x dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \sec^2 x + \int dx \\
 &= \frac{1}{7} \tan^7 x - \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + c.
 \end{aligned}$$

انتگرال های به فرم $\int \sec^n x \cdot \tan^m x dx$ و $\int \csc^n x \cdot \cot^m x dx$ (m, n صحیح)

الف) اگر n عددی صحیح مثبت و زوج باشد.

$$\begin{aligned}
 \int \sec^n x \cdot \tan^m x dx &= \int \overbrace{\sec^{n-2} x}^{+} \cdot \overbrace{\tan^m x}^{t} \cdot \overbrace{\sec^2 x}^{d t} dx \\
 &= \int (\sec^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \cdot \tan^m x \cdot \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \tan^m x \cdot \sec^2 x dx \\
 &= \int (1 + t^2)^{\frac{n-2}{2}} t^m dt
 \end{aligned}$$


 $t = \tan x$

مثال.

$n = 6$

$$\begin{aligned}
 \int \sec^6 x \cdot \tan^3 x &= \int \overbrace{\sec^4 x}^{+} \cdot \overbrace{\tan^3 x}^{t} \cdot \overbrace{\sec^2 x}^{d t} dx = \int (1 + \tan^2 x)^2 \tan^3 x \sec^2 x dx \\
 &= \int (1 + t^2)^2 t^3 dt = \int (1 + t^4 + 2t^2) t^3 dt \\
 &= \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{8} t^8 + \frac{2}{6} t^6 + c = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{8} \tan^8 x + \frac{2}{6} \tan^6 x + c.
 \end{aligned}$$

ب) اگر m عددی صحیح مثبت و فرد باشد، داریم.

$$\begin{aligned}
 \int \sec^n x \cdot \tan^m x \, dx & \quad \text{بر حسب } t \quad \downarrow \sec x = \downarrow t \\
 &= \int \sec^{n-1} x \cdot \tan^{m-1} x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \\
 &= \int \sec^{n-1} \cdot (\tan^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \\
 &= \int \sec^{n-1} x \cdot (\sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \\
 &= \int t^{n-1} (t^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} dt
 \end{aligned}$$

° ° ° t = sec x

دقت کنید $\frac{m-1}{2}$ عددی صحیح است.

مثال.

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3 x \cdot \sec^6 x \, dx &= \int \sec^5 x \cdot \tan^2 x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \quad \text{بر حسب } t \quad \downarrow \sec x = \downarrow t \\
 &= \int \sec^5 x (\sec^2 x - 1) \sec x \cdot \tan x \, dx \\
 &= \int (\sec^7 x - \sec^5 x) \sec x \cdot \tan x \, dx = \frac{1}{8} \sec^8 x - \frac{1}{6} \sec^6 x + c. \\
 &= \int (t^7 - t^5) \downarrow t \quad \downarrow t
 \end{aligned}$$

چون $n=6$ ، این انتگرال را می توان از قسمت (الف) نیز حل کرد.

ج) اگر m زوج و n فرد باشد.

$$\int \sec^n x \cdot \tan^m x \, dx = \int \sec^n x \cdot (\tan^2 x)^{\frac{m}{2}} \, dx = \int \sec^n x (\sec^2 x - 1)^{\frac{m}{2}} \, dx$$

بعد از توان رساندن، انتگرال شامل توان $\sec$ یا فرد $\sec$ می باشد که راه حل آن قبلاً گفته شده است.

انتگرال های به فرم $\int \sin^m x \cos^n x dx$

الف) حداقل یکی از m یا n فرد باشد. فرض کنید $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx \\ &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx = \int u^m (1 - u^2)^k du \end{aligned}$$

برای $\sin x = u$ و $du = \cos x dx$

ب) m و n هر دو زوج باشند.

$$m = 2r \quad n = 2k$$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\cos^2 x)^k (\sin^2 x)^r dx$$

در ادامه از جانشانی $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ استفاده می شود.

انتگرال توابعی که بر حسب $\sin x$ و $\cos x$ می باشند.

$$\int F(\sin x, \cos x) dx$$

در این نوع انتگرال ها از تغییر متغیر $\tan \frac{x}{2} = t$ استفاده می شود.

$$\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \tan^{-1} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int F(\sin x, \cos x) dx = \int F\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

بنابراین

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

مثال.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = - \int \frac{t^2-1}{t^2+1} dt \\ &= - \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1} dt = - \int dt + 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = -t + 2 \tan^{-1} t + c \\ &= -\tan \frac{x}{2} + 2 \tan^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

$$\int F(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$$

انتگرال توابعی که بر حسب $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ می باشند.

برای حل این نوع انتگرال ها از تغییر متغیر $t = \tan x$ استفاده می شود.

$$\tan x = t \Rightarrow x = \tan^{-1} t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$t = \tan x$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int \frac{1}{2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + c.$$

جانشانی های مثلثاتی برای عبارات $x^2 - a^2$ و $a^2 - x^2$ و $a^2 + x^2$ $a > 0$

با جانشانی $x = asint$ ، عبارت $a^2 - x^2$ به $a^2 \cos^2 t$ تبدیل می شود.

با جانشانی $x = asect$ ، عبارت $x^2 - a^2$ به $a^2 \tan^2 t$ تبدیل می شود.

با جانشانی $x = atant$ ، عبارت $a^2 + x^2$ به $a^2 \sec^2 t$ تبدیل می شود.

برای اینکه بتوانیم پس از حل انتگرال، مقدار اولیه را به جای t قرار دهیم، باید $\sin$ ، $\tan$ و $\sec$ معکوس پذیر باشند، بنابراین.

$$x = asint \rightarrow t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = atant \rightarrow t = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$x = asect \rightarrow t = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} \geq 1 \rightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{a} \leq -1 \rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال مقابل.

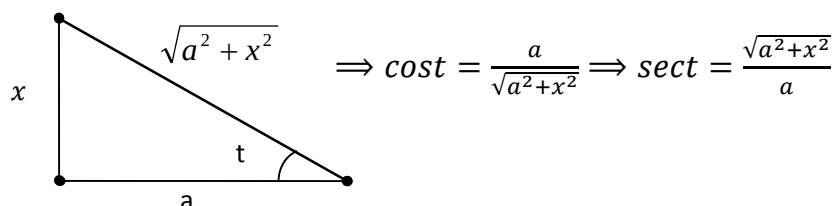
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad a > 0 \quad x = atant \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \rightarrow dx = a \sec^2 t dt$$

$$= \int \frac{a \sec^2 t dt}{\sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2}} = \int \frac{a \sec^2 t dt}{|a \sec t|} = \int \sec t dt \quad (\text{به ازای } \sec t > 0, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + c.$$

باتوجه به تغییر متغیر داده شده، مثلثی مانند روبرو به نام مثلث مرجع داریم که با استفاده از آن می توان

نسبت های به دست آمده در جواب را جایگزین کرد.

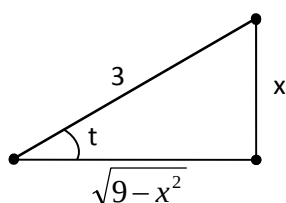


مثال.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} \quad x = 3\sin t \rightarrow dx = 3\cos t dt$$

$$= \int \frac{(9\sin^2 t)(3\cos t dt)}{3\cos t} = 9 \int \sin^2 t dt = 9 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + c$$

$$= \frac{9}{2} (t - \sin t \cos t) + c = \frac{9}{2} \left(\sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \right) + c.$$



$$\cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

نکته. انتگرال های به فرم $\int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ با تبدیلات فوق قابل حل هستند.

(*) انتگرال های شامل $ax^2 + bx + c$

به کمک مربع کامل کردن می توان سه جمله ای $ax^2 + bx + c$ را به صورت $a(u^2 \pm A^2)$ درآورد و سپس با استفاده از جانشانی های مثلثاتی آن را حل کرد.

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a(u^2 \pm A^2)$$

مثال.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1)+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+1}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}(u) + c = \sin^{-1}(x-1) + c\end{aligned}$$

$$u = x - 1 \rightarrow du = dx$$

مثال.

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}} = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2(x^2-3x+\frac{9}{4})+4-\frac{18}{4}}} = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}} \quad (I)$$

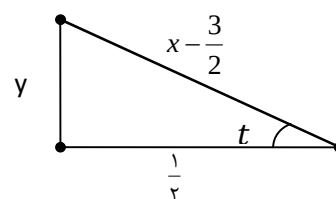
$$(x - \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \sec t \Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} \sec^2 t, \quad x = \frac{1}{2} \sec t + \frac{3}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} (\sec t) \tan t dt$$

$$(I) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{2} \sec t + \frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} \sec^2 t - \frac{1}{4}}} (\frac{1}{2} \sec t) \tan t dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{(\frac{1}{2} \sec t + \frac{5}{2})(\sec t)(\tan t)}{\frac{1}{2} \tan t} dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int (\sec^2 t + 5 \sec t) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan t + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln |\sec t + \tan t| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln |2x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}| + c$$

$$y = \sqrt{(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow \tan t = \frac{y}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}$$



انتگرال توابع کسری به فرم $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$

برای حل این نوع انتگرال ها ابتدا مشتق مخرج را به جای x صورت قرار می دهیم و سپس ضرایب را طوری در صورت کسر جدید اصلاح می کنیم که مساوی کسر اولی باشد.

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{Ab}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{A}{2a} \underbrace{\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx}_{(I)} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}_{(II)}\end{aligned}$$

انتگرال (I) با متغیر $(t = \text{مخرج})$ به راحتی قابل حل است. انتگرال (II) نیز به روش گفته شده در (*) حل می شود.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (a > 0) \quad \text{انتگرال توابع کسری به شکل}$$

در این نوع انتگرال ها، از ضریب x^2 فاکتور می گیریم و از انتگرال بیرون می آوریم. بقیه راه حل مشابه انتگرال گفته شده در (*) است.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}}$$

نکته: اگر a منفی باشد، از $-a$ فاکتور گرفته و از رادیکال بیرون می آوریم. بقیه راه حل مشابه بالاست.

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \quad \text{انتگرال توابع کسری به شکل}$$

مانند قبل، ابتدا سعی می کنیم مشتق $ax^2 + bx + c$ را در صورت به وجود آوریم و با تغییر ضرایب صورت کسر جدید را مساوی با صورت کسر اولی می کنیم. سپس انتگرال به دو انتگرال تبدیل می شود که حل آنها مشابه قسمت های قبل است.

نکته. در انتگرال گیری از توابع کسری، هرگاه درجه صورت از مخرج بیشتر باشد، صورت را به مخرج تقسیم می کنیم.

انتگرال گیری به کمک تجزیه کسرها

تجزیه کسر

برای تجزیه یک کسر به روش زیر عمل می کنیم.

ابتدا مخرج کسر را به عوامل تحویل ناپذیر، یعنی چندجمله ای های با کمترین درجه ممکن تجزیه می کنیم. سپس با توجه به نوع عوامل موجود در مخرج چند حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

۱. اگر مخرج کسر دارای چند عامل درجه اول باشد. یعنی کسری به صورت $\frac{F(x)}{(x+b_1)(x+b_2)\dots(x+b_n)}$ داریم.

در این حالت می نویسیم:

$$\frac{F(x)}{(x+b_1)(x+b_2)\dots(x+b_n)} = \frac{A_1}{x+b_1} + \frac{A_2}{x+b_2} + \dots + \frac{A_n}{x+b_n}$$

اکنون با هم مخرج کردن کسرهای سمت راست و مساوی قرار دادن کسر حاصل با کسر سمت چپ تساوی بالا، و دادن مقادیر متفاوت به x ، می توان اعداد A_1 تا A_n را به دست آورد.

مثال.

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

بنابراین چون مخرج دو کسر مساوی است باید صورت آنها نیز مساوی باشد. یعنی $2x+3 = A(x+2) + B(x-4)$

حال با دادن مقدار به x ، اعداد A و B به دست می آیند:

$$x = -2 \rightarrow 2(-2) + 3 = B(-2-4) \rightarrow -6B = -1 \rightarrow B = \frac{1}{6}$$

$$x = 4 \rightarrow 2(4) + 3 = A(4+2) \rightarrow 6A = 11 \rightarrow A = \frac{11}{6}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+2)} = \frac{\frac{11}{6}}{x-4} + \frac{\frac{1}{6}}{x+2}$$

نکته. در هنگام عددگذاری به جای x برای به دست آوردن A ، B بهتر است ریشه های مخرج را به جای x قرار دهیم.

۲. هرگاه مخرج کسر دارای عامل درجه اول با تکرار باشد. یعنی کسری به صورت

داریم. $\frac{F(x)}{(x+b_1)^{m_1}(x+b_2)^{m_2}\dots(x+b_n)^{m_n}}$ در این حالت برای هر یک از عامل ها به تعداد تکرار آن، کسر در سمت راست در نظر می گیریم. مثال بعد را ببینید.

مثال.

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{(x+1)} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{A(x+1)^3 + B_1(x+1)^2(x-2) + B_2(x+1)(x-2) + B_3(x-2)}{(x+1)^3(x-2)}$$

اکنون به جای x عدد قرار می دهیم و ضرایب A و B را محاسبه می کنیم. بهتر است ریشه های مخرج را قرار دهیم.

$$x = 2 \Rightarrow A(3)^3 = 6 \rightarrow A = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

$$x = -1 \Rightarrow B_3(-3) = 3 \rightarrow B_3 = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow A - 2B_1 - 2B_2 - 2B_3 = 2 \rightarrow -2(B_1 + B_2) = 2 - \frac{2}{9} - 2 = -\frac{2}{9} \rightarrow B_1 + B_2 = \frac{1}{9}$$

$$x = 1 \Rightarrow 8\left(\frac{2}{9}\right) - 4B_1 - 2B_2 + 1 = 3 \rightarrow 2B_1 + B_2 = -\frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = \frac{1}{9} \\ 2B_1 + B_2 = -\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow B_1 = -2/9, B_2 = 1/3$$

۳. اگر مخرج کسر دارای یک عامل از درجه دو مانند $(ax^2 + bx + c)$ باشد. یعنی کسری به صورت

داشته باشیم، آنگاه در تجزیه کسر، صورت را یک عامل درجه اول به شکل $Ax + B$ در نظر می گیریم. بقیه راه حل مشابه قبل است.

مثال. کسر $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ را تجزیه کنید.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} \Rightarrow x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1)$$

$$x = 1 \rightarrow 2C = 1 \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \rightarrow -B + C = 0 \rightarrow B = C = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \rightarrow -2(B - A) + 2C = -1 \rightarrow -2\left(\frac{1}{2} - A\right) + 1 = -1 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

بنابراین

۴. هرگاه مخرج کسر دارای عامل درجه دومی با تکرار باشد یعنی مخرج دارای جمله ای مانند $(ax^2 + bx + c)^m$ باشد، آنگاه در تجزیه کسر متناظر با این عامل به تعداد تکرارها یعنی m تا کسر در نظر می گیریم. مثال بعد را ببینید.

مثال. کسر $\frac{2x-1}{(x-2)^2(2x^2+1)^2}$ را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{(x-2)^2(2x^2+1)^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C_1x+D_1}{2x^2+1} + \frac{C_2x+D_2}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{A(x-2)(2x^2+1)^2 + B(2x^2+1)^2 + (C_1x+D_1)(2x^2+1)(x-2)^2 + (C_2x+D_2)(x-2)^2}{(x-2)^2(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$2x - 1 =$$

بنابراین

$$A(x-2)(2x^2+1)^2 + B(2x^2+1)^2 + (C_1x+D_1)(2x^2+1)(x-2)^2 + (C_2x+D_2)(x-2)^2$$

اکنون با قرار دادن اعداد مختلف به جای x ، ضرایب مجهول را بدست می آوریم.

مثال. برای محاسبه انتگرال $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx$ ، ابتدا کسر انتگرالده را تجزیه می کنیم. این کسر در مثال های قبل

$$\text{تجزیه شده است و داریم} \quad \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

بنابراین

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \tan^{-1}x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c.$$

نکته: اگر مخرج کسر به صورت حاصلضرب عوامل اول تجزیه نشده باشد، باید آن را به صورت حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد.

مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال $\int \frac{1}{x^3+1} dx$.

ابتدا مخرج کسر را به عوامل تحویل ناپذیر یعنی چندجمله ای های از کمترین درجه ممکن تجزیه می کنیم. با استفاده از اتحاد مجموع مکعبات داریم $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ دقت کنید که $x^2 - x + 1$ دارای ریشه حقیقی نیست و نمی توان آنرا به چند جمله ای های درجه اول تجزیه کرد. حال می توان کسر را تجزیه کرد.

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} = \frac{A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

$$\text{بنابراین } A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = 1$$

$$x = -1 \rightarrow 3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$x = 0 \rightarrow A + C = 1 \rightarrow C = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x = 1 \rightarrow A + 2B + 2C = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2-x+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} + \left(2 - \frac{1}{6}\right) \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{11}{6} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{11}{6} \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + c. \end{aligned}$$

مثال. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx$

برای حل این انتگرال باید کسر را تجزیه کنیم. برای تجزیه کسر، ابتدا باید چند جمله ای مخرج را به عوامل اول تجزیه کنیم. داریم

$$x = -1 \rightarrow (-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 0$$

بنابراین $x = -1$ یک ریشه مخرج است و در نتیجه $(x+1)$ یک عامل از چندجمله ای مخرج می باشد. با تقسیم چند جمله ای مخرج یعنی $x^3 + x^2 + 4x + 4$ بر $(x+1)$ عامل دیگر به صورت $(x^2 + 4)$ به دست می آید. توجه کنید که چون $x^2 + 4 = 0$ ریشه حقیقی ندارد، نمیتوان آنرا به عوامل درجه یک تجزیه کرد. بنابراین مخرج کسر به صورت مقابل تجزیه می شود.

$$x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x+1)(x^2 + 4)$$

اکنون برای تجزیه کسر می نویسیم

$$\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x+1} = \frac{(Ax+B)(x+1) + C(x^2+4)}{x^3+x^2+4x+4}$$

با قرار دادن مقادیر مختلف به x در تساوی بالا داریم

$$x = -1 \rightarrow 3(-1) - 7 = 5C \rightarrow C = -2$$

$$x = 0 \rightarrow -7 = B + 4C = B - 8 \rightarrow B = 1$$

$$x = 1 \rightarrow -4 = 2(A+B) + 5C = 2A + 2 - 10 \rightarrow A = 2$$

در نتیجه کسر انتگرالده به صورت زیر تجزیه می شود

$$\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} = \frac{2x+1}{x^2+4} - \frac{2}{x+1}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx \\ &= \int \frac{2x+1}{x^2+4} dx - 2 \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{dx}{x^2+4} - 2 \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} - 2 \ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

انتگرال توابع اصم

الف) انتگرال توابع بر حسب x و رادیکالهایی از x به صورت $\int F(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \dots, x^{\frac{r_m}{s_m}}) dx$

در این نوع انتگرال ها فرض کنید k مخرج مشترک کسرهای $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_m}{s_m}$ باشد. در این صورت از تغییر متغیر $x = t^k$ استفاده می کنیم که انتگرال اصم را به انتگرال گویا تبدیل می کند.

مثال:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx &= \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}+1}} dx & x = t^4 \quad (k=4) \Rightarrow dx = 4t^3 dt \\ &= \int \frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{(t^4)^{\frac{3}{4}+1}} 4t^3 dt = \int \frac{t^2}{t^3+1} 4t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3+1} dt = 4 \left(\int t^2 dt - \int \frac{t^2}{t^3+1} dt \right) \\ &= \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln|t^3 + 1| + c = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3} \ln|\sqrt[4]{x^3} + 1| + c. \end{aligned}$$

ب) انتگرال توابع اصم به فرم $\int G\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_m}{s_m}}\right) dx$

فرض کنید k مخرج مشترک کسرهای $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_m}{s_m}$ باشد. در این صورت از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ استفاده می کنیم که انتگرال اصم را به انتگرال گویا تبدیل می کند.

مثال.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx & & x+4 = t^2 \rightarrow dx = 2t dt \\ &= \int \frac{t}{t^2-4} 2t dt = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2-4} = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} = 2t + 8 \left(\int \frac{\frac{1}{4}}{t-2} dt + \int \frac{\frac{-1}{4}}{t+2} dt \right) \\ &= 2t + 2 \ln|t-2| - 2 \ln|t+2| + c = 2t + \ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^2 + c \\ &= 2\sqrt{x+4} + \ln\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right)^2 + c. \end{aligned}$$

مثال.

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ انتگرال بالا را به یک انتگرال گویا تبدیل می کنیم.

$$\frac{1-x}{1+x} = t^2 \rightarrow t^2(1+x) = 1-x \rightarrow x(t^2+1) = 1-t^2 \rightarrow x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\frac{-2}{(1+x)^2} dx = 2t dt \rightarrow dx = -t(1+x)^2 dt = -t \left(1 + \frac{1-t^2}{t^2+1}\right)^2 dt = \frac{-4t dt}{(t^2+1)^2}$$

بنابراین داریم

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = \int \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2 t \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt = -4 \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt \quad (I)$$

برای حل انتگرال $\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt$ از تجزیه کسرها کمک میگیریم.

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{(1-t^2)^2} &= \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2} \\ &= \frac{A(1-t)(1+t)^2 + B(1+t)^2 + C(1+t)(1-t)^2 + D(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2} \end{aligned}$$

$$t = 1 \rightarrow 4B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$t = -1 \rightarrow 4D = 1 \rightarrow D = \frac{1}{4}$$

$$t = 0 \rightarrow A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow A + C = -\frac{1}{2}$$

$$t = 2 \rightarrow -9A + \frac{9}{4} + 3C + \frac{1}{4} = 4 \rightarrow -9A + 3C = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4} \text{ \& } A = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-t)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{\frac{1}{4}}{(1+t)^2}$$

بنابراین

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 (I) &= -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1-t)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1+t)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \ln|1-t| + \frac{1}{4} \frac{1}{1-t} - \frac{1}{4} \ln|1+t| - \frac{1}{4} \frac{1}{1+t}
 \end{aligned}$$

در پایان به جای t مقدار آن یعنی $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ را قرار می دهیم.

انتگرال دوجمله ای دیفرانسیلی $\int x^m(a+bx^n)^p dx$

برای حل اینگونه انتگرال ها، ابتدا سعی می کنیم توان n را به یک تبدیل کنیم. بنابراین از تبدیل $x = z^{\frac{1}{n}}$ استفاده می

$$x = z^{\frac{1}{n}} \rightarrow dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz \quad \text{کنیم. داریم}$$

$$\begin{aligned}
 \int x^m(a+bx^n)^p dx &= \int z^{\frac{m}{n}}(a+bz)^p \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p dz \\
 &= \frac{1}{n} \int z^q (a+bz)^p dz
 \end{aligned}$$

حال اگر q, p هر دو صحیح باشند، جملات را به توان رسانده و انتگرال به راحتی حل می شود. اگر حداقل یکی از آنها گویا باشد، یکی از حالات زیر اتفاق می افتد.

حالت اول. اگر p صحیح (مثبت یا منفی) و q گویا ($q = \frac{r}{s}$) باشد. در اینصورت از تغییر متغیر $z = u^s$ استفاده می

$$z = u^s \rightarrow dz = su^{s-1} du \quad \text{کنیم. داریم}$$

$$\int z^q (a+bz)^p dz = \int u^r (a+bu^s)^p su^{s-1} du$$

بنابراین با توان رساندن جملات انتگرال حل می شود.

حالت دوم. اگر p گویا $(p = \frac{r}{s})$ و q صحیح باشد. در اینصورت از تغییر متغیر $a + bz = u^s$ استفاده می کنیم.

$$a + bz = u^s \rightarrow dz = \frac{s}{b} u^{s-1} du$$

داریم

$$\int z^q (a + bz)^p dz = \int \left(\frac{u^s - a}{b} \right)^q u^r \frac{s}{b} u^{s-1} du$$

دوباره انتگرال به یک انتگرال گویا تبدیل می شود که با توان رساندن جملات انتگرال حل می شود.

حالت سوم. هر گاه p و q هر دو گویا باشند اما $p + q$ صحیح باشد. فرض کنیم $p = \frac{r_1}{s_1}$ و $q = \frac{r_2}{s_2}$. در این

حالت انتگرالده را در $\frac{z^p}{z^p}$ ضرب می کنیم.

$$\int z^q (a + bz)^p dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a + bz}{z} \right)^p dz$$

اکنون از تغییر متغیر $\frac{a + bz}{z} = u^{s_1}$ استفاده می کنیم.

نکته. اگر هیچ کدام از حالات فوق برقرار نباشد، انتگرال جواب ندارد.

مثال.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x^2})}} = \int x^{-\frac{2}{3}} (1 + x^{\frac{2}{3}})^{-1} dx$$

$$x = z^{\frac{3}{2}} \rightarrow dx = \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$$

$$= \frac{3}{2} \int z^{-1} (1 + z)^{-1} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{3}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} (1 + z)^{-1} dz$$

بنابراین حالت اول برقرار است. $p = -1$ و $q = -\frac{1}{2}$. در نتیجه از تغییر متغیر $z = u^2$ استفاده می کنیم.

داریم

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} (1 + z)^{-1} dz \\ &= \frac{3}{2} \int u^{-1} (1 + u^2)^{-1} 2u du = 3 \int \frac{du}{1 + u^2} = 3 \tan^{-1} u + c \\ &= 3 \tan^{-1} \sqrt{z} + c = 3 \tan^{-1} \sqrt[3]{x} + c. \end{aligned}$$

مثال. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(1+x^2)^3}}$

$= \int x^{-3} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$ تغییر متغیر $x = z^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$

$= \int z^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z^{-2} (1+z)^{-\frac{3}{2}} dz \quad (I)$

حالت دوم برقرار است. از تغییر متغیر $1+z = u^2$ استفاده می کنیم. داریم $dz = 2u du$ و $z = u^2 - 1$ پس

$(I) = \frac{1}{2} \int (u^2 - 1)^{-2} u^{-3} 2u du = \int \frac{du}{(u^3 - u)^2}$

انتگرال حاصل به روش تجزیه کسر قابل حل است. (حل کنید!)

$$\frac{1}{u^2(u^2 - 1)^2} = \frac{3}{4(u+1)} + \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{3}{4(u-1)} + \frac{1}{4(u-1)^2}$$

مثال. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$

$= \int x^{-2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$ تغییر متغیر $x = z^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$

$= \int z^{-1} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{-\frac{3}{2}} dz \quad (I)$

حالت سوم برقرار است. بنابراین انتگرالده را در $\frac{z^{-\frac{3}{2}}}{z^{-\frac{3}{2}}}$ ضرب می کنیم. داریم

$(I) = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} \left(\frac{1+z}{z} \right)^{-\frac{3}{2}} dz \quad (II)$

اکنون از تغییر متغیر $\frac{1+z}{z} = u^2$ استفاده می کنیم. داریم

$$\frac{1+z}{z} = u^2 \rightarrow z = \frac{1}{u^2 - 1} \rightarrow dz = \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} du$$

$(II) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u^2 - 1} \right)^{-3} u^{-3} \frac{-2u}{(u^2 - 1)^2} du = \int \frac{1-u^2}{u^2} du = -\frac{1}{u} - u + c =$ با قرار دادن در (II) داریم

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1+z}{z}}} - \sqrt{\frac{1+z}{z}} + c = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$

مراجع

- آپوستل، تام: *حساب دیفرانسیل و انتگرال*، ترجمه: علیرضا ذکائی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۰.
- آدامز، رابرت الکساندر: *حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی*، جلد ۱ و ۲، ترجمه: علی اکبر عالم زاه، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۶.
- اشتاین، شرمن، ک: *حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی*، جلد ۲، ترجمه: علی جلیلیان، انتشارات خراسان، ۱۳۷۰.
- توماس، جرج: *حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی*، جلد ۱ و ۲، ترجمه: فرزین حاجی جمشیدی، انتشارات صفار، ۱۳۸۶.
- سیلورمن، ریچارد، آ: *حساب دیفرانسیل با انتگرال و هندسه تحلیلی*، جلد ۲، ترجمه: علی اکبر عالم زاده، انتشارات ققنوس، ۱۳۸۲.
- لیتهلد، لوئیس: *حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی*، جلد ۱ و ۲، ترجمه: علی اکبر عالم زاه، موسسه نشر علوم نوین، ۱۳۷۰.
- مارون، ایساک: *حساب دیفرانسیل و انتگرال*، ترجمه: نوروز ایزددوستدار و محمد طرخورانی، ۱۳۶۷.