به نام خدا

پروژه ۳ درس محاسبات عددی **دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات تهران** **دکترمحمدعلی بدری**

۳ نمره **کارشناسی مهندسی هوافضا** **نیمسال ۲-۱۴۰۲-۱۴۰۱**

معادله دیفرانسیل زیر را به روش اختلاف محدود حل کنید:

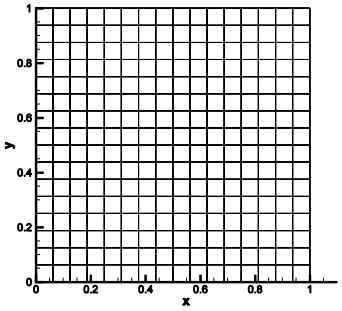
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\sin(xy)\cos(xy)e^{-xy} \qquad 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1$$

شرایط مرزی:

$$u(0,y)=U_L=100 \;\; u(1,y)=U_R=20 \;\; u(x,0)=U_D=50 \;\; u(x,1)=U_U=0$$

روشن است که این معادله بیضوی است لذا از نوع مسائل BVP است. برای حل آن مراحل زیر را طی کنید:

1. با توجه به دامنه تغییرات x و y ابتدا شبکه محاسباتی یکنواخت ایجاد کنید که در راستا محور x ها دارای M فاصله مساوی و در راستای محور y ها دارای N فاصله مساوی باشد ولی با توجه به یکنواخت بودن شبکه محاسباتی $M=N$ باشد. فواصل افقی و عمودی شبکه از رابطه $\Delta x=\Delta y=1/M$ محاسبه می‌شود. تعداد فواصل M می‌تواند ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶، ۵۱۲ و ۱۰۲۴ باشد. شماره اولین گره افقی $i=0$ و آخرین گره افقی $i=M$ است. به همین ترتیب شماره اولین گره در راستای محور y با $j=0$ و آخرین گره قائم با $j=N$ نشان داده شود. شکل زیر نمونه شبکه محاسباتی است که برای $M=16$ ترسیم شده است.



2. معادله دیفرانسیل را نسبت به مکان به روش اختلاف محدود از درجه ۲ گسسته‌سازی کنید و پس از اعمال شرایط مرزی دیریشله داده شده، دستگاه معادلات جبری خطی را به دست آورید.
3. دستگاه معادلات جبری خطی حاصل را به روش تکرار Gauss-Seidel حل کنید. برای معیار همگرایی فرض کنید نرم بی‌نهایت خطای نسبی گره‌های مجهول $L_\infty(u)$ (یا همان $\|\delta\|_\infty$) کمتر از 10^{-8} باشد:

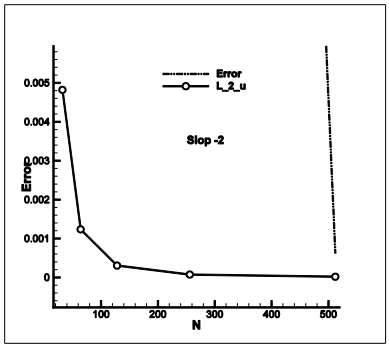
$$\|\delta\|_\infty\le 10^{-8} \quad ; \quad \delta_{ij}=\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{u_{ij}^{k+1}} \qquad i=1,\dots,M-1 \qquad j=1,\dots,N-1$$

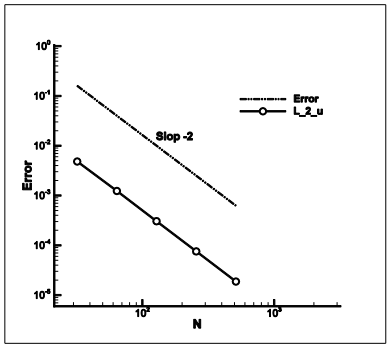
4. انتظار می‌رود که با ریزتر شدن شبکه محاسباتی دقت حل افزایش یابد. نرم دوی خطای نسبی $\|\epsilon\|_2$ حل با ۳۲، ۶۴، ۱۲۸ و ۲۵۶ گره را در مقایسه با حل دقیق (Exact Solution) محاسبه کرده و نمودار لگاریتمی $\|\delta\|_\infty$ را برحسب M رسم کنید و نشان دهید که خطای محاسباتی حل عددی شما همانطور که انتظار دارید از مرتبه ۲ می‌باشد. تعریف نرم دوی خطا مطلق به صورت زیر است:

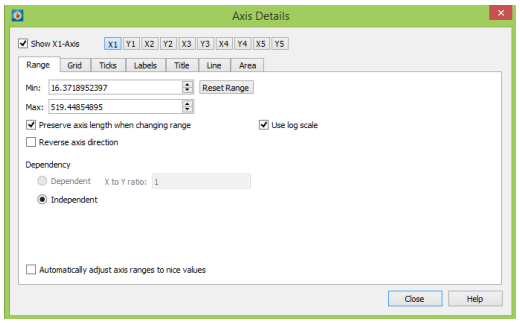
$$L_2(u)=\|\epsilon\|_2=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{32}\sum_{j=1}^{32}\left(u_{ij}-u_{ij}^{exact}\right)}{31\times 31}}$$

توجه : از آنجایی که حل دقیق این مساله در دسترس نیست لذا فرض می‌کنیم که نتایج حل با $M=1024$ گره به جای حل دقیق درنظر گرفته شود. همچنین دقت کنید وقتی شبکه 32×32 یا 256×256 را روی شبکه 1024×1024 منطبق کنیم گره‌هایی که روی هم منطبق می‌شوند دارای یک شماره نیستند. مثلا نقطه ۱ و ۲ و ۳ از شبکه 32×32 با نقاط ۱ و ۴ و ۶ از شبکه 64×64 و نقاط ۱ و ۸ و ۱۲ از شبکه 128×128 و .... و نقاط ۱ و ۳۲ و ۹۶ از شبکه 1024×1024 منطبق هستند. در حالیکه نرم ۲ خطا فقط برای نقاط منطبق بر شبکه 32×32 محاسبه می‌شود و فرقی ندارد که M چقدر باشد. اگر محل نقاط تغییر داده شود نرم خطای به دست آمده درست نبوده و نمی‌توان مرتبه خطا را بررسی کرد.

5. راهنمایی: برای رسم نمودار لگاریتمی در نرم افزار Tecplot360 گزینه Use Log Scale را برای هر دو محور افقی و قائم فعال کنید. اگر این گزینه فعال نباشد نمودار خطا بر حسب تعداد نقاط شبکه به صورت شکل چپ و در صورت فعال بودن به صورت شکل راست خواهد شد. شکل راست مورد نظر است.







برای فعال کردن این گزینه در Tecplot360 کافیست روی محور افقی دبل کلیک کنید و در تب Range مانند شکل بالا تیک Use log scale را فعال کنید. سپس همین کار را برای محور عمودی تکرار کنید.

6. راهنمایی: برای نمایش شبکه محاسباتی و کانتور توزیع $u(x,y)$ در میدان محاسباتی در نرم‌افزار Tecplot360 مطابق نمونه کد فرترن ارائه شده اقدام کنید. (نحوه دانلود و نصب نرم‌افزار Tecplot360 در گروه تلگرامی به صورت فایل pdf ارسال شده است):

```
      OPEN(12,FILE="x-y-u.dat")
      WRITE(12,*)'title="U test" '
      WRITE(12,*)'variables=x,y,U'
      WRITE(12,*)'zone t="plane 1"  '
      WRITE(12,14) 1+M, 1+N
14    FORMAT('i=',i7,5x,'j=',i7,5x,'f=piont')
      do j=0,N
      do i=0,M
      WRITE(12,*)x(i,j),y(i,j),u(i,j)
      end do
      end do
```

7. مساله را بار دیگر حل کنید ولی این بار برای حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی به جای روش تکرار گوس سایدل از روش تکرار SOR[1] استفاده کنید. ابتدا مقدار بهینه ضریب فوق تخفیف ω را برای شبکه با $M = 64$ به دست آورید. برای این کار نموداری رسم کنید که محور افقی آن ω و محور عمودی آن تعداد تکرار لازم برای همگرایی حل باشد. هر مقدار از ω که دارای کمترین تعداد تکرار باشد را به عنوان ω_{opt} درنظر بگیرید (Optimum به معنی بهینه). معیار همگرایی را مثل بند شماره ۳ یعنی $\|\delta\|_\infty \leq 10^{-8}$ درنظر بگیرید. پس از تعیین ضریب فوق تخفیف بهینه، آن را برای همه مقادیر M استفاده کنید.

8. تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی به روش گوس سایدل و روش SOR را در جدولی مانند زیر مقایسه کنید:

M	Gauss-Seidel	SOR ($with\ \omega_{opt}$)
32		
64		
128		
256		
512		

موفق باشید. بدری

[1] Successive Over Relaxation Algorithm