# فصل سوم :

# تعریف مسئله و ارائه مدل ریاضی

## ۳-۱- مقدمه

با توجه به کاربرد خاص مسائل مکان‌یابی هاب، بررسی این‌گونه مسائل و مدل‌سازی آن‌ها در شرایط نزدیک به شرایط واقعی می‌تواند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار باشد. تصمیم‌گیری درباره مکان مناسب هاب از جمله تصمیمات استراتژیک محسوب می‌شود. در این فصل به مدل‌سازی و بررسی مسئله مکان‌یابی p-هاب میانه قابل اطمینان و پایدار با تخصیص r-تایی پرداخته شده است.

## ۳-۲- فرض‌های مسئله

در فصل‌های قبل سه فرض اساسی مسئله مکان‌یابی هاب در حالت کلاسیک بیان شد که بسته به مورد در بعضی مواقع از سوی برخی از محققین نادیده نیز گرفته می‌شوند که موجب ارائه انواع خاص از مسائل هاب می‌گردد.

فرضیات مسئله در حالت کلاسیک عبارتند از:

- ✓ ارتباط مستقیم بین نقطه‌های مبدأ و مقصد مجاز نیست.
- ✓ هاب‌ها به طور کامل به هم متصل هستند.
- ✓ برای مسیر بین هر جفت هاب صرفه‌جویی حاصل از ترانزیت انبوه محصولات با ضریب تنزیل $\alpha$ وجود دارد.

در این پایان‌نامه تمامی فرض‌های مسئله در حالت کلاسیک پذیرفته شده‌اند و مدلی که ارائه خواهد شد دارای تمامی این فرض‌ها است. فرض‌های دیگری که در این پژوهش به فرضیات کلاسیک اضافه شده‌اند عبارتند از:

- دامنه گره‌های کاندید برای استقرار هاب‌ها شامل همه گره‌های شبکه است. به عبارت دیگر تمامی نقاط شبکه پتانسیل هاب شدن را دارند.
- تعداد هاب‌های مجاز جهت تأسیس در شبکه از قبل مشخص شده‌اند و برابر با p است.
- هزینه ثابت برای استقرار هاب‌ها در نظر گرفته شده است.
- هر گره غیر هاب می‌تواند به حداکثر r هاب از p هاب تخصیص یابد ($r \leq p$). تخصیص r-تایی است.
- ضریب های هزینه $\chi$ در انتقال جریان از لینک‌های بین گره‌های مبدأ به هاب‌ها (فاز جمع‌آوری) و $\delta$ در انتقال جریان از لینک‌های بین هاب‌ها به گره‌های مقصد (فاز توزیع) در نظر گرفته شده‌اند.
- گره‌های غیر هاب به طور مستقیم به یکدیگر متصل نیستند و برای عبور از یک گره غیرهاب به گره غیر هاب دیگر، حداقل از یک گره هاب و حداکثر از دو گره هاب عبور می‌شود.
- دو مفهوم قابلیت اطمینان و پایداری برای مسئله مکان‌یابی هاب لحاظ شده‌اند.
- نرخ خرابی در محاسبه قابلیت اطمینان، از دو قسمت ثابت و متغییر تشکیل شده است، که قسمت متغییر آن وابسته به جریان عبوری از لینک‌های هر مسیر است.
- یک ظرفیت مشخص برای جریان عبوری از هر لینک در هر مسیر در نظر گرفته شده است.
- به منظور در نظر گرفتن پایداری، مصرف سوخت تمام لینک‌های موجود در هر مسیر محاسبه می‌شود.
- سرعت مجاز در هر لینک به میزان جریان عبوری از آن بستگی دارد.

## ۳-۳- تعریف مسئله

مسئله‌ی مکان‌یابی هاب به تعیین مکان گره‌های هاب و تخصیص گره‌های غیر هاب به هاب‌ها می‌پردازد. تابع هدف معمول در مدل‌های مکان‌یابی p_هاب، کمینه کردن هزینه‌های تأسیس هاب و هزینه‌های حمل و نقل می‌باشد. در این پژوهش دو تابع هدف دیگر به صورت هم‌زمان بررسی شده است. همانطور که بیان شد، در نظر گرفتن قابلیت اطمینان مسیر و مفهوم توسعه پایدار در طراحی سیستم‌های حمل و نقل بسیار اهمیت دارد. بنابراین بیشینه‌سازی قابلیت اطمینان مسیر بین مبادی و مقاصد در شبکه به عنوان تابع هدف دوم و همچنین کمینه‌سازی مصرف سوخت به عنوان تابع هدف سوم در مدل این پایان‌نامه استفاده می‌شود.

## ۳-٤- بررسی مدل

در این بخش مدل پیشنهادی بررسی خواهد شد.

### ۳-٤-۱- اندیس‌های مدل

در جدول (۳-۱) اندیس‌های مدل به همراه نام و مقدار مجاز آن‌ها نشان داده شده است.

جدول ۳-۱ : اندیس‌های مدل

| اندیس | نام | مقدار |
|---|---|---|
| $i$ | شمارنده گره‌های مبدأ | $1.2.3.\cdots.N$ |
| $j$ | شمارنده گره‌های مقصد | $1.2.3.\cdots.N$ |
| $k$ | هاب اول | $1.2.3.\cdots.N$ |
| $l$ | هاب دوم | $1.2.3.\cdots.N$ |

### ۳-٤-۲- پارامترهای مدل

در جدول (۳-۲) پارامترهای مدل به همراه توضیح هر پارامتر نشان داده شده است.

جدول ۳-۲ : پارامترهای مدل

| نام پارامتر | توضیح |
|---|---|
| $N$ | تعداد گره‌های شبکه |
| $p$ | تعداد هاب‌ها |
| $r$ | تعیین کننده تعداد تخصیص‌های هر گره غیر هاب |
| $t_{ij}$ | مقدار ترافیکی که باید از $i$ به $j$ فرستاده شود. |
| $\chi$ | ضریب هزینه جمع‌آوری جریان از گره‌های مبدأ به هاب اول $i \longrightarrow k$ |
| $\alpha$ | فاکتور تخفیف هزینه انتقال جریان بین دو هاب $k \longrightarrow l$ و معمولا $\alpha \leq \chi$ و $\alpha \leq \delta$ |
| $\delta$ | ضریب هزینه توزیع جریان از هاب دوم به گره‌های مقصد $l \longrightarrow j$ |
| $d_{ij}$ | فاصله بین دو گره $i$ و $j$ |

$c_{ij}$ هزینه حمل و نقل واحد جریان بین دو گره $i$ و $j$

$c_{ijkl}$ هزینه حمل و نقل جریان در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ و برابر است با:

$$c_{ijkl} = \chi c_{ik} + \alpha c_{kl} + \delta c_{lj}$$

$F_k$ هزینه ثابت استقرار هاب در نقطه $k$

$T$ زمان سفر از گره $i$ به $j$ بدون وقوع خرابی

$a_{ik}$ بخش مستقل از ترافیک نرخ خرابی

$b_{ijkl}$ بخش وابسته به ترافیک نرخ خرابی

$f^{max}{}_{lj} . f^{max}{}_{kl} . f^{max}{}_{ik}$ ماکزیمم جریان در هر لینک در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$

$v_{lj}^{f} . v_{kl}^{f} . v_{ik}^{f}$ سرعت آزاد در هر لینک در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$

$v_{lj}^{min} . v_{kl}^{min} . v_{ik}^{min}$ حداقل سرعت در هر لینک در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$

$v_{lj}^{max} . v_{kl}^{max} . v_{ik}^{max}$ حداکثر سرعت مجاز در هر لینک در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$

$FV$ میزان جریانی که در بیشترین سرعت مجاز حمل می‌شود و برابر است با:

$$\mathcal{FV} = \frac{(v^f - v^{max}) f^{max}}{v^f - v^{min}}$$

## ۳-٤-۳- متغیرهای مدل

- متغیرهای تصمیم

در جدول(۳-۳) متغیرهای تصمیم مدل به همراه توضیح هر متغیر نشان داده شده است.

جدول ۳-۳ : متغیرهای تصمیم

| نام | توضیح | |
|---|---|---|
| $X_{ik}$ | اگرگره $i$ به هاب $k$ تخصیص یابد | ۱ |
| | اگرگره $i$ به هاب $k$ تخصیص نیابد | ۰ |
| $X_{kk}$ | اگر گره $k$ هاب باشد | ۱ |
| | اگر گره $k$ هاب نباشد | ۰ |
| $X_{ijkl}$ | درصدی از $t_{ij}$ که از طریق مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ عبور داده می‌شود به نحوی که نقاط $k$ و $l$ هاب باشند. | |

- متغیرهای وابسته

در جدول(۳-۴) متغیرهای وابسته مدل به همراه توضیح هر متغیر نشان داده شده است.

جدول ۳-۴ : متغیرهای وابسته

| نام | توضیح |
|---|---|
| $\lambda_{lj}$ ,$\lambda_{kl}$, $\lambda_{ik}$ | نرخ خرابی در هر لینک در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ |
| $\lambda_{ijkl}$ | نرخ خرابی مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ |
| $f_{lj}$ ,$f_{kl}$ ,$f_{ik}$ | جریان عبوری از هر لینک در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ |
| $v_{lj}.v_{kl}.v_{ik}$ | سرعت در هر لینک در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ |
| $FC_{lj}.FC_{kl}.FC_{ik}$ | میزان مصرف سوخت در هر لینک در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ |

## ۳-٤-٤- توابع هدف

در مدل مکان‌یابی چند هدفه هاب قابل اطمینان و پایدار ارائه شده در این پژوهش، سه تابع هدف تعیین شده است. تابع هدف اول، مربوط به کمینه سازی هزینه‌های شبکه است. تابع هدف دوم، قابلیت اطمینان شبکه را افزایش می‌دهد. تابع هدف سوم، بر مفهوم پایداری و توسعه پایدار تاکید دارد. در ادامه جز به جز توابع مدل شرح داده می‌شود.

$$min \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in N}\sum_{l\in N} t_{ij}c_{ijkl}X_{ijkl} + \sum_{i\in N} X_{kk}F_k \qquad (۱-۳)$$

تابع هدف اول (۳-۱) مجموع هزینه حمل و نقل در شبکه و هزینه ثابت استقرار هاب‌ها را محاسبه می‌کند.

$$max \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in N}\sum_{l\in N} t_{ij}e^{-\lambda_{ijkl}*T}X_{ijkl} \qquad (۲-۳)$$

تابع هدف دوم (۳-۲) میزان قابلیت اطمینان وابسته به زمان شبکه (امیدریاضی مجموع جریان عبوری در بازه زمانی $(0.T)$) را محاسبه می‌کند. نرخ خرابی از دو قسمت ثابت و متغییر تشکیل شده است، که قسمت متغییر آن وابسته به جریان عبوری از لینک‌های هر مسیر است.

$$min\, FC = \left[\sum_{i\in N}\sum_{k\in N} d_{ik}FC_{ik} + \sum_{k\in N}\sum_{l\in N} d_{kl}FC_{kl} + \sum_{l\in N}\sum_{j\in N} d_{lj}FC_{lj}\right] \qquad (۳-۳)$$

تابع هدف سوم (۳-۳) میزان مصرف سوخت در هر مسیر شبکه را محاسبه می‌کند. و هر مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ شامل سه لینک مبدأ به هاب اول، بین دو هاب و هاب دوم به مقصد است.

در جدول (۳-۵) به طور مختصر هر یک از بخش‌های توابع هدف شرح داده شده است.

جدول ۳-۵ : توضیحات مربوط به توابع هدف

| | |
|---|---|
| $\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in N}\sum_{l\in N} t_{ij}c_{ijkl}X_{ijkl}$ | هزینه‌های حمل و نقل درمسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ |
| $\sum_{i\in N} X_{kk}F_k$ | هزینه ثابت احداث هاب‌ها |
| $\sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{k\in N}\sum_{l\in N} t_{ij}e^{-\lambda_{ijkl}*T}X_{ijkl}$ | قابلیت وابسته به زمان هر مسیر |
| $\sum_{i\in N}\sum_{k\in N} d_{ik}FC_{ik}$ | مصرف سوخت در لینک مبدأ به هاب اول |

| | |
|---|---|
| $\sum_{k\in N}\sum_{l\in N} d_{kl}FC_{kl}$ | مصرف سوخت در لینک بین دو هاب |
| $\sum_{l\in N}\sum_{j\in N} d_{lj}FC_{lj}$ | مصرف سوخت در لینک بین هاب دوم به مقصد |

### ۳-٤-۵- محدودیت‌های مسئله

محدودیت‌های مدل ارائه شده به شرح زیر هستند:

$$\sum_{k\in N} X_{ik} \le r \qquad ;\forall i \in N \qquad (۴-۳)$$

$$X_{ik} \le X_{kk} \qquad ;\forall i.k \in N \qquad (۵-۳)$$

$$\sum_{k\in N} X_{kk} = p \qquad (۶-۳)$$

$$\sum_{k\in N}\sum_{l\in N} X_{ijkl} = 1 \qquad ;\forall i.j \in N \qquad (۷-۳)$$

$$\sum_{l\in N} X_{ijkl} \le X_{ik} \qquad ;\forall i.j.k \in N \qquad (۸-۳)$$

$$\sum_{k\in N} X_{ijkl} \le X_{jl} \qquad ;\forall i.j.l \in N \qquad (۹-۳)$$

$$\lambda_{ik} = a_{ik} + \sum_{j\epsilon N}\sum_{l\epsilon N} b_{ijkl}X_{ijkl}t_{ij} \qquad ;\forall i.k \in N \qquad (۱۰-۳)$$

$$\lambda_{kl} = a_{kl} + \sum_{i\epsilon N}\sum_{j\epsilon N} b_{ijkl}X_{ijkl}t_{ij} \qquad ;\forall\ k.l \in N \qquad (۱۱-۳)$$

$$\lambda_{lj} = a_{lj} + \sum_{i\epsilon N}\sum_{k\epsilon N} b_{ijkl}X_{ijkl}t_{ij} \qquad ;\forall l.j \in N \qquad (۱۲-۳)$$

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{ik} + \lambda_{kl} + \lambda_{lj} \qquad ;\forall i.j.k.l \in N \qquad (۱۳-۳)$$

$$f_{ik} = \sum_{j}\sum_{l} X_{ijkl}t_{ij} \qquad ;\forall i.k \in N \qquad (۱۴-۳)$$

$$f_{kl} = \sum_{i}\sum_{j} X_{ijkl}t_{ij} \qquad ;\forall k.l\ \in N \qquad (۱۵-۳)$$

$$f_{lj} = \sum_{i}\sum_{k} X_{ijkl}t_{ij} \qquad ;\forall l.j\ \in N \qquad (۱۶-۳)$$

$$f_{ik} \le \frac{v_{ik}^{f} * f^{max}}{v_{ik}^{f} - v_{ik}^{min}} \qquad ;\forall i.k\ \in N \qquad (۱۷-۳)$$

$$f_{kl} \le \frac{v_{kl}^{f} * f^{max}}{v_{kl}^{f} - v_{kl}^{min}} \qquad ;\forall k.l \in N \qquad (۱۸-۳)$$

$$f_{lj} \le \frac{v_{lj}^{f} * f^{max}}{v_{lj}^{f} - v_{lj}^{min}} \qquad ;\forall l.j \in N \qquad (۱۹-۳)$$

$$v_{ik} = \begin{cases} v_{ik}^{f} - \dfrac{\left(v_{ik}^{f} - v_{ik}^{min}\right) f_{ik}}{f^{max}} & f_{ik} > FV \\ v_{ik}^{max} & f_{ik} \le FV \end{cases} \qquad ;\forall i.k \in N \qquad (۲۰-۳)$$

$$v_{kl} = \begin{cases} v_{kl}^{f} - \dfrac{\left(v_{kl}^{f} - v_{kl}^{min}\right) f_{kl}}{f^{max}} & f_{kl} > FV \\ v_{kl}^{max} & f_{kl} \le FV \end{cases} \qquad ;\forall k.l \in N \qquad (۲۱-۳)$$

$$v_{lj} = \begin{cases} v_{lj}^{f} - \dfrac{\left(v_{lj}^{f} - v_{lj}^{min}\right) f_{ik}}{f^{max}} & f_{lj} > FV \\ v_{lj}^{max} & f_{lj} \le FV \end{cases} \qquad ;\forall l.j \in N \qquad (۲۲-۳)$$

$$\begin{aligned} FC_{ik} = 0.037\big(&12690 + 16.5v_{ik} + 86.87v_{ik}^{2} \\ &- 3.55v_{ik}^{3} + 0.06146v_{ik}^{4} \\ &- 0.0004773v_{ik}^{5} \\ &+ 0.000001385v_{ik}^{6}\big)/v_{ik} \end{aligned} \qquad ;\forall i.k \in N \qquad (۲۳-۳)$$

$$\begin{aligned} FC_{kl} = 0.037\big(&12690 + 16.5v_{kl} + 86.87v_{kl}^{2} \\ &- 3.55v_{kl}^{3} + 0.06146v_{kl}^{4} \\ &- 0.0004773v_{kl}^{5} \\ &+ 0.000001385v_{kl}^{6}\big)/v_{kl} \end{aligned} \qquad ;\forall k.l \in N \qquad (۲۴-۳)$$

$$\begin{aligned} FC_{lj} = 0.037\big(&12690 + 16.5v_{lj} + 86.87v_{lj}^{2} \\ &- 3.55v_{lj}^{3} + 0.06146v_{lj}^{4} \\ &- 0.0004773v_{lj}^{5} \\ &+ 0.000001385v_{lj}^{6}\big)/v_{lj} \end{aligned} \qquad ;\forall l.j \in N \qquad (۲۵-۳)$$

$$X_{ijkl} \ge 0 \qquad \forall i.j.k.l \in N \qquad (۲۶-۳)$$

$$X_{ik} \in \{0\ 1\} \qquad \forall i.k \in N \qquad (۲۷-۳)$$

محدودیت (۳-۴) تضمین می‌کند که هر نقطه حداکثر به $r$ هاب تخصیص پیدا می‌کند. محدودیت (۳-۵) نشان می‌دهد که هر گره غیر هاب فقط به گره‌ای که هاب است، می‌تواند تخصیص پیدا کند. محدودیت (۳-۶) تعداد هاب‌ها را نشان می‌دهد. محدودیت (۳-۷) تضمین می‌کند که جریان به طور کامل بین هر جفت مبدأ و مقصد ارسال می‌شود. محدودیت (۳-۸) و (۳-۹) بیانگر این

نکته هستند که در صورتی جریان در مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ منتقل می‌شود که نقاط $i$ و $j$ به ترتیب به هاب‌های $k$ و $l$ تخصیص داده شده باشند. محدودیت‌های (۳-۱۰) تا (۳-۱۲) به ترتیب نرخ خرابی لینک‌های $i \longrightarrow k$، $k \longrightarrow l$ و $l \longrightarrow j$ را محاسبه می‌کنند. نرخ خرابی کل مسیر $i \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow j$ در محدودیت (۳-۱۳) محاسبه می‌شود. و این نحوه محاسبه نرخ خرابی تفاوت بین مدل ما و مدل پسندیده، نیاکی و شیخی [۱۵] است. محدودیت‌های (۳-۱۴) تا (۳-۱۶) به ترتیب جریان عبوری از لینک‌های $i \longrightarrow k$ ، $k \longrightarrow l$ و $l \longrightarrow j$ را محاسبه می‌کنند. محدودیت‌های (۳-۱۷) تا (۳-۱۹) نشان دهنده محدودیت ظرفیت درلینک‌های $i \longrightarrow k$ ، $k \longrightarrow l$ و $l \longrightarrow j$ هستند. محدودیت‌های (۳-۲۰) تا (۳-۲۲) به ترتیب سرعت در لینک‌های $i \longrightarrow k$ ، $k \longrightarrow l$ و $l \longrightarrow j$ را محاسبه می‌کنند. مصرف سوخت در لینک‌های $i \longrightarrow k$ ، $k \longrightarrow l$ و $l \longrightarrow j$ به ترتیب در محدودیت‌های (۳-۲۳) تا (۳-۲۵) محاسبه می‌شود. که فرمول کلی محاسبه مصرف سوخت در مقاله [۴۹] معرفی شده است، و ضرایب استفاده شده در این مدل از گزارش [۵۰] گرفته شده است. و در نهایت محدودیت (۳-۲۶) و (۳-۲۷) محدوده متغیرهای تصمیم را نشان می‌دهد.

## ۳-۵- خلاصه فصل

در فصلی که گذشت ابتدا فرضیات مسئله مکان‌یابی هاب میانه قابل اطمینان و پایدار با تخصیص r-تایی مطرح شد و سپس مدل ریاضی سه هدفه که تابع هدف اول در صدد کمینه کردن مجموع هزینه تأسیس هاب و هزینه حمل و نقل در شبکه، تابع هدف دوم در صدد بیشینه کردن قابلیت اطمینان وابسته به زمان شبکه و تابع هدف سوم در صدد کاهش مصرف سوخت می‌باشد، ارائه شد.