فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ مفاهیم مقدماتی قابلیت اعتماد کلاسیک

تحقیق در زمینه قابلیت اعتماد با مساله تعمیر و نگهداری ماشین‌ها در اواخر دهه ۱۹۳۰ وجایگزینی لامپ‌های روشنایی خیابان دراوایل دهه ۱۹۴۰ آغاز شد. جنگ جهانی دوم و ساخت ابزارهای پیچیده‌ی نظامی باعث شد تا مدل‌سازی قابلیت اعتماد سیستم‌ها مورد توجه قرار گیرد. در دهه ۵۰ همزمان با ابداع سیستم‌های الکترونیکی، مطالعات در مورد قابلیت اعتماد وارد مراحل تازه‌ای شد. دهه ۶۰ با آغاز عصر فضا و پیشرفت‌های صنایع فضایی، تحقیق و پژوهش در زمینه قابلیت اعتماد گسترش بیشتری یافت، در این میان نقش آماردانان نیز بسیار برجسته بود. در همین سال‌ها اولین کتاب در این زمینه توسط بازوفسکی[۱] (۱۹۶۱) و همچنین اولین شماره نشریه "$IEEE\ Transaction\ on\ Reliability$" منتشر شد. ریاضیدانان و آماردانان معروف دیگری همچون بیرن بام[۲]، و بارلو و پروشان[۳] در این دوره نقش بسیار مهمی را در پیشبرد و توسعه نظریه قابلیت اعتماد ایفا کرده‌اند. در یک دسته‌بندی کلی، بسیاری از مقالات و تحقیقات ارائه شده در سه محور قابلیت اعتماد ساختاری (روش‌های طراحی سیستم و نحوه تاثیر آن‌ها بر عملکرد سیستم‌ها)، قابلیت اعتماد تصادفی (مدل‌بندی کردن و بررسی ویژگی‌های طول عمر سیستم) و قابلیت اعتماد آماری (استنباط در رابطه با ویژگی‌های کلی یک سیستم بر حسب داده‌های تجربی موجود درباره عملکرد آن) دسته‌بندی می‌شوند. از جمله مهم‌ترین این تحقیقات می‌توان به بیرن بام و همکاران (۱۹۶۱)، پروشان (۱۹۶۳)، بارلو و پروشان (۱۹۶۵)، بیرن بام و همکاران (۱۹۶۶) و مارشال و اولکین[۴] (۱۹۶۷) اشاره نمود. در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی همزمان با پیشرفت صنایع پتروشیمی و تکنولوژی راه‌آهن، اتومبیل‌سازی و سدسازی از تکنیک‌های آماری به طور وسیعی در قابلیت اعتماد استفاده گردید. همچنین در طراحی انواع سیستم‌های صنعتی، روش‌های قابلیت اعتماد بکار گرفته شد و در دهه ۹۰ با پیشرفت صنعت بیمه و مسائل رقابتی، مباحث قابلیت اعتماد به علوم پزشکی نیز وارد شد.

تعریف ۱.۱. یک سیستم شامل n مولفه را در نظر بگیرید. بردار $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_n) \in \{0, 1\}^n$ را بردار

[1] Bazovsky
[2] Birnbaum
[3] Barlow and Proschan
[4] Marshall and Olkin

وضعیت[۱] سیستم می‌گویند که در آن متغیر دودویی[۲] x_i، وضعیت مولفه iـام را نشان می‌دهد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$x_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مولفه } i- \text{ ام فعال باشد} \\ ۰ & \text{اگر مولفه } i- \text{ ام غیر فعال باشد} \end{cases}$$

برای بیان قابلیت اعتماد سیستم بر اساس قابلیت اعتماد مولفه‌های آن از تابعی موسوم به تابع ساختار[۳] استفاده می‌شود که در مقایسه عملکرد سیستم‌ها نیز مفید واقع می‌شود. با فرض این‌که $\mathbf{X}$، فضای مربوط به همه بردارهای وضعیت ممکن برای یک سیستم مولفه‌ای باشد، تابع ساختار سیستم با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر سیستم فعال باشد} \\ ۰ & \text{اگر سیستم غیرفعال باشد} \end{cases}$$

بدیهی است که φ تابعی از بردار وضعیت $\mathbf{x}$ است؛ یعنی $\varphi : \{۰,۱\}^n \to \{۰,۱\}$.

تعریف ۲.۱. مولفه iـام سیستم را نامرتبط[۴] گویند هرگاه مقدار تابع ساختار سیستم به‌ازای مقادیر مختلف (وضعیت مولفه iـام) یکسان باشد. به بیان دیگر، فعال بودن یا غیرفعال بودن این مولفه در مقدار تابع ساختار بی‌تاثیر باشد. به‌عبارت دیگر

$$\varphi(x_۱, ..., x_{i-۱}, ۰, x_{i+۱}, ..., x_n) = \varphi(x_۱, ..., x_{i-۱}, ۱, x_{i+۱}, ..., x_n),$$

همچنین تابع ساختار یک سیستم را غیرنزولی گوییم هرگاه برای بردارهای وضعیت $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ که دارای شرط $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ هستند، رابطه زیر برقرار باشد

$$\varphi(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{y})$$

اکنون ابزار کافی را در جهت معرفی گونه‌ای خاص و پرکاربرد از سیستم‌ها در نظریه قابلیت اعتماد را در اختیار داریم.

تعریف ۳.۱. یک سیستم را منسجم[۵] گوییم هرگاه تابع ساختار آن غیرنزولی باشد و دارای مولفه نامرتبط نباشد.

مثال ۴.۱. فرض کنید سیستمی شامل n مولفه $x_۱, ..., x_n$ باشد.
الف) اگر کارکردن سیستم منوط به کارکردن تمام مولفه‌هایش باشد، گوییم مولفه‌های سیستم در ساختار سری[۶] قرارگرفته و دارای تابع ساختار زیر هستند

$$\varphi(\mathbf{X}) = \phi(x_۱, ..., x_n) = \prod_{i=۱}^{n} x_i.$$

[1] State Vector
[2] Binary
[3] Structure Function
[4] Irrelavent
[5] Coherent System
[6] Series System

ب) سیستم را موازی[1] گویند، هرگاه سیستم در صورتی کار کند که حداقل یکی از مولفه‌هایش کار کند. تابع ساختار سیستم موازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varphi(\mathbf{X}) = \phi(x_۱, ..., x_n) = ۱ - \prod_{i=۱}^{n}(۱ - x_i).$$

پ) در صورتی که برای کارکردن سیستم، کارکردن حداقل k جزء از n جزء الزامی باشد، سیستم را k از n[2] می‌گویند که تابع ساختار آن با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} ۱ & \\ ۰ & \end{cases}.$$

۱.۱.۱ تابع قابلیت اعتماد

فرض کنید متغیر تصادفی T، بیانگر طول عمر یک سیستم، یک قطعه الکتریکی یا هر وسیله یا شیء دیگر باشد. طبیعی است که T یک متغیر تصادفی نامنفی است که می‌تواند پیوسته و یا گسسته باشد. به عبارت دیگر سیستم می‌تواند طول عمری داشته باشد که هر مقداری را در فاصله $(۰, \infty)$ اختیار کند یا می‌توان طول عمر آن را طوری تعریف کرد که مقادیر شمارش‌پذیر مثلاً اعداد طبیعی را اختیار کند. به عنوان مثال، اگر لامپ فلورسنت به عنوان سیستم در نظر گرفته شود، طول عمر آن یک متغیر تصادفی T است که هر مقدار را در فاصله $(۰, \infty)$ می‌گیرد و اگر سیستم، یک دستگاه فتوکپی در نظر گرفته شود طول عمر آن یعنی T را می‌توان تعداد کپی‌هایی در نظر گرفت که قبل از خرابی گرفته است. در این پژوهش متغیر تصادفی T، پیوسته با تابع توزیع $F_T(t)$ و تابع چگالی $f_T(t) = \frac{dF_T(t)}{dt}$ در نظر گرفته می‌شود.
پرکاربردترین تابع در تجزیه و تحلیل داده‌های طول عمر، تابع قابلیت اعتماد (تابع بقا) است.

تعریف ۱.۵. احتمال کارکرد بدون شکست مؤلفه مورد نظر، بیش از زمان مشخص t را تابع قابلیت اعتماد گویند و با $R_T(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_T(t) = P(T > t), \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{۱.۱}$$

واضح است که $R_T(۰) = ۱$، یعنی در زمان $t = ۰$ قابلیت اعتماد مؤلفه برابر یک است و $R_T(\infty) = ۰$ یعنی در دراز مدت مؤلفه از کار می‌افتد. همچنین $R_T(t)$ یک تابع غیرصعودی است، به این معنی که اگر $۰ < t_۱ < t_۲$، آنگاه $R_T(t_۱) \geq R_T(t_۲)$ و این یعنی با گذر زمان، قابلیت اعتماد مؤلفه بیشتر نمی‌شود.

مثال ۱.۶. فرض کنید طول عمر یک مؤلفه یعنی T دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشد، که با نماد $T \sim E(\theta)$ نشان داده می‌شود و تابع قابلیت اعتماد آن به صورت زیر است:

$$R_T(t) = e^{-\theta t}, \qquad t > ۰, \theta > ۰.$$

به عنوان نمونه، اگر $\theta = ۰/۰۰۲$، قابلیت اعتماد این مؤلفه در $t = ۲$ ساعت برابر است با $R_T(۲) = ۰/۹۹۶ = e^{-۰/۰۰۴}$. بنابراین، احتمال اینکه مؤلفه مورد نظر پس از ۲ ساعت کارکرد، همچنان بدون شکست

[1] Parrallel [2] k-out-of-n

به فعالیت خود ادامه دهد، برابر با ۹۹/۶ درصد است. فرض کنید طول عمر یک مؤلفه یعنی T دارای توزیع وایبل با پارامترهای مقیاس θ و شکل λ ($W(\theta,\lambda)$) باشد. تابع قابلیت اعتماد آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_T(t) = e^{-(\theta t)^{\lambda}}, \qquad t > ۰, \theta > ۰, \lambda > ۰, .$$

بنابراین، اگر طول عمر یک باطری بر حسب سال دارای توزیع وایبل با پارامترهای $\theta = ۱$ و $\lambda = ۲$ باشد، قابلیت اعتماد این مؤلفه در $t = ۱۸$ ماه برابر است با $R_T(۱/۵) = e^{-(۱/۵)^{۲}} \simeq ۰/۱$.
واضح است که به ازای $\lambda = ۱$، توزیع وایبل به توزیع نمایی تبدیل می‌شود.

۲.۱.۱ تابع نرخ خطر

تابع نرخ خطر، یکي از مهم‌ترین معیارها در مطالعات قابلیت اعتماد و مباحث طول عمر است. فرض کنید T طول عمر یک سیستم باشد که تابع چگالی آن $f_T(t)$ و تابع قابلیت آن $R_T(t)$ است. اکنون این سوأل اساسی مطرح می‌شود که اگر سیستم در زمان $t > ۰$ هنوز فعال است، چقدر احتمال دارد که بلافاصله بعد از زمان t از کار بیافتد؟ به عبارت دیگر، برای مقدار کوچک δ علاقه‌مند به محاسبه احتمال شرطی

$$P(t < T < t + \delta \mid T > t) = \frac{P(t < T < t + \delta)}{P(T > t)}, \qquad t > ۰, \delta > ۰,$$

هستیم، مشروط بر آنکه $P(T > t) > ۰$.

تعریف ۷.۱. تابع نرخ خطر متغیر تصادفی طول عمر T با $r_T(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} r_T(t) &= \lim_{\delta \to ۰} \frac{P(t<T<t+\delta)}{\delta P(T>t)} \\ &= \frac{f_T(t)}{R_T(t)}, \qquad t > ۰. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

تابع نرخ خطر، که در مباحث قابلیت اعتماد و طول عمر به «تابع نرخ شکست» نیز معروف است، در اغلب تحلیل‌های بقا، نقش محوری ایفا می‌کند. باید توجه داشت که تابع نرخ خطر احتمال از کارافتادن مؤلفه نیست (یعنی لزوماً مقداری بین صفر و یک را اختیار نمی‌کند). این کمیت در واقع نرخ از کارافتادگی مؤلفه را در زمان t نشان می‌دهد و معیاری برای اندازه‌گیری سالخوردگی مؤلفه است. اگر $r_T(t)$ تابعی صعودی از t باشد، بدین معنی است که مؤلفه با گذشت زمان دچار سالخوردگی شده و قابلیت اعتماد آن کم می‌شود. اگر $r_T(t)$ نزولی باشد آنگاه مؤلفه با گذشت زمان دچار سالخوردگی منفی می‌شود، بدین معنی که قابلیت اعتماد آن بیشتر می‌شود. اغلب پدیده‌های طول عمر دارای نرخ خطری هستند که با افزایش زمان صعود میکنند و البته متغیرهای طول عمری نیز وجود دارند که با افزایش زمان نرخ خطر آنها کاهش پیدا می‌کند.

مثال ۸.۱. فرض کنید $T \sim E(\theta)$، تابع نرخ خطر آن برابر است با:

$$\begin{aligned} r_T(t) &= \frac{\theta e^{-\theta t}}{e^{-\theta t}} \\ &= \theta. \end{aligned}$$

ملاحظه می‌گردد که، تابع نرخ خطر طول عمر مؤلفه‌ای با توزیع نمایی، یک مقدار ثابت است. این خصوصیت

یکی از مشخصه‌های منحصر به فرد توزیع نمایی است. به عبارت دیگر، اگر تابع نرخ خطر یک متغیر تصادفی پیوسته T، همواره ثابت باشد، به راحتی ثابت می‌شود که توزیع متغیر باید نمایی باشد.

مثال ۹.۱. فرض کنید T دارای توزیع $W(\theta, \lambda)$ باشد. تابع نرخ خطر آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} r_T(t) &= \frac{\lambda(\theta)^\lambda t^{\lambda-1} e^{-(\theta t)^\lambda}}{e^{-(\theta t)^\lambda}} \\ &= \lambda\theta(\theta t)^{\lambda-1}. \end{aligned}$$

صعودی و نزولی بودن این تابع به مقدار λ بستگی دارد. به آسانی معلوم می‌شود که اگر $\lambda > 1$، تابع نرخ خطر صعودی و در غیر این صورت بر حسب t نزولی هست. همچنین به ازای $\lambda = 1$ تابعی ثابت خواهد بود.

۳.۱.۱ تابع میانگین مانده عمر

یکی دیگر از معیارهای مهم در مطالعات قابلیت اعتماد و مباحث طول عمر، میانگین مانده عمر است. فرض کنید مؤلفه‌ای با طول عمر T در زمان $t = 0$ مورد استفاده قرار بگیرد و در زمان $t > 0$ این مؤلفه هنوز فعال باشد. آنگاه میانگین مانده عمرمؤلفه تحت شرط $T > t$ عبارت است از $T_t = T - t \mid T > t$. خواص متغیر تصادفی میانگین مانده عمر T_t می‌تواند برای مهندسان قابلیت اعتماد مهم باشد. اگر تابع قابلیت اعتماد T_t با $R(x \mid t)$ نشان داده شود، آنگاه

$$\begin{aligned} R(x \mid t) &= P(T_t > x) \\ &= P(T - t > x \mid T > t) \\ &= \frac{R_T(x+t)}{R_T(t)}, \qquad\qquad x,\, t > 0. \end{aligned}$$

واضح است که، $R(x \mid t)$ به عنوان یک تابع پویا از زمان، قابلیت اعتماد شرطی سیستم را در هر لحظه از زمان نشان می‌دهد و در نقطه $t = 0$، $R(x \mid t) = R_T(x)$.

تعریف ۱۰.۱. میانگین T_t را تابع میانگین مانده عمر گویند، که با $m(t)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} m(t) &= E(T_t) \\ &= E(T - t \mid T > t) \\ &= \int_t^\infty \frac{R_T(u)}{R_T(t)} du. \end{aligned}$$

در واقع $m(t)$ متوسط عمر باقیمانده T را در هر لحظه از زمان نشان می‌دهد. واضح است که $m(0) = E(T)$. همچنین، اگر مؤلفه‌ای دارای نرخ خطر صعودی باشد، آنگاه میانگین مانده عمر مؤلفه نزولی خواهد بود.

مثال ۱.۱۱. میانگین مانده عمر مؤلفه T با توزیع طول عمر $E(\theta)$ عبارت است از:

$$m(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\theta u}}{e^{-\theta t}} du$$
$$= \frac{1}{\theta}.$$

مثال ۱.۱۲. تابع میانگین مانده عمر مؤلفه T که دارای توزیع $W(\theta, \lambda)$ است، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$m(t) = \frac{1}{e^{-(\theta t)^\lambda}} \int_t^\infty e^{-(\theta u)^\lambda} du.$$

ثابت شده است، تابع میانگین مانده عمر نیز همانند تابع نرخ خطر، توزیع طول عمر را مشخص می‌کند.

۲.۱ نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگرزاده[1] دانشمند ایرانی تبار ارائه شد. مجموعه‌های فازی تعمیمی از مجموعه‌های معمولی هستند. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون، گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. به‌کوتاهی، نظریه مجموعه‌های فازی نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، همان‌گونه که در عالم واقعی چنین است، صورت‌بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. در نظریه مجموعه‌های معمولی،مجموعه‌ها به‌صورت گردآیه‌ای معین از اشیا تعریف می‌شوند. به‌عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش تعریف مشخص می‌شود. اگر یک عضو ازآن ویژگی را داشته باشد عضو مجموعه مورد نظر است و اگر فاقد آن باشد عضو مجموعه مورد نظر نیست. مثلاً اگر مجموعه $X = [0, 200]$مربوط به طول قد انسان‌ها باشد وp ویژگی قد بلند تر از ۱۸۰ سانتی متر را در نظر بگیریم ، آن‌گاه p یک ویژگی دقیق است که یک مجموعه مانندA را تعریف می‌کند که عبارت است از انسان‌هایی با قد بلند تر از ۱۸۰ سانتی متر. حال اگر بخواهیم در مورد انسان‌های بلند قد گفت و گو کنیم، با یک ویژگی نادقیق و مبهم سروکار داریم . به‌عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت افراد در گردآیه‌ای از انسان های بلند قد قطعی و مشخص نیست. آیا یک فرد با ۱۷۸ سانتی‌متر بلند قد محسوب می‌شود ؟ با ۱۸۰ سانتی‌متر چطور؟ این رو بیشتر مفاهیم و ویژگی‌هایی که در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم مانند مسافت طولانی ، نرخ تورم بالا ،ضریب هوشی پایین و... این گونه‌اند. یعنی مفاهیمی نادقیق اندو نمی‌توان مجموعه‌هایی دقیق را تصور کرد. بنابراین این‌گونه پدیده‌ها را با مفاهیم نظریه فازی مدل‌بندی می‌نماییم. نظریه مجموعه‌های فازی در واقع تعمیمی از نظریه مجموعه‌های کلاسیک است که موافق با زبان طبیعی و فهم انسان‌هاست. فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر[2] هر زیر مجموعه معمولی A از X، یک تابع ازX به $\{0, 1\}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

[1] Zadeh
[2] Indicator Function

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x ازX، عددی از بازه $[۰, ۱]$ نسبت می‌دهد، این تابع را تابع عضویت[1] مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم. اکنون $\tilde{A}$ یک مجموعه معمولی نیست بلکه آن را یک مجموعه فازی یا به‌بیان دقیق‌تر، یک زیرمجموعه فازی از X می‌نامیم. بنابراین یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می‌تواند به‌طور پیوسته از $I = [۰, ۱]$ اختیار شود. این مجموعه توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نمایش می‌دهیم مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از X، یک عدد از بازه $[۰, ۱]$ به‌عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نشان‌دهنده‌ی تعلق بیشترx به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و نزدیکی آن به صفر نشان دهنده‌ی تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_{\tilde{A}}$ را می‌توان درجه‌ی پذیرش ما در قبول x به‌عنوان عضوی از A در نظر گرفت . درحالت حدی اگر x کاملاً در $\tilde{A}$ عضو باشد $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ و اگر x در $\tilde{A}$ عضو نباشد $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$. پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آن‌ها، حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها هستند.

مثال ۱.۱۳. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. یک زیرمجموعه معمولی از X شامل اعداد کوچکتر از چهار به‌صورت $\tilde{A} = \{۱, ۲, ۳\}$ است و تابع نشانگر آن به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$I_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱, ۲, ۳ \\ ۰ & x = ۴, ۵ \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $I_{\tilde{A}}(۲) = ۱$، یعنی عدد دو عضو مجموعه $\tilde{A}$ است و $I\tilde{A}(۴) = ۰$، یعنی عدد چهار عضو مجموعه $\tilde{A}$ نیست. به‌عبارت دیگر، عدد دو ویژگی کوچکتر از چهار را دارد و عدد چهار ندارد. اکنون زیرمجموعه فازی $\tilde{B}$ از X که ویژگی «کوچک بودن» را نشان می‌دهد می‌تواند توسط تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰/۶ & x = ۲ \\ ۰/۳ & x = ۳ \\ ۰/۱ & x = ۴ \\ ۰ & x = ۵ \end{cases}$$

در این مثال برای نمونه $\mu_{\tilde{B}}(۲) = ۰/۶$ یعنی عدد دو با درجه ۰/۶ عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ است، $\mu_{\tilde{B}}(۵) = ۰$ یعنی عدد پنج اصلاً عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ نیست و $\mu_{\tilde{B}}(۱) = ۱$ یعنی عدد ۱ کاملاً عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ است. به‌عبارت دیگر، عدد دو ویژگی «کوچک بودن» (به بیان بالا) را با درجه‌ی ۰/۶ داراست و عدد پنج اصلاً دارا نیست و عدد یک کاملاً داراست.

نکته ۱.۱۴. قبل از ادامه‌ی بحث همین‌جا متذکر می‌شویم که افراد مختلف ممکن است نظرات متفاوتی درباره‌ی ویژگی‌هایی مانند «کوچک بودن» یا «نزدیک به هزار بودن» و مانند این‌ها داشته باشند و در نتیجه توابع عضویت مختلفی برای زیرمجموعه‌های فازی که بیانگر این ویژگی‌ها باشد، در نظر بگیرند . بنابراین در تعیین تابع عضویت یک زیرمجموعه فازی، جنبه‌های ذهنی و شخصی بسیار موثر هستند.

[1] Member Function

تعریف ۱.۱۵. فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_{\tilde{A}}(x) > ۰$، تکیه‌گاه[1] $\tilde{A}$ نامیده شده و با $supp(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۱۶. مقدار $M = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$، ارتفاع مجموعه $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی $\tilde{A}$ برابر یک باشد آنگاه $\tilde{A}$ نرمال نامیده می‌شود و در غیر این‌صورت $\tilde{A}$ را زیر نرمال می‌گوییم.

مثال ۱.۱۷. برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{B}$ در مثال ۱.۱۳ داریم $supp\tilde{B} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. هم‌چنین $M = ۱$ $\sup_X \mu_{\tilde{B}}(x)$ یعنی ارتفاع $\tilde{B}$ برابر ۱ است و بنابراین $\tilde{B}$ یک مجموعه‌ی فازی نرمال است .

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش به‌کاربردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است. روش متداول دیگر توصیف یک مجموعه فازی به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت زیر است

$$\tilde{A} = \Big\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x));\ x \in X\Big\}.$$

اصولاً برخی مولفین، یک مجموعه فازی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت فوق تعریف کرده‌اند. هنگامی که مجموعه مرجع X یک مجموعه متناهی (یا نامتناهی شمارا) به‌صورت $x_۱, x_۲, ..., x_n$ باشد، یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ از X به‌صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\tilde{A} \ = \ \Big\{\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_۱)}{x_۱}, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_۲)}{x_۲}, \cdots, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}\Big\}.$$

مثال ۱.۱۸. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ..., ۱۰\}$. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X را که نشان دهنده‌ی ویژگی «نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ» باشد، می‌توان توسط تابع عضویت زیر تعریف کرد

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۰/۱ & x = ۲ \\ ۰/۳ & x = ۳ \\ ۰/۵ & x = ۴ \\ ۰/۸ & x = ۵ \\ ۰/۸ & x = ۶ \\ ۰/۵ & x = ۷ \\ ۰/۳ & x = ۸ \\ ۰/۱ & x = ۹ \\ ۰ & x = ۱, ۱۰ \end{cases}$$

با استفاده از نمادی که در بالا اشاره شد، $\tilde{A}$ را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$\tilde{A} \ = \ \Big\{(۱, ۰), (۲, ۰/۱), (۳, ۰/۳), ..., (۹, ۰/۱), (۱۰, ۰)\Big\}.$$

[1] Support

مثال ۱.۱۹. فرض کنید $X = [۰, ۱۰۰]$ و $x \in X$ به‌عنوان سن تلقی شوند. مجموعه فازی $\tilde{B}$ که پیری را نشان می‌دهد می‌تواند این‌گونه تعریف شود

$$\tilde{A} = \left\{ \begin{array}{ll} ۰ & x \leq ۵۰ \\ \frac{۱}{۱+(\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}} & ۵۰ < x \leq ۱۰۰ \end{array} \right\}$$

که با نماد اشاره شده در بالا به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\tilde{A} = \int_{۵۰}^{۱۰۰} \frac{۱}{۱ + (\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}} / x.$$

در این مثال $supp\tilde{A} = (۵۰, ۱۰۰]$. هم‌چنین $\sup \mu_{\tilde{A}}(x) = ۰/۹۹$، پس $\tilde{A}$ زیر نرمال است.

تعریف ۱.۲۰. زیر مجموعه (معمولی) عناصری از X را که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α، $(\alpha > ۰)$ باشد، αـ برش (یا مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{A}$) گوییم و با $\tilde{A}_\alpha$ نشان می دهیم. یعنی

$$\tilde{A}_\alpha = \Big\{ x \in X |\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geqslant \alpha \Big\}.$$

مثال ۱.۲۱. فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ و زیر مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ از X که نشان دهنده‌ی ویژگی «حدوداً سه» است، این‌گونه تعریف شود

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{۰/۳}{۱}, \frac{۰/۷}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۰/۳}{۵} \right\}$$

در این‌صورت چند αـ برش $\tilde{A}$ عبارتند از

$$\tilde{A}_{۰/۱} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \qquad \tilde{A}_{۰/۳} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$$
$$\tilde{A}_{۰/۷} = \{۲, ۳, ۴\} \quad A_{۰/۸} = \{۳\} \quad \tilde{A}_۱ = \{۳\}.$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت

$$\tilde{A}_\alpha = \left\{ \begin{array}{ll} \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} & ۰ < \alpha \leqslant ۰/۳ \\ \{۲, ۳, ۴\} & ۰/۳ < \alpha \leqslant ۰/۷ \\ \{۳\} & ۰/۷ < \alpha \leqslant ۱ \end{array} \right.$$

قضیه ۱.۲۲. *(اتحاد تجزیه) فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی از $\mathbb{R}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(.)$ باشد. در این‌صورت*

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [۰,۱]} \alpha . I_{\tilde{A}_\alpha}(x),$$

که در آن $I_{\tilde{A}_\alpha}(.)$ تابع مشخصه می‌باشد.

تعریف ۲۳.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $X = \mathbb{R}$ را محدب [1] گوییم، اگر هر αـ برش $\tilde{A}$ (برای تمامی $0 < \alpha \leqslant 1$) محدب باشد

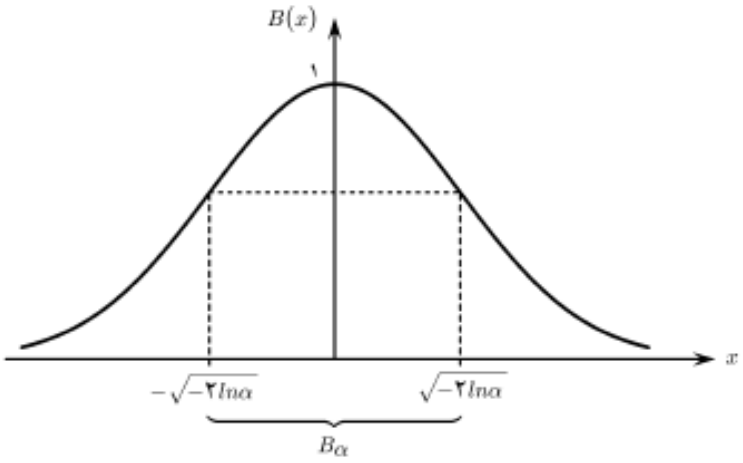
$$\mu_{\tilde{A}}\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\Big) \geqslant \min\Big\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\Big\},$$

مثال ۲۴.۱. مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید

$$\mu_{\tilde{A}(x)} = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی محدب است، زیرا برای هر $\alpha > 0$ داریم

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\alpha &= \Big\{x \in \mathbb{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R} | e^{-\frac{x^2}{2}} \geq \alpha\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{2\ln\alpha} \leq x \leq \sqrt{2\ln\alpha}\Big\}.\end{aligned}$$



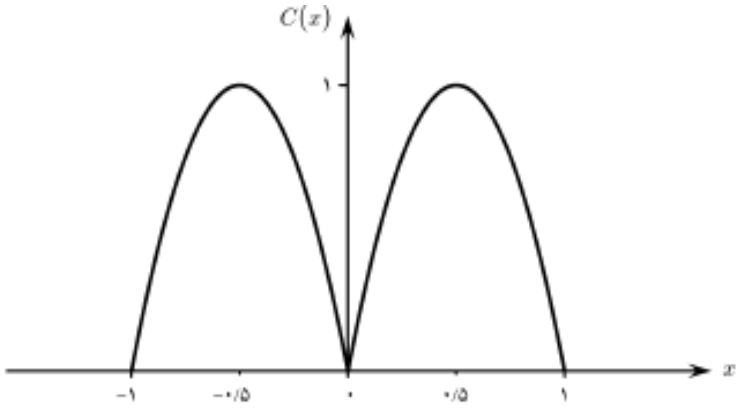
شکل ۱.۱: نمودار تابع عضویت مجموعه فازی محدب

مثال ۲۵.۱. فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{C}$، بیانگر ویژگی «قدر مطلق عدد، نزدیک به $\frac{1}{2}$»، با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ 1 - 4(x + \frac{1}{2})^2 & -1 < x \leq 0 \\ 1 - 4(x - \frac{1}{2})^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

[1] Convex

در این‌جا $\tilde{C}$ یک مجموعه فازی محدب نیست. زیرا $\alpha > ۰$ وجود دارد که $\tilde{C}_\alpha$ یک مجموعه معمولی محدب نیست (بلکه در این‌جا برای تمام $\alpha > ۰$، $\tilde{C}_\alpha$ها غیرمحدب‌اند)



شکل ۲.۱: نمودار تابع عضویت مجموعه فازی غیرمحدب

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید $f(x)$ تابعی حقیقی مقدار بر $\mathbb{R}$ باشد. در این‌صورت f را نیم پیوسته بالایی گوییم هرگاه

الف) برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ مجموعه $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ مجموعه‌ای بسته در $\mathbb{R}$ باشد.

یا به‌طور معادل

ب) $f(x)$ نیم‌پیوسته بالایی در y است هرگاه

$$\forall \varepsilon > ۰, \exists \delta > ۰ \quad , \quad |x - y| < \delta \implies f(x) - f(y) < \varepsilon.$$

تعریف ۲۷.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را یک عددی فازی (حقیقی) گوییم هرگاه $\tilde{A}$ نرمال، تک نمایی، محدب و نیم پیوسته بالایی باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی را با $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۱. (اصل توسیع) [۱]

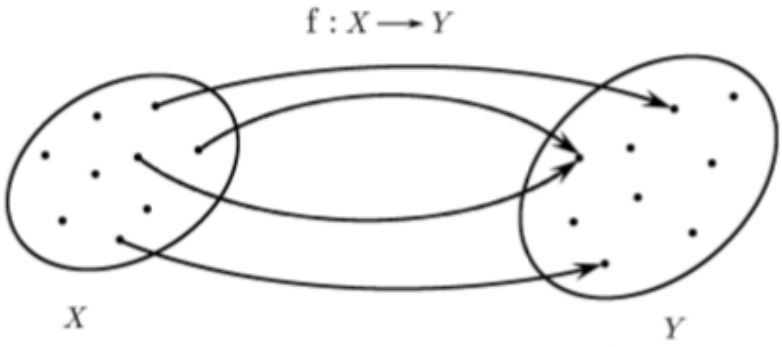
فرض کنید $X_۱, ..., X_n$، n مجموعه مرجع، و $X = X_۱ \times ... \times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها باشد. هم‌چنین $\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n$، n مجموعه فازی به‌ترتیب از $X_۱, ..., X_n$ باشد. فرض کنید f یک نگاشت از X به Y باشد، یعنی $y = f(x_۱, ..., x_n)$. در این‌صورت حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n$ به‌عنوان یک مجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= f(\tilde{A}_۱, ..., \tilde{A}_n) \\ &= \left\{ (y, \mu_{\tilde{B}}(y)) | y = f(x_۱, ..., x_n), (x_۱, ..., x_n) \in X) \right\}. \end{aligned}$$

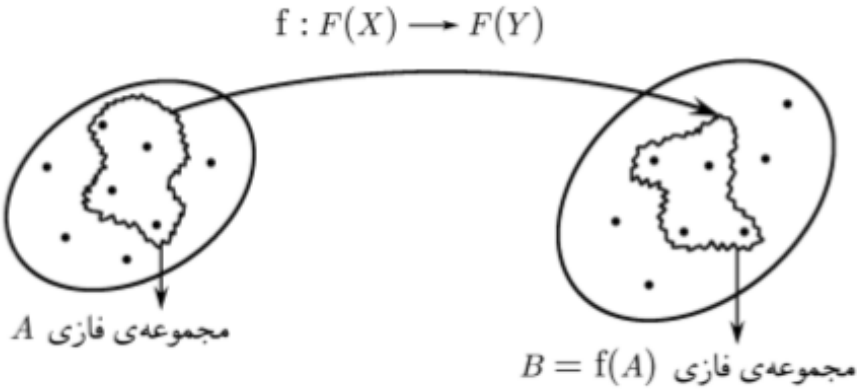
[1] Extension Principle

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x_1,\ldots,x_n)} \quad \min\left\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1),\ldots,\mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\right\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$



شکل ۳.۱: روش عمل یک تابع معمولی



شکل ۴.۱: روش عمل یک تابع بر اساس اصل توسیع

مثال ۲۹.۱. فرض کنید $X_1 = X_2 = \mathbb{Z}$ و $\tilde{A}_1$ و $\tilde{B}_1$ دو زیرمجموعه فازی از$\mathbb{Z}$ به‌ترتیب نمایشگر «تقریباً صفر» و «تقریباً یک» به‌صورت زیر باشند

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \left\{\frac{0/2}{-2}, \frac{0/5}{-1}, \frac{1}{0}, \frac{0/5}{1}, \frac{0/2}{2}\right\} \\ \tilde{A}_2 &= \left\{\frac{0/2}{-1}, \frac{0/5}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0/5}{2}, \frac{0/2}{3}\right\}. \end{aligned}$$

فرض کنید تابع $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y$ به‌صورت $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ تعریف شده باشد. دراین صورت

$$\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 = \left\{\frac{0/2}{(-2,-1)}, \frac{0/2}{(-2,0)}, \cdots, \frac{1}{(0,1)}, \frac{0/5}{(0,2)}, \cdots, \frac{0/2}{(2,3)}\right\}$$

و بنابر اصل توسیع

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}_۱, \tilde{A}_۲) = \left\{ \frac{۰/۵}{۰}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۵}{۴}, \frac{۰/۵}{۵}, \frac{۰/۲}{۸}, \frac{۰/۲}{۹}, \frac{۰/۲}{۱۰}, \frac{۰/۲}{۱۳} \right\}.$$

تعریف ۱.۳۰. فرض کنید $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\tilde{M}, \tilde{N} \in F(\mathbb{R})$ یک عملگر دوتایی [1] بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم $\star$ را برای اعداد فازی با $\odot$ نمایش دهیم، با استفاده از اصل گسترش حاصل $\tilde{M} \odot \tilde{N}$ به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(\tilde{M} \odot \tilde{N})(z) = \sup_{z=x\star y} T[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$

که در آن T، یک Tـ نرم است. بنابراین تعمیم چهار عمل اصلی برای اعداد فازی با استفاده از Tـ نرم min به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}
(\tilde{M} \oplus \tilde{N})(z) &= \sup_{z=x+y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)] \\
(\tilde{M} \ominus \tilde{N})(z) &= \sup_{z=x-y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)] \\
(\tilde{M} \otimes \tilde{N})(z) &= \sup_{z=x\times y} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)] \\
(\tilde{M} \oslash \tilde{N})(z) &= \sup_{z=x/y\ ,\ y\neq ۰} \min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]
\end{aligned}$$

قضیه ۱.۳۱. *فرض کنید $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ دو عدد فازی مثبت باشند در این‌صورت $\tilde{M} \oplus \tilde{N}$، $\tilde{M} \ominus \tilde{N}$، $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ و $\tilde{M} \oslash \tilde{N}$ نیز اعداد فازی می‌باشند.*

تعریف ۱.۳۲. فرض کنید $\odot_{int}$، یک عملگر دوتایی $\oplus_{int}$ ، $\ominus_{int}$، $\otimes_{int}$ یا $\oslash_{int}$ بین دو بازه $\tilde{M}_\alpha = [\tilde{M}^L_\alpha, \tilde{M}^U_\alpha]$ و $\tilde{N}_\alpha = [\tilde{N}^L_\alpha, \tilde{N}^U_\alpha]$ باشد، در این‌صورت $\tilde{M}_\alpha \odot_{int} \tilde{N}_\alpha$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{M}_\alpha \odot_{int} \tilde{N}_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{R} \quad | \quad z = x \circ y, \forall\, x \in \tilde{M}_\alpha, \forall\, y \in \tilde{N}_\alpha \right\}$$

که در آن $\circ$ یک عملگر دوتایی معمولی $+$،$-$،$\times$ یا$/$ می‌باشد.

قضیه ۱.۳۳. *(الف) اگر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی باشند، آن گاه*

$$(\tilde{a} \oplus \tilde{b})_\alpha = \left[\tilde{a}^L_\alpha + \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha + \tilde{b}^U_\alpha \right], \quad (\tilde{a} \ominus \tilde{b})_\alpha = \left[\tilde{a}^L_\alpha - \tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha + \tilde{b}^L_\alpha \right].$$

(ب) اگر $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دو عدد فازی باشند، آن گاه

$$(\tilde{a} \otimes \tilde{b})_\alpha = \left[\min\left\{ \tilde{a}^L_\alpha \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^L_\alpha \tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \tilde{b}^U_\alpha \right\}, \max\left\{ \tilde{a}^L_\alpha \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^L_\alpha \tilde{b}^U_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \tilde{b}^L_\alpha, \tilde{a}^U_\alpha \tilde{b}^U_\alpha \right\} \right].$$

[1] Binary Operation

اعداد فازی LR، نوعی خاص از اعداد فازی هستند که ویژگی آن‌ها در توابع عضویت آن‌هاست. اعمال جبری بر این نوع اعداد فازی بسیار ساده و دارای یک الگوی مشخص است.

تعریف ۳۴.۱. (اعداد فازی LR) اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی با تعریف زیر باشد

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & x > m \end{cases} \qquad (۳.۱)$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[۰, ۱]$ هستند و $L(۰) = R(۰) = ۱$؛ آن‌گاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نمایش می‌دهیم. عدد m را مقدار نمایی (میانه) و اعداد مثبت α و β را به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ می‌نامیم. L و R توابع مرجع (شکل) نامیده می‌شوند.

تعریف ۳۵.۱. فرض کنید $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$. در این‌صورت

(الف) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = \begin{cases} \max\{۰, ۱ - x\} = ۱ - x & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۰ \end{cases}$$

(ب) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی نرمال نامیده و با $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_N$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = e^{-x^۲}$$

(پ) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی سهموی نامیده و با $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_P$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = \begin{cases} \max\{۰, ۱ - x^۲\} = ۱ - x^۲ & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۰ \end{cases}$$

نکته ۳۶.۱. عدد فازی $\tilde{A} = (m, \alpha, \alpha)_L$ را یک عدد فازی متقارن نامیده و با نماد $\tilde{A} = (m, \alpha)_L$ نشان می‌دهیم. اگر عدد فازی متقارن $\tilde{A}$ مثلثی، نرمال و یا سهموی باشد، به‌ترتیب از نمادهای $\tilde{A} = (m, \alpha)_T$ و $\tilde{A} = (m, \alpha)_N$ و $\tilde{A} = (m, \alpha)_P$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۳۷.۱. فرض کنید برای عدد فازی متقارن $\tilde{N}$، $L(X) = R(X) = e^{-x^۲}$ و $m = ۰$ و $\alpha = \beta = ۱$. در این‌صورت

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} L(\frac{۰-x}{۱}) = e^{-x^۲} & x \leq ۰ \\ R(\frac{x-۰}{۱}) = e^{-x^۲} & ۰ < x \end{cases}$$

پس $\tilde{N}(x) = e^{-x^۲} \quad -\infty < x < \infty$

قضیه ۳۸.۱. *اگر $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{N} = (n, \delta, \gamma)_{LR}$ آن‌گاه $\tilde{M} \oplus \tilde{N}$، $\tilde{M} \ominus \tilde{N}$ اعداد فازی LR به‌صورت زیر است*

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = (m + n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR},$$

$$\tilde{M} \ominus \tilde{N} = (m-n, \alpha+\delta, \beta+\gamma)_{LR}.$$

مثال ۳۹.۱. فرض کنید $\tilde{M} = (۵,۳,۳)_T$ و $\tilde{N} = (۳,۲,۲)_T$، یعنی

$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} \frac{x-۲}{۳} & ۲ \leq x < ۵ \\ \frac{۸-x}{۳} & ۵ \leq x < ۸ \end{cases}$$

و

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} & ۱ \leq x < ۳, \\ \frac{۵-x}{۲} & ۳ \leq x < ۵. \end{cases}$$

در این‌صورت $(\tilde{M} \oplus \tilde{N})(x) = (۸,۵,۵)_T$ و $(\tilde{M} \ominus \tilde{N})(x) = (۲,۵,۵)_T$، یعنی

$$(\tilde{M} \oplus \tilde{N})(x) = \begin{cases} \frac{x-۳}{۵} & ۳ \leq x < ۸, \\ \frac{۱۳-x}{۵} & ۸ \leq x < ۱۳. \end{cases}$$

و

$$(\tilde{M} \ominus \tilde{N})(x) = \begin{cases} \frac{x+۳}{۵} & -۳ \leq x < ۲, \\ \frac{۷-x}{۵} & ۲ \leq x < ۷. \end{cases}$$

قضیه ۴۰.۱. *اگر* $\tilde{M} = (m,\alpha,\beta)_{LR}$ *و* $\tilde{N} = (n,\delta,\gamma)_{LR}$ *آن‌گاه*

$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N}) = \begin{cases} (m \times n, m \times \gamma + n \times \alpha, m \times \delta + n \times \beta)_{LR} & N > ۰ M > ۰ \\ m \times n, n \times \alpha - m \times \delta, n \times \beta - m \times \gamma)_{LR} & N < ۰ M > ۰ \\ (m, n - n \times \beta - m \times \delta, -n \times \alpha - m \times \gamma)_{LR} & N < ۰ M < ۰ \end{cases}$$

مثال ۴۱.۱. دو عدد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ در مثال (۳۹.۱) هر دو مثبت‌اند. بنابراین

$$\tilde{M} \otimes \tilde{N} \simeq (۱۵, ۱۰+۹, ۱۰+۹)_{LR} = (۱۵, ۱۹, ۱۹)_{LR}$$

یعنی

$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N}) \simeq \begin{cases} L(\frac{۱۵-x}{۱۹}) & x \leqslant ۱۵, \\ R(\frac{x-۱۵}{۱۹}) & ۱۵ < x \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{x+۴}{۱۹} & -۴ \leqslant x < ۱۵\ , \\ \\ \frac{۳۴-x}{۱۹} & ۱۵ \leqslant x < ۳۴\ . \end{array} \right\}$$

۳.۱ مفاهیم مقدماتی فازی

نظریه مجموعه‌های فازی برای نخستین بار توسط [؟] ارائه شده است. این نظریه از زمان ارائه، تاکنون گسترش یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است.
چهارچوب ریاضیات کلاسیک عدم قطعیت موجود در دنیای واقعی را حذف می‌کند چون توانایی مدل کردن آن را ندارد، یعنی هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود. اگر یک شیء دارای آن ویژگی باشد ، عضو آن مجموعه محسوب می‌شود و اگر آن ویژگی را نداشته باشد، عضو آن مجموعه نیست. در نظریه مجموعه‌های قطعی که اساس ریاضیات مدرن است، برای مثال، اگر مجموعه مرجع $\mathbb{X}$، مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفته شود و P ویژگی «اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱۰۰» باشد، آنگاه P یک ویژگی خوش‌تعریف است که یک مجموعه مثل A با آن متناظر می‌شود. زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ۱۰۰ است یا خیر؟ بنابراین عضو A است یا خیر؟ از این رو، می‌توان یک تابع نشانگر تعریف کرد، یعنی

$$I_A(X) = \begin{cases} ۱ & x \in A, \\ ۰ & x \notin A. \end{cases}$$

در حالی‌که چارچوب جدید فازی، عدم قطعیت و عدم دقت را به عنوان بخش مهمی از دنیای واقعی قبول کرده و آن را مدل می‌کند. ویژگی‌هایی مانند ویژگی «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» وجود دارند که روشن، دقیق و خوش‌تعریف نمی‌باشند. عضویت عددی مانند ۱۱۰ در مجموعه «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» بستگی به نظر شخص دارد. پروفسور زاده، برای حل این مشکل پیشنهاد می‌کند که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازه $[۰, ۱]$ به عنوان درجه نزدیکی آن عدد به ۱۰۰ نسبت داده شود. بنابراین گفته می‌شود، عدد ۱۱۰ با درجه مثلاً ۰/۶ عضو گردایه «اعداد حقیقی نزدیک به ۱۰۰» است. از این‌رو، اساس کار چیزی جز گسترش مفهوم تابع نشانگر نیست. به این ترتیب بسیاری از مفاهیم ناخوش‌تعریف و بیگانه با مجموعه‌های قطعی وارد دنیای ریاضیات می‌شوند و در یک ساختار ریاضی به تفکرات، زبان و منطق بشری نظم و ترتیب می‌دهند. این ساختار ریاضی، نظریه مجموعه‌های فازی نامیده می‌شود. لازم به ذکر است، مطالب این قسمت برگرفته از منابع «آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی» [؟]، [؟]، [؟] و [؟] هستند.

تعریف ۴۲.۱. اگر برد تابع نشانگر از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ توسعه داده شود، به تابعی که به هر $x \in \mathbb{X}$ یک مقدار از بازه $[۰, ۱]$ نسبت دهد، تابع عضویت گویند و با نماد $\tilde{A}(x)$ یا $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان داده می‌شود، یعنی $\tilde{A}(x) : \mathbb{X} \to [۰, ۱]$. همچنین $\tilde{A}$، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{X}$ است که درجه عضویت اعضای آن از بازه $[۰, ۱]$ اختیار شده و مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

هنگامی که مجموعه مرجع $\mathbb{X}$ یک مجموعه متناهی (یا نامتناهی شمارا) به صورت $x_۱$، ... ، x_n باشد، مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A} = \left\{ \frac{\tilde{A}(x_۱)}{x_۱}, ..., \frac{\tilde{A}(x_n)}{x_n} \right\}$ یا $\tilde{A} = \left\{ \left(x, \tilde{A}(x)\right); x \in \mathbb{X} \right\}$ نمایش داده و اگر مجموعه مرجع $\mathbb{X}$ پیوسته باشد، مجموعه فازی با تابع عضویت آن به صورت یک تابع مشخص می‌شود. نزدیکی مقدار تابع عضویت $\tilde{A}(x)$ به عدد یک نشان‌دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و نزدیکی آن به صفر نشان‌دهنده تعلق کمتر x به $\tilde{A}$ است. به لحاظ شهودی $\tilde{A}(x)$ را می‌توان درجه پذیرش در قبول x به عنوان عضوی از $\tilde{A}$ در نظر گرفت . درحالت حدی اگر x کاملاً در $\tilde{A}$ عضو باشد، آنگاه $\tilde{A}(x) = ۱$ و اگر x عضو $\tilde{A}$ نباشد، در این صورت $\tilde{A}(x) = ۰$. پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آنها، حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آنها بوده و منحصر به فرد هستند، در صورتی که مجموعه‌های فازی به

صورت منحصر به فرد تعریف نمی‌شوند. زیرا، افراد مختلف ممکن است نظرات متفاوتی درباره ویژگی‌هایی مانند «کوچک بودن» یا «نزدیک به هزار بودن» و نظیر اینها داشته باشند و در نتیجه توابع عضویت مختلفی برای زیرمجموعه‌های فازی که بیانگر این ویژگی‌ها باشند، در نظر بگیرند. بنابراین در تعیین تابع عضویت یک زیرمجموعه فازی، جنبه‌های ذهنی و شخصی بسیار مؤثر هستند.

مثال ۴۳.۱. فرض کنید $\mathbb{X} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$. فرض کنید A یک زیرمجموعه معمولی از $\mathbb{X}$ شامل «اعداد کوچکتر از ۵» باشد، یعنی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. تابع نشانگر آن عبارت است از:

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱, ۲, ۳, ۴, \\ ۰ & x = ۵, ۶. \end{cases}$$

به عنوان نمونه، $I_A(۲) = ۱$ یعنی $۲ \in A$ و $I_A(۵) = ۰$ یعنی $۵ \notin A$. اکنون زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{X}$ به معنای ویژگی «کوچک بودن» را می‌توان توسط تابع عضویت زیر بیان کرد:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱, \\ ۰/۸ & x = ۲, \\ ۰/۶ & x = ۳, \\ ۰/۴ & x = ۴, \\ ۰/۲ & x = ۵, \\ ۰ & x = ۶. \end{cases}$$

برای نمونه $\tilde{A}(۳) = ۰/۶$، یعنی عدد ۳ به اندازه ۰/۶ عضو مجموعه $\tilde{A}$ است.

تعریف ۴۴.۱. فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی از $\mathbb{X}$ باشد. تکیه‌گاه $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) > ۰\}.$$

همچنین، مقدار $M = \sup_x \tilde{A}(x)$ ارتفاع مجموعه $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. اگر M برابر یک باشد، آنگاه عدد فازی $\tilde{A}$، نرمال و در غیر این صورت زیرنرمال نامیده می‌شود. البته هر مجموعه فازی زیرنرمال را می‌توان با تقسیم درجه عضویت آن بر ارتفاعش نرمال کرد.

مثال ۴۵.۱. بنا بر مثال ۴۳.۱، تکیه‌گاه مجموعه فازی نرمال $\tilde{A}$ برابر است با:

$$supp(\tilde{A}) = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}.$$

تعریف ۴۶.۱. زیرمجموعه (معمولی) عناصری از $\mathbb{X}$ را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α باشد، αـبرش $\tilde{A}$ گویند و با $\tilde{A}[\alpha]$ نشان داده می‌شود، یعنی

$$\tilde{A}[\alpha] = \{x \in X \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}, \qquad ۰ < \alpha \leq ۱.$$

αـ برش $\tilde{A}$ به ازای $\alpha = ۰$، برابر است با بستار مجموعه $supp(\tilde{A})$، یعنی

$$\tilde{A}[۰] = Cl\{supp(\tilde{A})\},$$

که شامل $supp(\tilde{A})$ و نقاط حدی آن است.
به علاوه، $\tilde{A}[\alpha] = \left[\tilde{A}^L_\alpha, \tilde{A}^U_\alpha\right]$. که $\tilde{A}^L_\alpha$ و $\tilde{A}^U_\alpha$ به ترتیب کران‌های پایین و بالای $\tilde{A}[\alpha]$ هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A}^L_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}, \qquad \tilde{A}^U_\alpha = \sup\{x \in \mathbb{X} \mid \tilde{A}(x) \geq \alpha\}.$$

مثال ۴۷.۱. فرض کنید $\mathbb{X} = \{۱, ۲, ...۱۰\}$ و زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{X}$ که نشان‌دهنده ویژگی «حدوداً سه» است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \left\{\frac{۰/۳}{۱}, \frac{۰/۷}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۰/۳}{۵}, \frac{۰}{۶}\right\}.$$

بنابراین بعضی از αـ برش‌های $\tilde{A}$ به صورت زیر هستند:

$$\tilde{A}[۰/۳] = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}, \qquad \tilde{A}[۰/۷] = \{۲, ۳, ۴\}, \qquad \tilde{A}[۱] = \{۳\},$$

به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$\tilde{A}[\alpha] = \begin{cases} \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} & ۰ < \alpha \leq ۰/۳, \\ \{۲, ۳, ۴\} & ۰/۳ < \alpha \leq ۰/۷, \\ \{۳\} & ۰/۷ < \alpha \leq ۱. \end{cases}$$

به علاوه، $\tilde{A}[۰] = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$.

مثال ۴۸.۱. فرض کنید $\Theta \in [۰, ۱]$ مجموعه مقادیر ممکن برای پارامتر θ در یک توزیع دوجمله‌ای باشد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر برای فرضیه فازی «θ تقریباً $\frac{۱}{۲}$ است» را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A}(\theta) = \begin{cases} ۲\theta & ۰ \leq \theta < \frac{۱}{۲}, \\ ۲(۱ - \theta) & \frac{۱}{۲} \leq \theta \leq ۱. \end{cases}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \tilde{A}[\alpha] &= \{\theta \in \Theta \mid \tilde{A}(\theta) \geq \alpha\} \\ &= \{\theta \in \Theta \mid ۲\theta \geq \alpha \text{ یا } ۲(۱ - \theta) \geq \alpha\} \\ &= [\frac{\alpha}{۲}, ۱ - \frac{\alpha}{۲}], \qquad ۰ < \alpha \leq ۱. \end{aligned}$$

همچنین، $\tilde{A}[۰] = [۰, ۱]$.

در نظریه مجموعه‌های فازی مفهوم تحدب نقش مهمی داشته و زمینه‌های کاربردی زیادی را شامل می‌شود.

تعریف ۴۹.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب گویند، اگر هر αـ برش $\tilde{A}$ برای تمام $۰ < \alpha \leq ۱$ بازه‌ای بسته و کراندار باشد. یک تعریف معادل تحدب به صورت زیر است.
مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in \mathbb{X}$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$

$$\tilde{A}\big(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲\big) \geq \min\big\{\tilde{A}(x_۱), \tilde{A}(x_۲)\big\}.$$

مثال ۵۰.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} x & ۰ < x \leq ۱, \\ ۲ - x & ۱ < x \leq ۲, \\ ۰ & \text{سایر جاها}, \end{cases}$$

$\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب بوده و نمودار آن در شکل ۵.۱ نمایش داده شده است.

شکل ۵.۱: نمودار تابع عضویت مجموعه فازی محدب

مثال ۵۱.۱. فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر باشد:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} ۱ - ۴(\frac{۱}{۲} - x)^۲ & ۰ < x \leq ۰/۷۵, \\ x & ۰/۷۵ < x \leq ۱, \\ ۲ - x & ۱ < x \leq ۲, \\ ۰ & \text{سایر جاها}, \end{cases}$$

که یک مجموعه فازی غیرمحدب بوده و نمودار آن در شکل ۶.۱ نمایش داده شده است.

شکل ۶.۱: نمودار تابع عضویت مجموعه فازی غیرمحدب

تعریف ۵۲.۱. اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی باشد، $\alpha\tilde{A}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\big(\alpha\tilde{A}\big)(x) = \alpha\tilde{A}(x) \qquad \alpha \in [۰, ۱].$$

در قضیه زیر، اتحاد تجزیه بیان می‌شود که در نظریه مجموعه‌های فازی نقشی کلیدی دارد.

قضیه ۵۳.۱. [[؟]] فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی از $\mathbb{R}$ با تابع عضویت $\tilde{A}(.)$ باشد، آنگاه

$$\tilde{A}(x) = \sup_{\alpha \in [۰, ۱]} \alpha . I_{\tilde{A}[\alpha]}(x),$$

که در آن، $I_{\tilde{A}[\alpha]}$ تابع نشانگر αـ برش $\tilde{A}$ است.

اصل گسترش (توسیع) یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در نظریه مجموعه‌های فازی بوده، که در تعمیم عملگرهای جبری بین اعداد و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است و به صورت زیر تعریف می‌گردد.

تعریف ۱.۵۴. [[؟]] فرض کنید $\mathbb{X}_1$، ... ، $\mathbb{X}_n$، n مجموعه مرجع و $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times ... \times \mathbb{X}_n$ حاصلضرب دکارتی آنها باشد. همچنین، فرض کنید $\tilde{A}_1$، ... ، $\tilde{A}_n$، n مجموعه فازی از $\mathbb{X}_1$، ... ، $\mathbb{X}_n$ و $y = f(x_1, ..., x_n)$ یک نگاشت از $\mathbb{X}$ به $\mathbb{Y}$ باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_1$، ... ، $\tilde{A}_n$ به صورت مجموعه فازی $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n)$ از $\mathbb{Y}$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{B}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{x_1,...,x_n \\ y=f(x_1,...,x_n)}} \min\{\tilde{A}_1(x_1), ..., \tilde{A}_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

که در آن، $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f است.

مثال ۱.۵۵. فرض کنید $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2 = \mathbb{Z}$ و مجموعه‌های فازی $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ از $\mathbb{Z}$ به ترتیب بیانگر «تقریباً ۱» و «تقریباً ۳» به صورت زیر باشند:

$$\tilde{A}_1 = \left\{\frac{0.3}{-1}, \frac{0.7}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0.5}{2}\right\}, \qquad \tilde{A}_2 = \left\{\frac{0.4}{1}, \frac{0.7}{2}, \frac{1}{3}\right\}.$$

فرض کنید تابع $f : \mathbb{X}_1 \times X_2 \to \mathbb{Y}$ به صورت $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$ تعریف شده باشد. در این صورت داریم:

$$\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 = \Big\{\frac{0.3}{(-1,1)}, \frac{0.3}{(-1,2)}, \frac{0.3}{(-1,3)}, \frac{0.4}{(0,1)}, \frac{0.7}{(0,2)}, \frac{0.7}{(0,3)}, \frac{0.4}{(1,1)}, \frac{0.7}{(1,2)}, \frac{1}{(1,3)}, \frac{0.4}{(2,1)}, \frac{0.5}{(2,2)}, \frac{0.5}{(2,3)}\Big\},$$

بنابراین، با استفاده از اصل گسترش داریم:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \left\{\frac{0.4}{1}, \frac{0.7}{2}, \frac{0.7}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.5}{6}, \frac{0.5}{7}\right\}.$$

به عنوان نمونه،

$$\begin{aligned} f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)(2) &= \max\Big\{\min\{\tilde{A}_1(-1), \tilde{A}_2(1)\}, \min\{\tilde{A}_1(0), \tilde{A}_2(2)\}, \min\{\tilde{A}_1(1), \tilde{A}_2(1)\}\Big\} \\ &= \max\{0.3, 0.7, 0.4\} \end{aligned}$$

۱.۳.۱ اعداد فازی

اعداد فازی، که زیرمجموعه‌های فازی خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسائل کاربردی استفاده می‌شوند. در ادامه مفاهیم و نتایج مهمی درباره اعداد فازی و برخی از انواع اعداد فازی بیان می‌گردد.

تعریف ۵۶.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را عدد فازی گویند، هرگاه
الف) $\tilde{A}$ تک نمایی باشد، یعنی دقیقاً یک $x_\circ \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\tilde{A}(x_\circ) = ۱$.
ب) $\tilde{A}$ محدب باشد.
مجموعه تمام اعداد فازی با $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵۷.۱. [[؟]] فرض کنید $\tilde{A}$ یک عدد فازی روی $\mathbb{R}$ باشد. $\tilde{A}$ را عدد فازی LR گویند، اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} L(\dfrac{a-x}{l_a}) & x \le a, \\ R(\dfrac{x-a}{r_a}) & x > a, \end{cases}$$

که در آن، L و R توابعی غیرصعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[\circ, ۱]$ بوده و $L(\circ) = R(\circ) = ۱$، اعداد مثبت l_a و r_a به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست، عدد حقیقی a نما (میانه) هستند و عدد فازی LR با نماد $\tilde{A} = (a; l_a, r_a)_{LR}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵۸.۱. عدد فازی $\tilde{A} = (a; l_a, r_a)_{LR}$ را یک عدد فازی مثلثی می‌نامند، هرگاه

$$L(x) = R(x) = \max\{\circ, ۱ - x\} = \begin{cases} ۱ - x & \circ \le x \le ۱, \\ \circ & \text{سایر جاها}, \end{cases}$$

و با نماد $\tilde{A} = (a; l_a, r_a)_T$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵۹.۱. [[؟]] عدد فازی $\tilde{A}$ را یک عدد فازی مثبت (منفی) گویند، هرگاه برای هر $x \le \circ$ $(x \ge \circ)$، $\tilde{A}(x) = \circ$.

تعریف ۶۰.۱. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی و $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. با استفاده از اصل گسترش، حاصل $\tilde{A} \circledast \tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$\big(\tilde{A} \circledast \tilde{B}\big)(z) = \sup_{z=x*y} \min\big\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)\big\}. \qquad (۴.۱)$$

بر اساس رابطه (۴.۱)، سه عمل اصلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\big(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\big)(z) = \sup_{z=x+y} \min\big\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)\big\},$$
$$\big(\tilde{A} \ominus \tilde{B}\big)(z) = \sup_{z=x-y} \min\big\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)\big\},$$
$$\big(\tilde{A} \otimes \tilde{B}\big)(z) = \sup_{z=x\times y} \min\big\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(y)\big\},$$

که در آن، $\oplus$، $\ominus$ و $\otimes$ به ترتیب نماد جمع، تفریق و ضرب فازی هستند.

مثال ۶۱.۱. دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ «تقریباً ۵» و $\tilde{B}$ «تقریباً ۷» را با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید:

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۳}{۲} & ۳\le x<۵,\\ \dfrac{۷-x}{۲} & ۵\le x<۷,\end{cases}\qquad \tilde{B}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۵}{۲} & ۵\le x<۷,\\ \dfrac{۹-x}{۲} & ۷\le x<۹.\end{cases}$$

توابع عضویت جمع و تفاضل دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ برابر هستند با:

$$\big(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\big)(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۸}{۴} & ۸\le x<۱۲,\\ \dfrac{۱۶-x}{۴} & ۱۲\le x<۱۶,\end{cases}\qquad \big(\tilde{A}\ominus\tilde{B}\big)(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۶}{۴} & -۶\le x<۲,\\ \dfrac{۲-x}{۴} & -۲\le x<۲.\end{cases}$$

برخی اعمال جبری برای اعداد فازی LR بسیار ساده و دارای الگوهای مشخصی است و برای برخی دیگر از اعمال جبری نیز الگوهای تقریبی وجود دارد. در ادامه برخی روابط مهم در حساب اعداد فازی LR بیان می‌شوند.

قضیه ۶۲.۱. [[؟]] اگر $\tilde{A}=(a;l_a,r_a)_{LR}$ و $\tilde{B}=(b;l_b,r_b)_{LR}$، آنگاه $\tilde{A}\oplus\tilde{B}$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است:

$$\big(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\big)=\big(a+b;l_a+l_b,r_a+r_b\big)_{LR}.$$

قضیه ۶۳.۱. [[؟]] اگر $\tilde{A}=(a;l_a,r_a)_{LR}$ و $\tilde{B}=(b;r_b,l_b)_{RL}$، آنگاه $\tilde{A}\ominus\tilde{B}$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است:

$$\big(\tilde{A}\ominus\tilde{B}\big)=\big(a-b;l_a+l_b,r_a+r_b\big)_{LR}.$$

اصولاً حاصل ضرب دو عدد فازی LR، یک عدد فازی LR نخواهد بود. در قضیه زیر، روابطی تقریبی برای ضرب بیان گردیده است.

قضیه ۶۴.۱. [[؟]]

الف) اگر $\tilde{A}=(a;l_a,r_a)_{LR}$ و $\tilde{B}=(b;l_b,r_b)_{LR}$ دو عدد فازی مثبت باشند، آنگاه

$$\big(\tilde{A}\otimes\tilde{B}\big)\simeq\big(ab;al_b+bl_a,ar_b+br_a\big)_{LR}.$$

ب) اگر $\tilde{A}=(a;l_a,r_a)_{RL}$ یک عدد فازی منفی و $\tilde{B}=(b;l_b,r_b)_{LR}$ یک عدد فازی مثبت باشند، آنگاه

$$\big(\tilde{A}\otimes\tilde{B}\big)\simeq\big(ab;bl_a-ar_b,br_a-al_b\big)_{RL}.$$

ج) اگر $\tilde{A}=(a;l_a,r_a)_{LR}$ و $\tilde{B}=(b;l_b,r_b)_{LR}$ دو عدد فازی منفی باشند، آنگاه

$$\big(\tilde{A}\otimes\tilde{B}\big)\simeq\big(ab;-br_a-ar_b,-bl_a-al_b\big)_{RL}.$$

نماد «$\simeq$» به معنی تقریباً مساوی است.