توجه:

زمان تحویل این سری از تمرینات روز چهارشنبه مورخ ۱۴۰۱/۱۲/۲۴ می باشد. تایپ پاسخ تمرینات با استفاده از لاتک اجباری است. درغیراینصورت نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

قبل از ارائه سوالات توضیح مختصری در مورد سوال زیر خواهیم داد:
منحنی تغییرات خطا را به ازای چند مقدار مختلف h بروی یک شکل در مقایس لگاریتمی رسم کنید. توجه داشته باشید شیب خط حاصل باید مرتبه همگرایی روش تفاضلی را بیان کنید.
فرض کنید یک برنامه متلب در اختیار دارید که با تغییرات طول گام جواب عددی یک معادله را بدست خواهد آورد. فرض کنید برای طول گام های متفاوت خطای متناظر را بردست آورده اید مانند بردار زیر

$$h = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{40} & \frac{1}{80} & \frac{1}{160} \end{array} \right],$$

$$Error = [8.4125 \times 10^{-3}, 3.4712 \times 10^{-4}, 2.1102 \times 10^{-5}, 4.7413 \times 10^{-7}, 1.0147 \times 10^{-8}];$$

آنگاه در متلب از دستور زیر استفاده کنید

```
loglog(h, Error,' -rs',...
'LineWidth', 2,...
'MarkerSize', 10,...
'MarkerEdgeColor',' b',...
'MarkerFaceColor', [0.7, 0.7, 0.7])
```

در نهایت شکل زیر را خواهید دید

۱. در نرم‌افزار متلب برای تولید ماتریس سه قطری چه دستوراتی وجود دارد؟

۲. دستورات زیر را در متلب مقایسه کنید

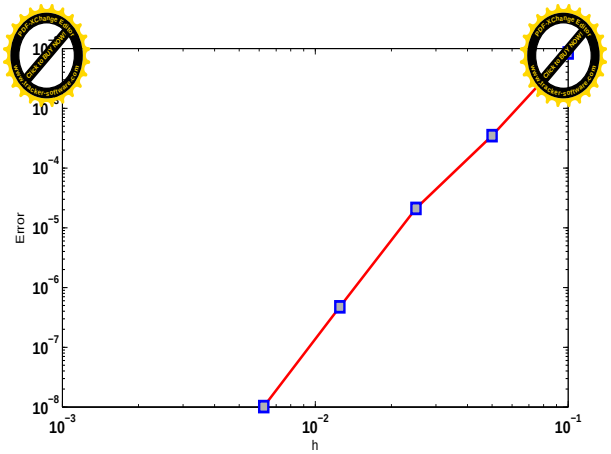
loglog, semilogx,semilogy

۳. در نرم‌افزار متلب دستورات زیر چه کاری انجام می‌دهند؟

interp1, interp2, interp3

۴. برای محاسبه زمان اجرای یک برنامه در نرم‌افزار متلب چه دستوراتی وجود دارد؟

۵. (آ) مفهوم خوش وضعی یک معادله دیفرانسیل جزئی را به طور کامل شرح دهید.



(ب) یک معادله دیفرانسیل جزئی مثال بزنید که خوش وضع باشد.

(ج) یک معادله دیفرانسیل جزئی مثال بزنید که بد وضع باشد.

۶. سازگاری روش کرانک-نیکلسون برای معادله گرما را بررسی کنید.

۷. پایداری روش $BTCS$ برای معادله گرما را با استفاده از آنالیز فوریه بررسی کنید.

۸. پایداری روش تفاضلی کرانک-نیکلسون برای گسسته سازی معادله گرما را بررسی کنید.

۹. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (\pi^2 - 1)\exp(-t)\cos(\pi x), & 0 < x < 1, \ \ 0 < t < 1, \\ u(x,0) = \cos(\pi x), & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \exp(-t), \quad u(1,t) = -\exp(-t), & 0 < t < 1, \end{cases}$$

جواب واقعی معادله بالا به صورت

$$u(x,t) = \exp(-t)\cos(\pi x).$$

می باشد.

(آ) این معادله را با روشهای تفاضلات متناهی FTCS، BTCS و کرانک-نیکلسون حل کنید.

(ب) نمودار جواب واقعی و تقریبی را در یک نمودار به ازای پارامترهای گسسته سازی متفاوت رسم کنید.

(ج) خطا در نرم بینهایت، خطای RMS و خطای در نرم ۲ را در جداول مناسب گزارش کنید.

(د) منحنی تغییرات خطا را به ازای چند مقدار مختلف h برای چند مقدار s در حوزه پایداری روش بروی یک شکل در مقایس لگاریتمی رسم کنید. توجه داشته باشید شیب خط حاصل باید مرتبه همگرایی روش تفاضلی را بیان کنید.

(ه) جواب های معادله را در زمان نهایی مختلف گزارش کنید.

(و) زمان محاسبه (CPU time) را نیز گزارش کنید.

۱۰. معادله گرمای غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(u(x,t))\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right), \qquad x \in (0,1), \qquad t \in (0,T), \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

با فرض

$$\exists\ a_*, a^* \quad s.t. \quad 0 < a_* \le a(u(x,t)) \le a^*.$$

به سوالات زیر پاسخ دهید

(آ) طرح تفاضلات متناهی زیر را استخراج کنید

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^n \left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) - a_{j-\frac{1}{2}}^n \left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)}{\Delta x^2},$$

بطوریکه

$$a_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}\left(a\left(u_{j+1}^n\right) + a\left(u_j^n\right)\right).$$

(ب) با استفاده از روش ون-نیومان نشان دهد طرح تفاضلی قسمت قبل با شرط $\Delta t \le \dfrac{(\Delta x)^2}{2a^*}$ پایدار است.

(ج) با فرض

$$a(u) = \frac{1+2u^2}{1+u^2}, \qquad f(x) = \sin(2\pi x), \qquad \Delta x = 0.02, \qquad T = 0.1.$$

و استفاده از طرح تفاضلی بیان شده این مساله را به صورت عددی حل کنید.

۱۱. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$u_t - u_{xx} = au(1-u), \qquad -12 < x < 12.$$

جواب واقعی معادله بالا به صورت زیر می‌باشد

$$u(x,t) = \frac{1 + 2C\exp\left(-\frac{5}{6}at + \frac{1}{6}\sqrt{-6a}x\right)}{\left(1 + C\exp\left(-\frac{5}{6}at + \frac{1}{6}\sqrt{-6a}x\right)\right)^2},$$

که C یک عدد دلخواه و $a = -1$ می باشند.

(آ) این معادله را با روش تفاضلی FTCS حل کنید.

(ب) جواب های معادله را در زمان نهایی مختلف گزارش کنید.

(ج) نتایج داخل حوزه پایداری و خارج حوزه پایداری را بدست آورید و با هم مقایسه کنید.

(د) جواب های عددی را به ازای مقادیر $s = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ بدست آورده و از نظر مرتبه همگرایی با یکدیگر مقایسه کنید.

(ه) نمودار جواب واقعی و تقریبی را در یک نمودار به ازای پارامترهای گسسته سازی متفاوت رسم کنید.

(و) خطا در نرم بینهایت، خطای RMS و خطای در نرم ۲ را در جداول مناسب گزارش کنید.

(ز) منحنی تغییرات خطا را به ازای چند مقدار مختلف h برای چند مقدار s در حوزه پایداری روش بروی یک شکل در مقایس لگاریتمی رسم کنید. توجه داشته باشید شیب خط حاصل باید مرتبه همگرایی روش تفاضلی را بیان کنید.

(ح) زمان محاسبه را نیز گزارش کنید.

۱۲. معادله گرمای زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, & \Omega \times (0,T], \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}} + \gamma u(x,t) = 0, & \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

بطوریکه $\mathbf{n}$ بردار نرمال یکه خروجی و $\Omega = [0,1]$ است. توجه کنید که شرط مرزی این مسئله از نوع شرط مرزی

رابینی [1] است. لذا برای این مثال داریم

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}} + \gamma u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \gamma u(x,t) = 0, \qquad on \ \{1\} \times (0,T],$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathbf{n}} + \gamma u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial (-x)} + \gamma u(x,t) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \gamma u(x,t) = 0, \qquad on \ \{0\} \times (0,T],$$

در نهایت شرایط مرزی به صورت زیر خواهد بود

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} + \gamma u(1,t) = 0,$$

$$-\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \gamma u(0,t) = 0.$$

انرژی جواب برای این مسئله به صورت زیر تعریف می شود

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (u(x,t))^2 dx,$$

نشان دهید که برای جواب مسئله گرمای بالا نامساوی زیر برقرار است

$$E(t) \le E(0), \qquad t > 0.$$

۱۳. دستگاه معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u + v + e^t \sin(x) - e^{-t}\cos(x), & 0 < x < \pi, \quad 0 < t \le T, \\ v_t - v_{xx} = -u + 2v + e^t \sin(x) - 2e^{-t}\cos(x), & 0 < x < \pi, \quad 0 < t \le T, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & 0 < t \le T, \\ v(0,t) = e^{-t}, \quad v(\pi,t) = -e^{-t}, & 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \sin(x), \quad v(x,0) = \cos(x). \end{cases}$$

جواب‌های واقعی به صورت زیر است

$$u(x,t) = e^t \sin(x),$$

$$v(x,t) = e^{-t}\cos(x),$$

[1] Robin boundary condition

(آ) این معادله را با روشهای تفاضلی دیوفرت-فرانکل و سالیو نوع دوم حل کنید.

(ب) نمودار جواب واقعی و تقریبی را در یک نمودار به ازای پارامترهای گسسته سازی متفاوت رسم کنید.

(ج) خطا در نرم بینهایت، خطای RMS و خطای در نرم ۲ را در جداول مناسب گزارش کنید.

(د) منحنی تغییرات خطا را به ازای چند مقدار مختلف h برای چند مقدار s در حوزه پایداری روش بروی یک شکل در مقایس لگاریتمی رسم کنید. توجه داشته باشید شیب خط حاصل باید مرتبه همگرایی روش تفاضلی را بیان کنید.

(ه) زمان محاسبه را نیز گزارش کنید.

(و) مرتبه همگرایی عددی نسبت به متغیرهای زمان و مکان را به طور مقتضی گزارش کنید.