



محاسبه شار در مختصات استوانه ای و کروی

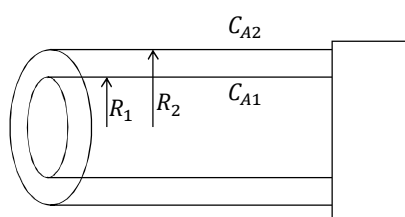
مدرس: علیرضا همّتی

Alireza_hemmati@jy.ac.ir

1



محاسبه شار در مختصات استوانه ای



فرضیات :

$$\begin{cases} \text{gen}=0 \\ \text{steady state} \\ \sum N_i = N_A \quad \text{نفوذ در جزء ساکن} \end{cases}$$

▪ در این قسمت نفوذ در جزء ساکن را به عنوان یک حالت خاص در نظر گرفته و به بررسی آن می پردازیم.

2



محاسبه شار در مختصات استوانه‌ای

$$N_A = J_A + \frac{C_A}{C} \sum N_i \rightarrow N_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} + \frac{C_A}{C_t} N_A$$

$$\rightarrow N_A = \frac{-D_{AB} \frac{dC_A}{dr}}{1 - \frac{C_A}{C_t}}$$

$$\text{flux: } G_A = N_A \times A = N_A \times (2\pi rL) \quad \begin{cases} N_A r = \text{cte} \\ 2\pi rL = \text{cte} \end{cases} \rightarrow G_A = \text{cte}$$

$$\Rightarrow G_A = \left[\frac{-D_{AB} \frac{dC_A}{dr}}{1 - \frac{C_A}{C}} \right] \times 2\pi rL$$

3



محاسبه شار در مختصات استوانه‌ای

$$G_A = \frac{-2\pi L D_{AB} \int_{C_{A1}}^{C_{A2}} \frac{dC_A}{1 - \frac{C_A}{C}}}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}} \rightarrow G_A = \frac{2\pi L D_{AB} C}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{1 - \frac{C_{A2}}{C}}{1 - \frac{C_{A1}}{C}}$$

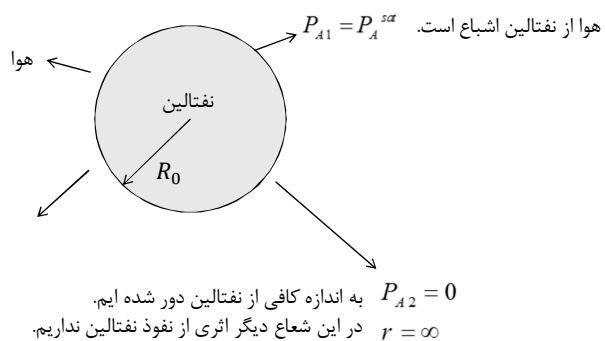
$$\Rightarrow N_A = \frac{D_{AB} C}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{1 - \frac{C_{A2}}{C}}{1 - \frac{C_{A1}}{C}}$$

- N_A با r متغیر است.
- اگر واکنش داشته باشیم، به جای $\sum N_i = N_A$ مثلا $\sum N_i = 3N_A$ گذاشته ولی روش حل مسئله عوض نمی شود.
- برای محاسبه پروفایل غلظت کافیست $\begin{cases} C_{A2} \rightarrow C_A \\ R_2 \rightarrow R \end{cases}$ تبدیل کنیم.

4

محاسبه شار در مختصات کروی

مسئله تصعید گلوله نفتالین

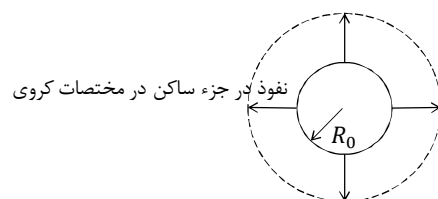


برای فاز گاز ← نفوذ در جزء ساکن در مختصات کروی } N_A
برای فاز جامد ← کوچک شدن گلوله نفتالین با زمان

5

محاسبه شار در مختصات کروی

بررسی مسئله از لحاظ فاز گاز:



$$G_A = N_A \times 4\pi r^2 = cte \quad \begin{cases} gen = 0 \\ s.s ? \end{cases}$$

6



محاسبه شار در مختصات کروی

$$N_A = -D_{AB} \frac{dC_A}{dr} + \frac{C_A}{C} N_A \rightarrow N_A = \frac{-D_{AB} \frac{dC_A}{dr}}{1 - \frac{C_A}{C}}$$

$$\text{flux: } G_A = 4\pi r^2 \frac{-D_{AB} \frac{dC_A}{dr}}{1 - \frac{C_A}{C}} \rightarrow G_A = \frac{-4\pi D_{AB} \int \frac{dC_A}{1 - \frac{C_A}{C}}}{\int \frac{dr}{r^2}}$$

$$\text{داشتیم} \rightarrow C_A = \frac{P_A}{R_g T}, \frac{C_A}{C} = \frac{P_A}{P_t}$$

ثابت گازها

7



محاسبه شار در مختصات کروی

$$G_A = \frac{-4\pi D_{AB} \int_{P_A^{sat}}^0 \frac{dP_A}{1 - \frac{P_A}{P_t}}}{R_g T \int_{r=R}^{r=\infty} \frac{dr}{r^2}} \rightarrow G_A = \frac{4\pi D_{AB} P_t R}{R_g T} \ln \frac{1}{1 - \frac{P_A^{sat}}{P_t}}$$

$$N_A = \frac{G_A}{4\pi R^2} \Rightarrow N_A = \frac{D_{AB} P_t}{R_g T R} \ln \frac{P_t}{P_t - P_A^{sat}}$$

✓ اگر تغییر شعاع در کره با زمان ناچیز باشد، مثل مختصات کارتزین می شود.

8



محاسبه شار در مختصات کروی

بررسی مسئله از لحاظ فاز جامد:

گلوله ای داریم با شعاع R که با گذشت زمان کوچک می شود.

تعریف شار: $N_A = -\frac{dn_A}{A \times dt}$

$(n_A = \frac{m_A}{M_A}, m = \rho V \rightarrow dm = \rho dV, dV = A \times dR)$

$$N_A = -\frac{\rho}{M} \frac{dR}{dt}$$

خیلی مهم

در نتیجه خواهیم داشت

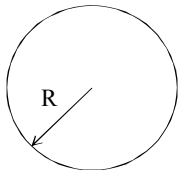
✓ شدت فلاکس تصعید A ناشی از کوچک شدن R با زمان است.

9



محاسبه شار در مختصات کروی

حال با ترکیب دو فاز در مختصات کروی خواهیم داشت:



فاز جامد: $N_A = -\frac{\rho}{M} \frac{dR}{dt}$

فاز گاز: $N_A = \frac{D_{AB} P_t}{R_g T R} \ln \frac{P_t}{P_t - P_A^{sat}}$

نکته: در فصل مشترک گلوله، N_A ها باهم برابر هستند.

10



محاسبه شار در مختصات کروی

$$-\frac{\rho}{M} \frac{dR}{dt} = \frac{D_{AB} P_t}{R_g T R} \ln \frac{P_t}{P_t - P_A^{sat}}$$

$$\rightarrow \frac{-\rho R_g T}{M_A D_{AB} P \ln \frac{P_t}{P_t - P_A^{sat}}} \int_{R_0}^0 R dR = \int_0^{t_f} dt$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{\rho R_g T}{2 M_A D_{AB} P \ln \frac{P_t}{P_t - P_A^{sat}}} \times R_0^2 \Rightarrow t_f \propto R_0^2$$

نکات:

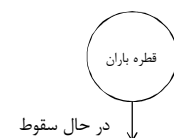
- در زمانی که تصعید کامل رخ می دهد، شعاع کره صفر می شود.
- با توجه به رابطه فوق مشخص شد که زمان تصعید گلوله نفتالین متناسب با مجذور شعاع است. پس با ۲ برابر شدن شعاع کره، زمان تصعید ۴ برابر می گردد.

11



محاسبه شار در مختصات کروی

نکته:



فاز مایع : $N_A = -\frac{\rho}{M} \frac{dR}{dt}$

فاز گاز : $N_A =$ از روابط فصل سوم تریبال برای جا به جایی

➤ اگر قطره باران در حال تبخیر بود، در فاز گاز نفوذ داشتیم.

12