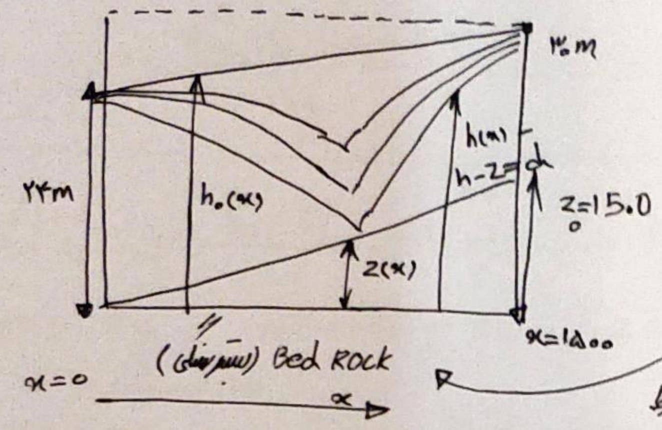
①

هیدرولیک محاسباتی (۱۴۰۰/۰۲/۰۹) _ جلسه ششم

Ex _ مساله‌ی پمپاژ



شرط

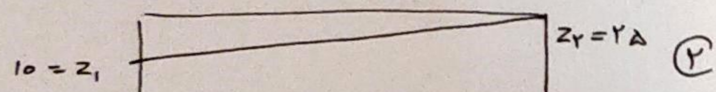
①

$$\boxed{z(x)=\frac{20}{1500}\times x}$$

$$z(x)=\frac{15}{1500}x=0/01x$$

« از جایی Z مورد اهمیت که در روی d تاثیر می‌گذارد »

(تحت تاثیر معادله حاکم)

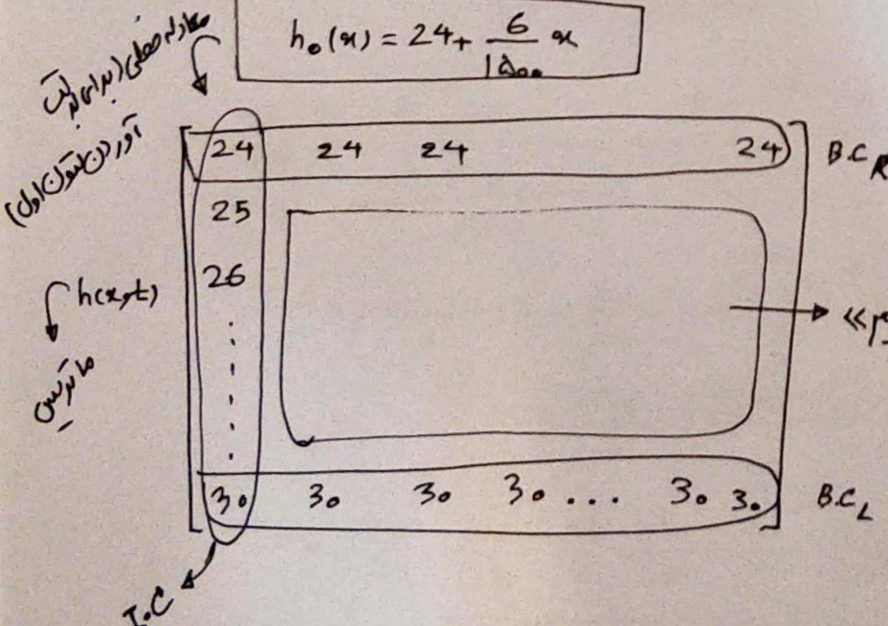


$$z(x)=10+\frac{15}{1500}x$$

« بین (۱) و (۲) فرقی نیست »

« شرط اولیه سطح آب در محیط با فرض توزیع خطی بین $h=30$ در سمت راست تا $h=24$ در سمت چپ استفاده نمائید. (با یک تابع خطی هم وصل می‌کنیم) (h اولیه)

$$\boxed{h_0(x)=24+\frac{6}{1500}x}$$



$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{n}\frac{\partial}{\partial x}\left(d\frac{\partial h}{\partial x}\right)-q$$

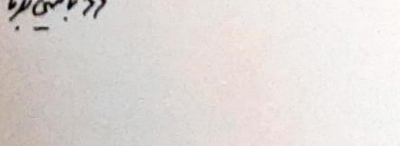
$q=0$ For All i

بجز گره میانی $\longrightarrow q\neq 0$

FTCS $\longrightarrow \dfrac{h_i^{n+1}-h_i^n}{\Delta t}$

F.T

« گسسته سازی برنامه :



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial h}{\partial x}\right)\Big|_{i+1/2}^{n} = \frac{\alpha_{i+1/2}\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{i+1/2} - \alpha_{i-1/2}\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{i-1/2}}{2\Delta x/2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\right)\left(\frac{h^n_{i+1/2+1/2}-h^n_{i+1/2-1/2}}{2\Delta x/2}\right) - \left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i-1}}{2}\right)\left(\frac{h_{i-1/2+1/2}-h_{i-1/2-1/2}}{2\Delta x/2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \left[\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}\right)\times\left(h^n_{i+1}-h^n_i\right) - \left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i-1}}{2}\right)\left(h^n_i-h^n_{i-1}\right)\right]\frac{1}{\Delta x^2} \longrightarrow$$ «گسسته سازی نهایی»

یک سوال که همواره در حل های عددی مطرح می باشد آن است که تحت چه شرایطی یک معادله تفاضل محدود (F.D Eq) Finite Difference Eq تخمین مناسب و خوبی از یک PDE می باشد. برای این منظور دو شرط سازگاری و پایداری برای فرم گسسته F.D.E بایستی برقرار باشد:

۱. شرط سازگاری consistancy

یک فرم اختلاف محدود از یک معادله دیفرانسیل جزئی هنگامی سازگار است که خطای برشی با کوچک شدن ابعاد زمانی و مکانی مش به سمت صفر میل نماید.

$$\lim T.E \to 0$$

$$\text{mesh} \to 0$$

$$\boxed{\Delta x, \Delta y, \Delta t} \to 0$$

$$\boxed{T.E = PDE - FDE}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{PDE} = \underbrace{\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}}_{F.D.E} + \overbrace{\cdots\cdots}^{T.E}$$

$$T.E = PDE - FDE = \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\cancel{u_i^n} + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cdots - \cancel{u_i^n}}{\Delta t}\right)$$

$$T.E = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} \underbrace{- \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}_{T.E} \longrightarrow (1)$$

در معادله (۱) زمانیکه $\Delta t \to 0$ آنگاه خطای برشی $T.E \to 0$ لذا روش F.T برای گسسته سازی مشتق زمانی سازگار است.

البته اکثر روش های گسسته سازی F.D یا C.D دارای شرط سازگاری هستند اما گاهاً در برخی از روش های گسسته سازی عباراتی نظیر $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ در خطای برشی ظاهر می گردد که ممکن است شرط سازگاری را زیر سوال ببرد.

* به عنوان مثال: روش دوفورت - فرانکل برای گسسته سازی معادله گرمایی: یکی از این روش‌ها

$$\underbrace{\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}}_{(C.D)} = \alpha \underbrace{\frac{u_{i-1}^{n}-(u_i^{n+1}+u_i^{n-1})+u_{i+1}^{n}}{\Delta x^2}}_{\text{مرتبه دوم } (C.D)}$$

<< این روش از بصورت central مشتق زمانی را گسسته می‌کند و بصورت central مشتق مکانی را گسسته می‌کند

یعنی CTCS برای گسسته سازی استفاده می‌گردد.

T.E =

<< بسط سری تیلور می‌نویسیم >>

$$T.E = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{PDE} - \left[\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \alpha\frac{u_{i-1}^{n}-(u_i^{n+1}+u_i^{n-1})+u_{i+1}^{n}}{\Delta x^2}\right]$$

* << بدست آوردن خطای برشی یکی از سوالات امتحان >>

$$T.E = \frac{\alpha}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Delta x^2 - \alpha\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2}_{?} - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta t^2 + \dots$$

$\boxed{\Delta x, \Delta t \to 0}$

حالت

در این روش دارای سازگاری مشروط می‌باشد. شرط سازگاری را برآورده می‌کند. در این شرایط بایستی نرخ کاهش Δt به مراتب کمتر از Δx باشد تا شرط سازگاری برقرار گردد.

$$\Delta t \ll \Delta x \longrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} \ll 1.0 \longrightarrow$$ ((شرط سازگاری برقرار گردد.))

۲) شرط پایداری stability

بطور کلی پایداری عمدتا در مسائل و معادلاتی که دارای مشتق زمانی می‌باشند مطرح می‌گردد

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ معادله گرمایی

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ " هذلولوی

وجود مشتق زمانی پیشروی در زمان یا time marching را همراه دارد.

$$\begin{matrix} n=1 & & n=2 & & n=3 & \\ t=0 & \longrightarrow & t=\Delta t & \longrightarrow & t=2\Delta t & \cdots\cdots \\ I.C & & & & & \end{matrix}$$

$\xrightarrow{\hspace{4em}}$

پیشروی در زمان

یک روش عددی هنگامی پایدار است که خطاها از هر منبع تولید (خطای گرد کردن، خطای برشی) در طی فعالیت پیشروی در زمان اجازه رشد پیدا نکنند. (تعریف پایداری)

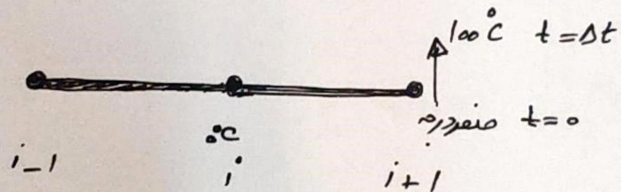
<< چک کردن پایداری مشکل‌تر از چک کردن سازگاری است و ریاضیات پیچیده‌ای دارد که خارج از حوصله این درس است. >>

<< پایداری عمدتاً در روش‌های صریح موضوعیت پیدا نموده و روش‌های ضمنی مشکل پایداری ندارند. >>

و کنترل شرط پایداری با محدود کردن مقدار r در معادلات عمومی محقق می‌گردد.

$$r \leq 1/2 \longrightarrow \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1/2 \longrightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$$

مثال: پایداری روش FTCS که یک روش صریح است برای انتقال حرارت غیردائمی در یک میله



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \longrightarrow \boxed{FTCS}$$

$$u_i^{n+1} = r\,u_{i+1}^n + (1-2r)\,u_i^n + r\,u_{i-1}^n$$

$$r = 0/2 \longrightarrow u_i^{n+1} = 0.2\times 100 + (1-0/2)\times 0 + 0/2\times 100 = 40\,^\circ C$$

$$r = 1 \longrightarrow u_i^{n+1} = 1\times 100 + (1-2)\times 0 + 1\times 100 = 200\,^\circ C$$

لذا یک حل عددی ناپایدار مثل مثال فوق می‌تواند به جواب‌های غیرمعقول مانند غیرفیزیکی منتهی گردد.

← جلسه قبل برای فرار از مشکل پایداری در روش‌های صریح به سراغ روش‌های ضمنی می‌رویم:

۱) روش ضمنی (Backward time centred space , BTCS

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha\,\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$-r\,u_{i-1}^{n+1} + (1+2r)\,u_i^{n+1} - r\,u_{i+1}^{n+1} = u_i^n \qquad (2)$$

از معادله (۲) نمی‌توان مقدار u_i^{n+1} را بصورت مستقیم بدست آورد و مقدار آن با مقادیر گره‌های مجاور u_{i-1}^{n+1} و u_{i+1}^{n+1} گره خورده است لذا این روش یک روش ضمنی می‌باشد.

M-۲ معادله با M مجهول در قالب یک دستگاه معادلات باید حل گردد.

$$i=2 \qquad -r u_1^{n+1} + (1+2r) u_2^{n+1} - r u_3^{n+1} = u_2^n$$

$$i=3 \qquad -r u_2^{n+1} + (1+2r) u_3^{n+1} - r u_4^{n+1} = u_3^n$$

$$i=M-1 \qquad -r u_{M-2}^{n+1} + (1+2r) u_{M-1}^{n+1} - r u_M^{n+1} = u_{M-1}^n$$

«ماتریس ضرایب» — مجهول ؟ — معلوم ✓

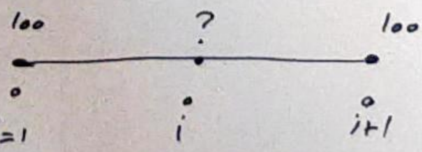
$$\begin{bmatrix} (1+2r) & -r & 0 & 0 & 0 \\ -r & (1+2r) & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & (1+2r) & -r & 0 \\ & & \ddots & & \\ & -r & (1+2r) & -r & \\ & & & \ddots & \\ & & & -r & +(1+2r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_i^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_i^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن مقادیر u_i^{n+1} بایستی دستگاه معادلات $[A][u^{n+1}]=[R]$ حل گردد. به هیچ عنوان در این درس برای حل دستگاه معادلات فوق روش مستقیم توصیه نمی‌گردد. با توجه به آنکه در اکثر اوقات ماتریس A یک ماتریس ۳ قطری می‌باشد از روش حذفی گوس که راندمان و سرعت بالاتری در حل دستگاه معادلات دارد برای حل استفاده می‌کنیم. با توجه به ماهیت گسسته سازی معادلات این ۳ قطری بودن در اکثر روش‌ها رخ می‌دهد.

گفتیم روش‌های ضمنی مشکل پایداری ندارند. امثال فوق (میله حرارت دیده) را می‌خواهیم به روش ضمنی حل کنیم:

$$FTCS \longrightarrow r=1.0 \longrightarrow u_i^{n+1} = 200^\circ C \quad \times$$ غلط بود

$$-r u_{i-1}^{n+1} + (1+2r) u_i^{n+1} - r u_{i+1}^{n+1} = +u_i^n$$



$$\xrightarrow{r=1} \quad -1\times 100 + (1+2) u_i^{n+1} - 1\times 100 = 0$$

$$u_i^{n+1} = \frac{200}{3} = 66.6^\circ C$$ که جواب منطقی و معنی داری می‌باشد.

لذا ملاحظه می‌گردد در روش ضمنی BTCS مشکل پایداری ندارند. «علت استفاده از روش‌های صریح با توجه به محاسبات ساده‌تر است ولی در روش‌های ضمنی محاسبات زیاد است»

حل دستگاه معادلات $[A][u]=[R]$ برای زمانیکه ماتریس A سه قطری بوده به روش حذفی گاوس

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & \text{صفر} & \\ & \ddots & & & \\ \text{صفر} & A_i & B_i & C_i & \\ & & & A_M & B_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ u_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ R_M \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات روبرو به روش حذفی گاوس زمان بسیار کمتری نسبت به روش مستقیم دارد و با انجام عملیات اصلی در هر گره می‌توان دستگاه معادلات را حل نمود.

در روش حذفی گاوس ابتدا ماتریس ضرایب بصورت بالا مثلثی یا پایین مثلثی تبدیل می‌گردد.

a- Forward Elimination ← حذف پیش‌رو

$$-\frac{A_2}{B_1}\times \quad B_1u_1+C_1u_2=R_1$$

بالایی

$$(+1)\times \quad A_2u_1+B_2u_2+C_2u_3=R_3$$

$$\underbrace{\left(B_2-\frac{A_2}{B_1}C_1\right)}_{B_2^*}u_2+\underbrace{C_2}_{C_2^*}u_3=\underbrace{R_2-R_1\frac{A_2}{B_1}}_{R_2^*}$$

$A_2^*=0$

$$A_3^*=0 \qquad B_3^*=B_3-\frac{A_3C_2}{B_2^*}\,,\quad C_3^*=C_3\,,\quad R_3^*=R_3-\frac{A_3R_2^*}{B_2^*}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ 0 & B_2^* & C_2^* & & \\ & & B_3^* & C_3^* & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_M^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^* \\ R_2^* \\ \vdots \\ R_M^* \end{bmatrix}$$

در این مرحله از آخرین معادله یا آخرین سطر ماتریس ضرایب می‌توان مقدار u_M را محاسبه نموده و گام به گام از گره‌های آخر به گره‌های ابتدایی مقادیر u_i را محاسبه نمود:

$$u_M = \frac{R^*}{B^*_M} \qquad i = M$$

$i = M-1$

$$B^*_{M-1}\, u_{M-1} + C_{M-1}\, u_M = R^*_{M-1} \longrightarrow u_{M-1} = \frac{R^*_{M-1} - C_{M-1}\, u_M}{B^*_{M-1}}$$

Backward substitution — جایگزینی پس‌رو

« در هر گره سه ضرب، سه تفریق و دو تقسیم و مجموعاً ۸ عمل اصلی در روش حذفی گاوس انجام می‌شود »

EX-1) برای جلسه‌ی آینده‌ی برنامه پیمار را تکمیل کنید.