



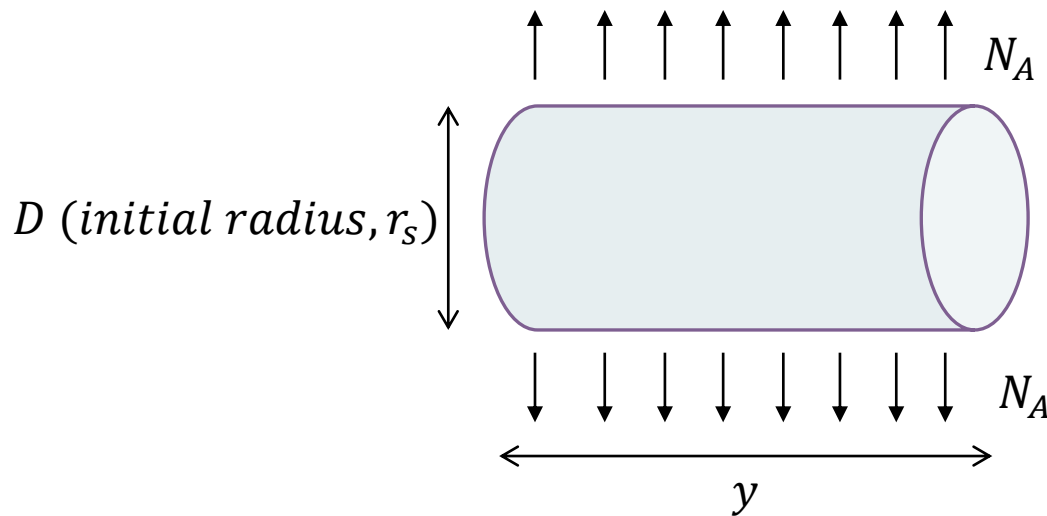
حل تمرین درس انتقال جرم

استاد درس: دکتر علیرضا همتی

TA email address: F_aminian@chemeng.iust.ac.ir

Homework 10

برای یک استوانه که در راستای شعاع در حال انتقال جرم با محیط است، رابطه‌ای برای فلاکس مولی بدست بیاورید. همچنین رابطه‌ای برای زمان بیابید و زمانی که شعاع به نصف شعاع اولیه می‌رسد را بدست آورید.



حل:

$$N_A = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr} + (N_A + N_B)x_A \xrightarrow{N_B=0} N_A = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr} + (N_A)x_A$$

$$\rightarrow N_A(1-x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr} \rightarrow \frac{G_A}{A}(1-x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr} \xrightarrow{A=2\pi rL}$$

$$G_A = -CD_{AB}(2\pi rL) \frac{\frac{dx_A}{dr}}{(1-x_A)} \rightarrow G_A = -2\pi LCD_{AB} \frac{\frac{dx_A}{dr}}{r}$$

$$\rightarrow G_A = -2\pi LCD_{AB} \frac{\int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \frac{dx_A}{1-x_A}}{\int_{r_0}^r \frac{dr}{r}} \rightarrow G_A = -2\pi LCD_{AB} \frac{-\ln(1-x_A) \Big|_{x_{A1}}^{x_{A2}}}{\ln r \Big|_{r_0}}$$

$$\rightarrow G_A = -2\pi LCD_{AB} \frac{\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)}{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}$$

رابطه شدت مولی تصعید استوانه

mass balance: input-output $\pm$ consumption/generation=accumulation

$$\rightarrow -\dot{m}_{out} = \frac{dm}{dt} \rightarrow -N_A \cdot A \cdot M_w = \rho \frac{dV}{dt} \rightarrow -\frac{G_A}{A} \cdot A \cdot M_w = \rho \frac{2\pi r L dr}{dt} \rightarrow -G_A \cdot M = \rho \frac{2\pi L r dr}{dt}$$

$$\rightarrow -2\pi L M_w C D_{AB} \frac{\ln(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}})}{\ln(\frac{r}{r_0})} = \rho 2\pi L \frac{r dr}{dt} \rightarrow -M_w C D_{AB} \ln(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}) dt = \rho \ln(\frac{r}{r_0}) r dr$$

$$\rightarrow -M_w C D_{AB} \ln(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}) \int_0^t dt = \rho \int_{r_s}^{r_s/2} r \ln(\frac{r}{r_0}) dr \rightarrow t = \frac{\rho}{M_w C D_{AB}} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}})} \int_{r_s}^{r_s/2} r \ln(\frac{r}{r_0}) dr$$

$$\rightarrow t = \frac{\rho}{M_w C D_{AB}} \cdot \frac{1}{\ln(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}})} \cdot \int_{r_s}^{r_s/2} r \ln(\frac{r}{r_0}) dr$$

مدت زمانی که طول میکشد تا شعاع به نصف شعاع اولیه برسد.

Homework 10'

نفتالین به شکل یک استوانه بلند به طول L و شعاع R در هوای ساکن و در دمای نسبتاً پایین تصعید می شود. شدت انتقال جرم ($\dot{m}$) را بدست آورید.

$$\sum N_i = N_A \rightarrow N_A = -D_{AB} \frac{dC}{dr} + x_A N_A \quad \text{انتقال جرم در جزء ساکن}$$

$$x_A = \frac{C_A^s}{C} = \frac{P_A^s}{P_t} \simeq 0 \quad \text{تصعید نفتالین در دمای پایین}$$

$$\rightarrow N_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} \rightarrow \dot{n}_A = N_A A = -D_{AB} (2\pi r L) \frac{dC_A}{dr}$$

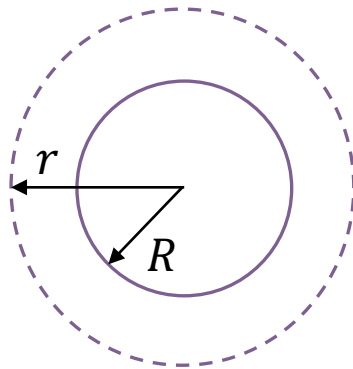
$$\dot{n}_A \frac{dr}{r} = -D_{AB} 2\pi L dC_A \xrightarrow{\int} \int_R^r \dot{n}_A \frac{dr}{r} = \int_{C_A^*}^{C_A} -D_{AB} 2\pi L dC_A$$

$$\rightarrow \dot{n}_A \ln \frac{r}{R} = D_{AB} 2\pi L (C_A^* - C_A) \rightarrow \dot{n}_A = \frac{D_{AB} 2\pi L (C_A^* - C_A)}{\ln \frac{r}{R}}$$

$$\rightarrow \dot{m}_A = \dot{n}_A \times M_A \rightarrow \dot{m}_A = \frac{D_{AB} 2\pi L M_A (C_A^* - C_A)}{\ln \frac{r}{R}}$$

Homework 11

انتقال جرم در یک قطعه کروی به شعاع R به نقطه ای به فاصله r خارج از کره صورت میگیرد ($r > R$).
اگر دبی انتقال جرم از رابطه $\dot{m} = N_A \times S \times M_A$ قابل دستیابی باشد، نشان دهید در چنین
سیتمی $S = 4\pi Rr$ خواهد بود.



حل:

$$N_A = -D_{AB}C \frac{dx_A}{dr} + x_A N_A \rightarrow N_A = -D_{AB}C \frac{dx}{(1-x_A)dr}$$

mass balance: $N_A \times S \times M_A \Big|_r - N_A \times S \times M_A \Big|_{r+dr} = 0$

$$\dot{m}_A = N_A S M_A = \frac{-D_{AB}C}{1-x_A} \frac{dx}{dr} \times 4\pi r^2 \times M_A$$

$$\rightarrow \int_r^R \dot{m}_A \frac{dr}{r^2} = \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} D_{AB}C 4\pi M_A \frac{dx}{x_A - 1} \rightarrow \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) \dot{m}_A = D_{AB}C 4\pi M_A \ln \frac{x_{A2} - 1}{x_{A1} - 1}$$

$$\rightarrow \dot{m}_A = D_{AB}C 4\pi M_A \left(\ln \frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right) \left(\frac{rR}{r-R}\right) \quad (I)$$

$$N_A = \frac{N_A}{N_A + N_B} \frac{D_{AB} C}{\delta_{r-R}} \ln \left(\frac{\overbrace{\sum N_i}^{N_A} - x_{A2}}{\sum N_i - x_{A1}} \right) \rightarrow \dot{m}_A = S \times \frac{D_{AB} C M_A}{r - R} \ln \left(\frac{1 - x_{A2}}{1 - x_{A1}} \right) \quad (\text{II})$$

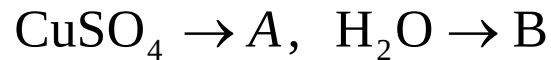
(I)=(II) $\rightarrow$

$$\longrightarrow S \times \frac{D_{AB} C M_A}{r - R} \ln \left(\frac{1 - x_{A2}}{1 - x_{A1}} \right) = D_{AB} C 4\pi M_A \ln \left(\frac{1 - x_{A2}}{1 - x_{A1}} \right) \frac{Rr}{r - R}$$

$$\longrightarrow S = 4\pi Rr$$

Homework 12

در یک فرایند انتقال جرم بین فاز جامد و مایع، یون‌های سولفات مس از بلور $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ به داخل آب خالص حل می‌شوند. فرض کنید که در فاز مایع واکنشی رخ نمی‌دهد و انتقال جرم تنها در اثر نفوذ صورت می‌گیرد. مقدار کل مواد حل‌شده در آب نسبت به حجم محلول ناچیز است، بنابراین می‌توان فرض کرد که غلظت کل محلول تقریباً ثابت باقی می‌ماند. با در نظر گرفتن اینکه غلظت سولفات مس در سطح بلور برابر $C_{A,s}$ و در فاز مایع دور از سطح بلور برابر $C_{A,b}$ است، رابطه‌ی ضریب انتقال جرم کل و k_L را بدست آورید.



$$N_B = 5N_A \rightarrow \sum N_i = 6N_A \rightarrow \frac{N_A}{\sum N_i} = \frac{1}{6}$$

حل:

$$\rightarrow N_A = \frac{N_A}{\sum N_i} F \ln \frac{\frac{N_A}{\sum N_i} - \frac{C_{A,b}}{C}}{\frac{N_A}{\sum N_i} - \frac{C_{A,s}}{C}} = \frac{1}{6} F \ln \frac{\frac{1}{6} - \frac{C_{A,b}}{C}}{\frac{1}{6} - \frac{C_{A,s}}{C}}, \quad \text{and} \quad N_A = k_L (C_{A,s} - C_{A,b})$$

$$\Rightarrow k_L (C_{A,b} - C_{A,s}) = \frac{1}{6} F \ln \frac{\frac{1}{6} - \frac{C_{A,b}}{C}}{\frac{1}{6} - \frac{C_{A,s}}{C}} \rightarrow F = \frac{6k_L (C_{A,b} - C_{A,s})}{\ln \frac{\frac{1}{6} - \frac{C_{A,b}}{C}}{\frac{1}{6} - \frac{C_{A,s}}{C}}}$$

$$\xrightarrow{\text{if } C_{A,b}=0} F = \frac{6k_L C_{A,s}}{\ln \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} - \frac{C_{A,s}}{C}}} = \frac{6k_L C_{A,s}}{\ln \frac{C}{C - 6C_{A,s}}}$$

مثال)

یک قطعه کریستال سولفات مس در تانک بزرگی از آب خالص قرار دارد و دما ۲۰ درجه سانتی گراد است. ضخامت لایه انتقال جرم در اطراف کریستال ۰.۰۵ میلی متر است. مطلوبست:

الف) مقدار انتقال جرم سولفات مس در لایه انتقال جرم در واحد زمان و به ازای واحد سطح کریستال

ب) مقدار انتقال جرم آب در واحد زمان و به ازای واحد سطح کریستال

ج) مقدار کل انتقال جرم کریستال به ازای واحد زمان و واحد سطح کریستال

د) اگر کریستال مکعب مستطیل شکل بوده و انتقال جرم فقط از یک سطح صورت گیرد (سطح ثابت ۲ در ۳ سانتی متر مربع)، چه مدت طول میکشد تا ضخامت کریستال نصف شود (ضخامت اولیه ۵ میلی متر).

دانسیته کریستال را ۱۳۵۰ کیلوگرم بر متر مکعب فرض کنید. حلالیت سولفات مس در آب در دمای ۲۰ درجه سانتی گراد بر حسب جزء مولی سولفات مس = ۰.۰۲۲۹، دانسیته محلول اشباع ۱۱۹۳ کیلوگرم بر متر مکعب

$$D_{CuSO_4-H_2O} = 7.29 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$$

A: $CuSO_4$, B: H_2O

$$N_A = \frac{1}{5} N_B \Rightarrow \frac{N_A}{N_A + N_B} = \frac{1}{6}$$

$$N_A = \frac{N_A}{N_A + N_B} \cdot \frac{D_{AB}}{z} \left(\frac{\rho}{M_W} \right)_{avg} \ln \left(\frac{\frac{N_A}{N_A + N_B} - x_{A_2}}{\frac{N_A}{N_A + N_B} - x_{A_1}} \right) = \frac{1}{6} \frac{D_{AB}}{z} \left(\frac{\rho}{M_W} \right)_{avg} \ln \left(\frac{\frac{1}{6} - x_{A_2}}{\frac{1}{6} - x_{A_1}} \right)$$

$$x_{A_1} = x_A^* = \text{حلالیت سولفات در آب} = 0.0229$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1193 \text{ kg/m}^3, M_1 = 0.0229 M_A + (1 - 0.0229) M_B \\ &= 0.0229(159.66) + 0.9771(18.02) = 21.26 \end{aligned}$$

$$\rho_2 = \rho_{\text{آب خالص}} = 990.9 \text{ kg/m}^3, M_2 = M_{\text{آب خالص}} = 18.02$$

$$D_{AB} = 7.29 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\left(\frac{\rho}{M} \right)_{avg} = \frac{\frac{\rho_1}{M_1} + \frac{\rho_2}{M_2}}{2} = \frac{56.11 + 54.99}{2} = 55.55$$

حل:

$$N_A = \frac{1}{6} \times \frac{7.29 \times 10^{-10}}{5 \times 10^{-5}} (55.55) \ln \left(\frac{\frac{1}{6} - 0}{\frac{1}{6} - 0.0229} \right) = 1.995 \times 10^{-5} \text{ kmol/m}^2 \cdot \text{s} \quad (\text{الف})$$

$$N_B = 5N_A = 5(1.995 \times 10^{-5}) = 9.975 \times 10^{-5} \text{ kmol/m}^2 \cdot \text{s} \quad (\text{ب})$$

$$\dot{m}_{\text{كل}} = N_A M_A + N_B M_B = 1.995 \times 10^{-5} \times 159.66 + 9.975 \times 10^{-5} \times 18.02 \quad (\text{ج})$$

$$\Rightarrow \dot{m}_{\text{كل}} = 4.483 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$$

$$\text{in} - \text{out} = \text{acc} \Rightarrow 0 - \dot{m}_{\text{كل}} \times A = \frac{dm}{dt} \Rightarrow -\dot{m}_{\text{كل}} \times A = \rho A \frac{dh}{dt} \quad (\text{د})$$

$$\Rightarrow -4.483 \times 10^{-3} = 1350 \frac{\int_h^{\frac{h}{2}} dh}{\int_0^t dt} \Rightarrow t = \frac{1350}{-4.483 \times 10^{-3}} \times \left(-\frac{h}{2} \right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{1350}{4.483 \times 10^{-3}} \times \frac{5 \times 10^{-3}}{2} = 752.844 \text{ s}$$

مثال)

دو مخزن از طریق یک کانال استوانه ای شکل به قطر ۱۰ سانتی متر و طول ۵۰ سانتی متر به یک دیگر متصل شده اند. مخازن حاوی هیدروژن و متان می باشند و کسر مولی هیدروژن در مخزن ۱، ۰.۲۵ و در مخزن ۲، ۰.۱ است. دما ۲۰ درجه سانتی گراد و فشار اتمسفری است و $D_{H_2-CH_4} = 4.18 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ مطلوبست:

الف) مقدار انتقال جرم هیدروژن در کانال در واحد زمان و به ازای واحد سطح.

ب) اگر کانال به فرم استوانه ای نباشد و به فرم مخروط ناقص باشد به نحوی که قطر آن در تماس با مخزن ۱، ۴۰ سانتی متر و در مخزن ۲، ۲۰ سانتی متر باشد، در این حالت مقدار انتقال جرم هیدروژن در کانال در واحد زمان و به ازای واحد سطح را محاسبه کنید.

حل: $P = 101325 \text{ Pa}, T = 20 + 273.15 = 293.15 \text{ K}, D_{AB} = 4.18 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

$$N_A = \frac{P_t D_{AB}}{RT_Z} (y_{A_1} - y_{A_2}) \quad \text{نفوذ متقابل}$$

(الف)

$$N_A = \frac{101325 \times 4.18 \times 10^{-5}}{8314 \times 293.15 \times 50 \times 10^{-2}} (0.25 - 0.1) = 5.213 \times 10^{-7} \text{ kmol}/\text{m}^2.\text{s}$$

(ب)

در این قسمت سطحی که انتقال جرم در آن رخ می دهد ثابت نبوده و باید رابطه جدیدی برای فلاکس انتقال جرم بدست بیاوریم:

$$N_A = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dz} + \overbrace{(N_A + N_B)}^0 x_A \Rightarrow \frac{G_A}{A} = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dz}$$

$$\Rightarrow G_A = -CD_{AB} (\pi r^2) \frac{dy_A}{dz}$$

$$\begin{cases} z_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0.2 \\ z_2 = 0.5 \Rightarrow r_2 = 0.1 \end{cases} \Rightarrow r - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1} (z - z_1)$$

$$\Rightarrow r - 0.2 = \frac{0.1 - 0.2}{0.5 - 0} (z - 0) \Rightarrow r - 0.2 = -0.2z \Rightarrow r = -0.2z + 0.2$$

$$G_A = -CD_{AB}\pi(-0.2z + 0.2)^2 \frac{\partial y_A}{\partial z} \Rightarrow G_A = -CD_{AB}\pi \frac{\int_{0.25}^{0.1} dy_A}{\int_0^{0.5} \frac{dz}{(-0.2z + 0.2)^2}}$$

$$-0.2z + 0.2 = u \Rightarrow -0.2dz = du \Rightarrow dz = -5du$$

$$\int \frac{dz}{(-0.2z + 0.2)^2} = \int \frac{-5du}{u^2} = \frac{5}{u}$$

$$\Rightarrow \int_0^{0.5} \frac{dz}{(-0.2z + 0.2)^2} = \left. \frac{5}{-0.2z + 0.2} \right|_0^{0.5} = \frac{5}{-0.2(0.5) + 0.2} - \frac{5}{-0.2(0) + 0.2} = 25$$

$$G_A = -CD_{AB}\pi \frac{\int_{0.25}^{0.1} dy_A}{25} = \frac{P_t D_{AB} \pi (0.25 - 0.1)}{RT} = \frac{101325 \times 4.18 \times 10^{-5} \times 3.14 \times 0.15}{8314 \times 293.15 \times 25}$$

$$= 3.274 \times 10^{-8} \text{ kmol/s}$$

چون سطح متغیر است، فلاکس مولی انتقال جرم ثابت نبوده و برای محاسبه دبی، دبی مولی بدست آمده را بر یک سطح مورد نظر (به عنوان مثال میانگین مساحت مقاطع دو سر کانال) تقسیم میکنیم تا فلاکس به طور تقریبی و میانگین بدست آید.

مثال)

یک کره از جنس نفتالین با قطر اولیه ۵ سانتی متر در دمای ۴۰ درجه سانتی گراد و فشار اتمسفر در معرض هوای ساکن و خالص قرار دارد. ضریب نفوذ نفتالین در هوا در شرایط استاندارد $D_{AB} = 5.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ است و فشار بخار آن در شرایط مسئله ۴۴.۴ پاسکال می باشد. مطلوبست:

- الف) محاسبه دبی و فلاکس مولی تصعید درست در لحظه ای که قطر کره ۵ سانتی متر است.
- ب) محاسبه مدت زمان لازم برای اینکه قطر کره به نصف میزان اولیه کاهش یابد.

حل:

$$N_A = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr} + (N_A + N_B)x_A$$

$$N_B = 0 \Rightarrow N_A - (N_A + N_B)x_A = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr}$$

$$\Rightarrow N_A(1 - x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{G_A}{A}(1 - x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr} \xrightarrow{A=4\pi r^2} \frac{G_A}{4\pi r^2}(1 - x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dr}$$

$$G_A = -4\pi CD_{AB} \frac{\int_{x_{A_1}}^{x_{A_2}} \frac{dx_A}{1 - x_A}}{\int_{r_1=r_s}^{r_2} \frac{dr}{r^2}} = 4\pi CD_{AB} \frac{\ln\left(\frac{1 - x_{A_2}}{1 - x_{A_1}}\right)}{-\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_s}\right)} = 4\pi CD_{AB} \frac{\ln\left(\frac{1 - x_{A_2}}{1 - x_{A_1}}\right)}{\left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$r_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{r_2} \rightarrow 0 \Rightarrow x_{A_2} = 0$$

$$\Rightarrow G_A = 4\pi CD_{AB} \frac{\ln\left(\frac{1 - x_{A_2}}{1 - x_{A_1}}\right)}{\left(\frac{1}{r_s} - 0\right)} = 4\pi CD_{AB} r_s \ln\left(\frac{1}{1 - x_{A_1}}\right)$$

$$r_s = 2.5 \text{ cm} = 0.025 \text{ m}, P = 101325 \text{ Pa}, T = 40 + 273.15 = 313.15 \text{ K}$$

$$(D_{AB})_1 = 5.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} @ T = 25 + 273.15 = 298.15 \text{ K} \& P = 101325 \text{ Pa}$$

$$\frac{(D_{AB})_2}{(D_{AB})_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{P_1}{P_2}\right) \Rightarrow \frac{(D_{AB})_2}{5.15 \times 10^{-6}} = \left(\frac{313.15}{298.15}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow (D_{AB})_2 = 5.54 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$y_{A_1} = \frac{44.4 \text{ pa}}{101325 \text{ pa}} = 4.38 \times 10^{-4}$$

(الف)

$$\begin{aligned} G_A &= 4\pi C D_{AB} r_s \ln\left(\frac{1}{1 - x_{A_1}}\right) = \frac{4\pi P_t D_{AB} r_s}{RT} \ln\left(\frac{1}{1 - y_{A_1}}\right) \\ &= \frac{4 \times 3.14 \times 101325 \times 5.54 \times 10^{-6} \times 0.025}{8314 \times 313.15} \ln\left(\frac{1}{1 - 4.38 \times 10^{-4}}\right) \\ &= 2.966 \times 10^{-11} \text{ kmol/s} \end{aligned}$$

سطحی که انتقال جرم در آن رخ می دهد ثابت نیست پس فلاکس مولی انتقال جرم نیز ثابت نمی باشد و برای محاسبه آن، دبی مولی بدست آمده را بر یک سطح مورد نظر تقسیم می کنیم.

$$\underbrace{in}_{\dot{0}} - out = acc \Rightarrow -G_A M_A = \frac{dm}{dt}$$

$$m = \rho V, V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^2 dr = 4\pi r^2 dr$$

$$-4\pi C M_A D_{AB} r \ln\left(\frac{1}{1-x_{A_1}}\right) = \rho 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow -C M_A D_{AB} \ln\left(\frac{1}{1-x_{A_1}}\right) = \rho r \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_0^t dt = \frac{-\rho}{C M_A D_{AB} \ln\left(\frac{1}{1-x_{A_1}}\right)} \int_{r_s}^{\frac{r_s}{2}} r dr \Rightarrow t = \frac{-\rho}{C M_A D_{AB} \ln\left(\frac{1}{1-x_{A_1}}\right)} \left(\frac{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2}{2} - \frac{r_s^2}{2} \right)$$

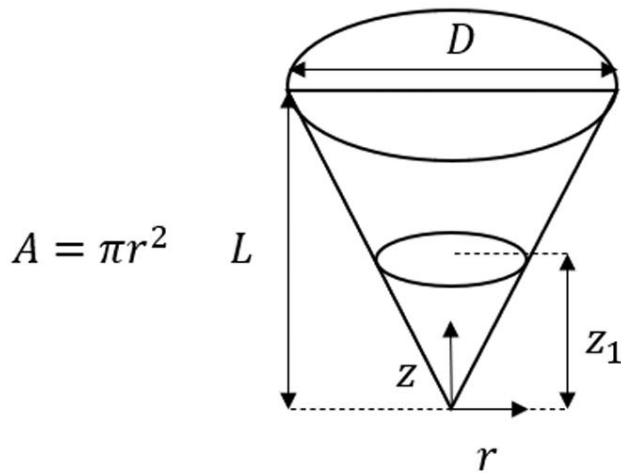
$$\Rightarrow t = \frac{\rho R T}{P_t M_A D_{AB} \ln\left(\frac{1}{1-y_{A_1}}\right)} \left(\frac{r_s^2}{2} - \frac{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2}{2} \right)$$

$$t = \frac{1140 \times 8314 \times 313.15}{101325 \times 128.2 \times 5.54 \times 10^{-6} \times \ln\left(\frac{1}{1-4.38 \times 10^{-4}}\right)} \times \left(\frac{0.025^2}{2} - \frac{0.0125^2}{2} \right)$$

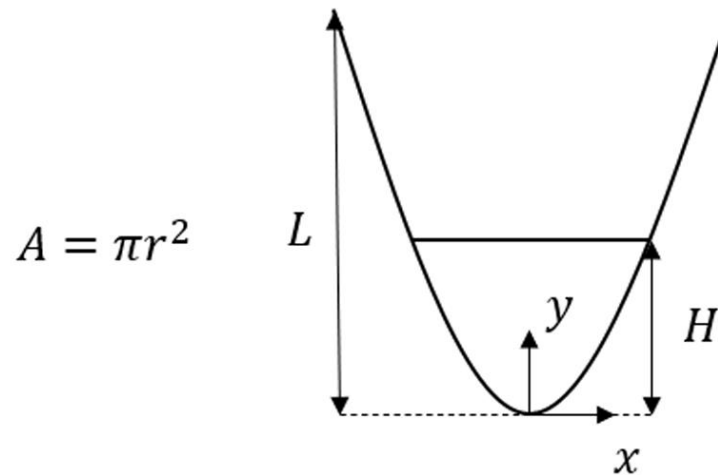
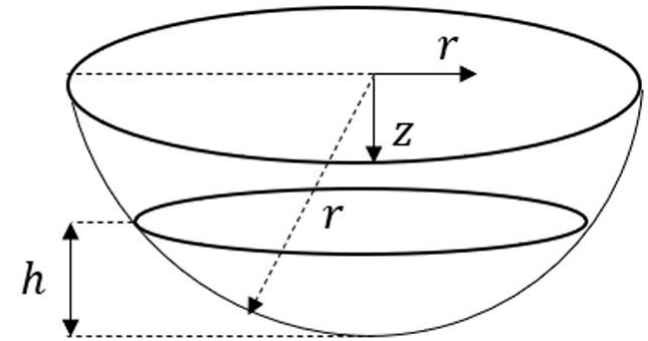
$$= 22064542.66 \text{ s} \approx 6129 \text{ hr}$$

مثال

در ظروف به شکل های زیر آب تا ارتفاع معینی پر شده است. ابتدا رابطه ای برای شدت تبخیر آب و سپس رابطه ای برای زمان کامل تبخیر آب بدست آورید.



$$A = \pi r^2$$



$$N_A = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + (N_A + N_B)x_A$$

$$N_B = 0 \Rightarrow N_A - (N_A + N_B)x_A = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz}$$

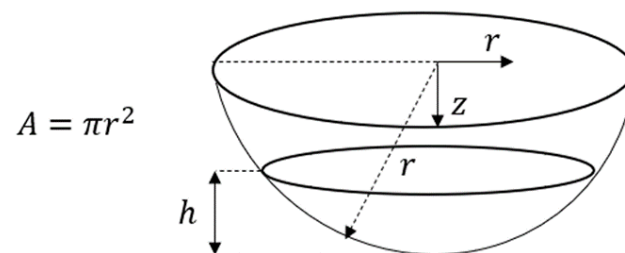
$$\Rightarrow N_A(1 - x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{G_A}{A} (1 - x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz} \Rightarrow G_A(1 - x_A) = -CD_{AB}(\pi r^2) \frac{dx_A}{dz}$$

$$r^2 + z^2 = R^2, \quad R: \text{شعاع کره}$$

$$G_A(1 - x_A) = -CD_{AB}(\pi r^2) \frac{dx_A}{dz} \Rightarrow G_A(1 - x_A) = -CD_{AB}(\pi(R^2 - z^2)) \frac{dx_A}{dz}$$

$$\Rightarrow G_A = -CD_{AB}(\pi(R^2 - z^2)) \frac{\frac{dx_A}{1 - x_A}}{\frac{dz}{R^2 - z^2}} = -CD_{AB}\pi \frac{\int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \frac{dx_A}{1 - x_A}}{\int_{R-h}^0 \frac{dz}{R^2 - z^2}}$$



$$\Rightarrow G_A = CD_{AB}\pi \frac{\ln\left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}}\right)}{\frac{\ln(|z+R|) - \ln(|z-R|)}{2R}} \Big|_{R-h}^0 = CD_{AB}\pi \frac{\ln\left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}}\right)}{\frac{\ln(h) - \ln(2R-h)}{2R}}$$

$$\Rightarrow G_A = 2RC D_{AB}\pi \frac{\ln\left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}}\right)}{\ln\left(\frac{h}{2R-h}\right)}$$

$$\underbrace{in}_{\dot{m}_0} - out = acc \Rightarrow -G_A M_A = \frac{dm}{dt}$$

$$m = \rho V, V = \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 2\pi r^2 dr$$

$$r^2 = R^2 - z^2 \Rightarrow 2r dr = -2z dz \Rightarrow dr = -\frac{z dz}{r} = -\frac{z dz}{\sqrt{R^2 - z^2}}$$

$$\Rightarrow dV = 2\pi r^2 dr \Rightarrow dV = 2\pi(R^2 - z^2) \left(-\frac{z dz}{\sqrt{R^2 - z^2}}\right) = -2\pi\sqrt{R^2 - z^2} z dz$$

$$-G_A M_A = \frac{dm}{dt} \Rightarrow -M_A 2RC D_{AB} \pi \frac{\ln\left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}}\right)}{\ln\left(\frac{h}{2R-h}\right)} = -\rho 2\pi \frac{\sqrt{R^2-z^2} z dz}{dt}$$

$$\Rightarrow M_A R C D_{AB} \frac{\ln\left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}}\right)}{\ln\left(\frac{h}{2R-h}\right)} = \rho \frac{\sqrt{R^2-z^2} z dz}{dt} \Rightarrow dt = \frac{\rho \ln\left(\frac{h}{2R-h}\right)}{M_A R C D_{AB} \ln\left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}}\right)} \sqrt{R^2-z^2} z dz$$

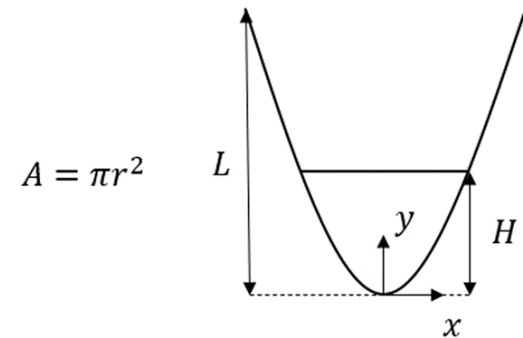
(ب) ظرف گلدانی

$$N_A = -C D_{AB} \frac{dx_A}{dy} + (N_A + N_B) x_A$$

$$N_B = 0 \Rightarrow N_A - (N_A + N_B) x_A = -C D_{AB} \frac{dx_A}{dy}$$

$$\Rightarrow N_A (1 - x_A) = -C D_{AB} \frac{dx_A}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{G_A}{A} (1 - x_A) = -C D_{AB} \frac{dx_A}{dy} \Rightarrow G_A (1 - x_A) = -C D_{AB} (\pi x^2) \frac{dx_A}{dy}$$



$$y = x^2$$

$$G_A(1 - x_A) = -CD_{AB}(\pi x^2) \frac{dx_A}{dy} \Rightarrow G_A(1 - x_A) = -CD_{AB}(\pi y) \frac{dx_A}{dy}$$

$$\Rightarrow G_A = -CD_{AB}\pi \frac{\int_{x_{A_1}}^{x_{A_2}} \frac{dx_A}{1 - x_A}}{\int_H^L \frac{dy}{y}} = CD_{AB}\pi \frac{\ln\left(\frac{1 - x_{A_2}}{1 - x_{A_1}}\right)}{\ln\left(\frac{L}{H}\right)}$$

$$\underbrace{in}_0 - out = acc \Rightarrow -G_A M_A = \frac{dm}{dt}$$

$$m = \rho V, V = \frac{1}{2}\pi x^2 y \xrightarrow{y=x^2} V = \frac{1}{2}\pi y^2 \Rightarrow dV = \pi y dy$$

$$-G_A M_A = \frac{dm}{dt} \Rightarrow -M_A CD_{AB}\pi \frac{\ln\left(\frac{1 - x_{A_2}}{1 - x_{A_1}}\right)}{\ln\left(\frac{L}{H}\right)} = \rho\pi \frac{y dy}{dt} \Rightarrow dt = \frac{-\rho \ln\left(\frac{L}{H}\right)}{M_A CD_{AB} \ln\left(\frac{1 - x_{A_2}}{1 - x_{A_1}}\right)} y dy$$

ج) ظرف مخروطی

$$N_A = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + (N_A + N_B)x_A$$

$$N_B = 0 \Rightarrow N_A - (N_A + N_B)x_A = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz}$$

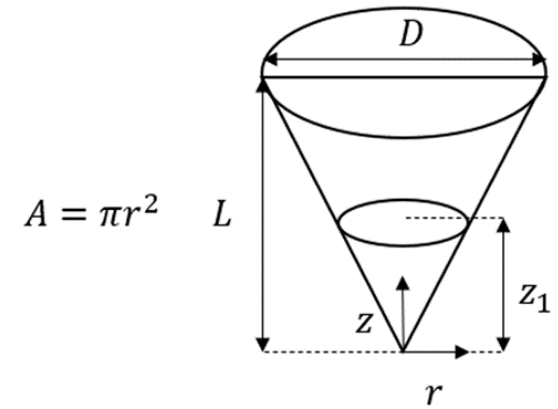
$$\Rightarrow N_A(1 - x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{G_A}{A}(1 - x_A) = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz} \Rightarrow G_A(1 - x_A) = -CD_{AB}(\pi r^2) \frac{dx_A}{dz}$$

$$\begin{cases} z_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \\ z_2 = L \Rightarrow r_2 = \frac{D}{2} \end{cases} \Rightarrow r - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{z_2 - z_1}(z - z_1)$$

$$\Rightarrow r - 0 = \frac{\frac{D}{2} - 0}{L - 0}(z - 0) \Rightarrow r = \frac{D}{2L}z$$

$$G_A(1 - x_A) = -CD_{AB}(\pi r^2) \frac{dx_A}{dz} \Rightarrow G_A(1 - x_A) = -CD_{AB} \left(\pi \frac{D^2}{4L^2} z^2 \right) \frac{dx_A}{dz}$$



$$\Rightarrow G_A = -CD_{AB} \left(\pi \frac{D^2}{4L^2} \right) \frac{\int_{x_{A_1}}^{x_{A_2}} \frac{dx_A}{1-x_A}}{\int_{z_1}^L \frac{dz}{z^2}} = CD_{AB} \left(\pi \frac{D^2}{4L^2} \right) \frac{\ln \left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}} \right)}{-\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{z_1} \right)}$$

$$\underbrace{in}_{\dot{m}_0} - out = acc \Rightarrow -G_A M_A = \frac{dm}{dt}$$

$$m = \rho V, V = \frac{1}{3} \pi r^2 z \xrightarrow{r=\frac{D}{2L}} V = \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4L^2} z^3 \Rightarrow dV = \pi \frac{D^2}{4L^2} z^2 dz$$

$$-G_A M_A = \frac{dm}{dt} \Rightarrow -M_A CD_{AB} \left(\pi \frac{D^2}{4L^2} \right) \frac{\ln \left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}} \right)}{-\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{z_1} \right)} = \rho \pi \frac{D^2}{4L^2} z^2 \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow M_A CD_{AB} \frac{\ln \left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}} \right)}{\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{z_1} \right)} = \rho z^2 \frac{dz}{dt} \Rightarrow dt = \frac{\rho}{M_A CD_{AB} \ln \left(\frac{1-x_{A_2}}{1-x_{A_1}} \right)} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{z_1} \right) z^2 dz$$