

گام زمانی برتر برای تحلیل غیرخطی هندسی با روش رهایی پویا

محمد رضایی پزند^{۱*}، جواد علامتیان^۲

۱- استاد گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- مربی گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

* مشهد، صندوق پستی ۹۱۷۷۵-۱۱۱۱

MRPAJAND@YAHOO.COM

(دریافت مقاله: تیر ۱۳۸۲، پذیرش مقاله: آبان ۱۳۸۳)

چکیده - در این مقاله، گام زمانی جدیدی برای روش رهایی پویا ارائه می‌شود. برای محاسبه گام زمانی، نیروی نامیزان هر تکرار کمینه می‌شود. محاسبه مرتبه همگرایی، برتری روش پیشنهادی را به صورت ریاضی نشان می‌دهد. از سوی دیگر، تحلیل خراباهای مستوی و فضایی، کارایی این روش را به صورت عددی ثابت می‌کند. در اینجا رفتار غیرخطی هندسی مورد نظر است. افزون بر این، درستی روال پیشنهادی، که با نتیجه‌های گسترده حاصل از برنامه رایانه‌ای نویسندگان بررسی شده، با چند نمونه نشان داده می‌شود.

کلید واژگان: رهایی پویا، گام زمانی، خرابای مستوی، رفتار غیرخطی، تغییرشکلهای بزرگ، مرتبه همگرایی، نیروی نامیزان، خرابای فضایی.

۱- مقدمه

نتیجه تحلیل سازه به روش اجزای محدود، به وسیله حل یک دستگاه معادله همزمان به دست می‌آید. روشهای گوناگونی برای حل چنین دستگاهی وجود دارد. یک دسته از این روشها، روشهای تکراری است. روش رهایی پویا جزو این راهکارها است [۱] و از قانون دوم ریچاردسون به دست می‌آید که قانون مزبور، توسط فرانکل توسعه داده شده است. روش رهایی پویا نخستین بار برای حل معادله لاپلاس جریان حرارت در صفحه مستطیلی به کار رفت [۲] و بعدها برای تحلیل دیگر سازه‌ها از آن استفاده شد [۳]. باید دانست که تعبیر فیزیکی فرایند رهایی پویا، به دست آوردن پاسخ حالت پایدار دستگاه پویا است.

۲- رابطه‌سازی روش رهایی پویا

معادله تعادل کلی سازه در روش رهایی پویا به صورت زیر است [۴]:

$$[M]\{\ddot{D}\}^n + [C]\{\dot{D}\}^n + \{f\}^n = \{P\} \quad (1)$$

در این رابطه، $[M]$ و $[C]$ ، به ترتیب، ماتریسهای جرم و میرایی است. از سوی دیگر، $\{\ddot{D}\}^n$ ، $\{\dot{D}\}^n$ ، $\{f\}^n$ و $\{P\}$ ، به ترتیب، بردارهای شتاب، سرعت، نیروی داخلی و بار خارجی را در گام n ام مشخص می‌کنند. برای فرمولبندی روش رهایی پویا از فنون عددی استفاده می‌شود. بنابراین، با فرض ماتریس جرم قطری و استفاده از تفاوت‌های محدود مرکزی، نتیجه زیر به دست می‌آید [۵]:

$$c^n = 2 \left\{ \frac{\left(\{D\}^n \right)^T [S^D] \{D\}^n}{\left(\{D\}^n \right)^T [M] \{D\}^n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

در این رابطه، $[S^D]$ ماتریس سختی معادل قطری است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{ii}^D = \frac{\{f_i(D^n)\} - \{f_i(D^{n-1})\}}{\tau^n \dot{D}_i^{\frac{n-1}{2}}} \quad (9)$$

یادآوری می‌شود که در روشهای معمول رهایی پویا، گام زمانی، ثابت و برابر یک فرض می‌شود. با وجود این، راهکارهایی برای تعیین این عامل بر اساس اصل ریلی پیشنهاد شده است [۷].

۳- فرمولبندی گام زمانی پیشنهادی

روش رهایی پویا، فرایند تکراری حل دستگاه معادله‌ها است. در این راهکار، نیروی نامیزان اساسی ترین نقش را در پیشرفت حل به عهده دارد. براین اساس، کمینه کردن این عامل، سبب بهبود فرایند حل خواهد شد. برای این کار، رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\left(\{R\}^{n+1} \right)^T \cdot \{R\}^{n+1} \leq Z_R \left(\{R\}^n \right)^T \cdot \{R\}^n \quad (10)$$

در این رابطه، $\{R\}^n$ و $\{R\}^{n+1}$ ، به ترتیب، بردارهای نیروی نامیزان در گام n و $(n+1)$ ام، است. عامل Z_R ، نقش سنجش فرایند حل را دارد و ضریب کاهنده نیروی نامیزان نامیده می‌شود. روشن است، با کمینه کردن Z_R ، نیروی نامیزان در گام $(n+1)$ ام، کمینه می‌شود. افزون بر این، نرخ همگرایی نیز به بیشینه مقدار خود می‌رسد. بردار نیروی نامیزان را برحسب عاملهای گرهی آن می‌توان نوشت و از ضرب داخلی بردارها استفاده کرد. در این صورت، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^q (r_i^{n+1})^2 \leq Z_R \sum_{i=1}^q (r_i^n)^2 \quad (11)$$

در این رابطه q شمار درجه‌های آزادی سازه است. خاطر نشان می‌شود که در رابطه مزبور، مقدارهای عددی

$$\begin{aligned} \{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{2 - \tau^n c^n}{2 + \tau^n c^n} \{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c^n} \left\{ \frac{r_i}{m_{ii}} \right\}^n \end{aligned} \quad (2)$$

$$\{D\}^{n+1} = \{D\}^n + \tau^{n+1} \{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3)$$

در این رابطه‌ها τ^n و m_{ii} ، به ترتیب، گام زمانی در مرحله n ام و درایه قطری i ام از ماتریس جرم است. همچنین، نیروی نامیزان درجه آزادی i ام را مشخص می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_i^n = p_i - f_i^n \quad (4)$$

در رابطه (۲)، c^n عامل میرایی در گام n ام است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$[C] = c^n [M] \quad (5)$$

ماتریس جرم، عامل میرایی و گام زمانی مجهول است. متداولترین راهکار برای تعیین درایه‌های قطری ماتریس جرم، استفاده از نگره دایره گرشگورین است. این نگره، مقدارهای جرم را برای تضمین پایداری عددی روش رهایی پویا به صورت رابطه زیر تعیین می‌کند [۶]:

$$m_{ii} \geq \frac{(\tau^n)^2}{4} \sum_{j=1}^q |S_{ij,T}| \quad (6)$$

در اینجا، $S_{ij,T}$ درایه ij از ماتریس سختی مماسی سازه است. از سوی دیگر، عامل میرایی از اصل ریلی محاسبه می‌شود که برای این کار، راهکارهای گوناگونی وجود دارد. معمولترین روش، رابطه‌های زانگ و آندروود است. در فرایند زانگ، عامل میرایی در هر گام از رابطه زیر به دست می‌آید [۴]:

$$c^n = 2 \left\{ \frac{\left(\{D\}^n \right)^T \{f(D^n)\}}{\left(\{D\}^n \right)^T [M] \{D\}^n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

در این رابطه $\{D\}^n$ بردار تغییر مکان در گام n ام است. فرایند آندروود عامل میرایی را براساس سرعت‌های گرهی، مطابق رابطه زیر به دست می‌دهد [۶]:

از سوی دیگر، نیروی نامیزان در گام $(n+1)$ ام، به عامل کاهنده Z_R ، وابسته است. بنابراین، با کمینه کردن عامل مزبور، نتیجه دلخواه به دست می‌آید. برای این کار، Z_R از رابطه (۱۶) به دست می‌آید:

$$Z_R \geq 1 + \frac{\left[\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \left(\tau^{n+1} \right)^2 - 2 \left[\sum_{i=1}^q \left(r_i^n \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \tau^{n+1}}{\sum_{i=1}^q \left(r_i^n \right)^2} \quad (17)$$

چنانچه، عامل Z_R نسبت به گام زمانی کمینه شود، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial Z_R}{\partial \tau^{n+1}} = 2 \frac{\left[\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \tau^{n+1} - \sum_{i=1}^q \left(r_i^n \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)}{\sum_{i=1}^q \left(r_i^n \right)^2} \quad (18)$$

روشن است که عامل کاهنده نیروی نامیزان، در صورتی کمینه است که رابطه (۱۸)، صفر شود. با این کار، رابطه زیر برای گام زمانی به دست می‌آید:

$$\frac{\partial Z_R}{\partial \tau^{n+1}} = 0 \Rightarrow \tau^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^q \left(r_i^n \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)}{\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2} \quad (19)$$

این رابطه، گام زمانی را به گونه‌ای حساب می‌کند که مقدار عامل کاهنده نیروی نامیزان فرین شود. از سوی دیگر، هدف کمینه کردن مقدار مزبور است، بنابراین، می‌توان از مشتق مرتبه دوم استفاده کرد. با مشتق‌گیری دوباره از رابطه (۱۸)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

نیروی نامیزان در گام n ام، معین است. اگر از تعریف نیروی نامیزان استفاده شود، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^q \left(P_i - \dot{f}_i^{n+1} \right)^2 \leq Z_R \sum_{i=1}^q \left(r_i^n \right)^2 \quad (12)$$

در اینجا \dot{f}_i^{n+1} ، نیروی داخلی درجه آزادی i را در گام $(n+1)$ ام، و P_i ، بار گرهی وارد به درجه آزادی مزبور را مشخص می‌کند. در رابطه (۱۲)، عامل \dot{f}_i^{n+1} ، مجهول است. با استفاده از تفاوت‌های محدود مرکزی، می‌توان نوشت:

$$\dot{f}_i^{n+1} = \dot{f}_i^n + \tau^{n+1} \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (13)$$

در این رابطه، $\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}}$ ، نمو زمانی نیروی داخلی در درجه آزادی i ام است. عامل مزبور را می‌توان، در دو حالت رفتار خطی و غیرخطی تعیین کرد. اکنون با جایگذاری رابطه (۱۳) در (۱۲)، نابرابری زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^q \left(P_i - \dot{f}_i^n - \tau^{n+1} \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \leq Z_R \sum_{i=1}^q \left(r_i^n \right)^2 \quad (14)$$

رابطه کنونی را می‌توان با توجه به تعریف نیروی نامیزان در گام n ام، ساده کرد:

$$\sum_{i=1}^q \left(r_i^n - \tau^{n+1} \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \leq Z_R \sum_{i=1}^q \left(r_i^n \right)^2 \quad (15)$$

با گسترش این رابطه و مرتب کردن آن برحسب عاملهای گام زمانی، نابرابری درجه دوم زیر به دست می‌آید:

$$\left[\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \left(\tau^{n+1} \right)^2 - 2 \left[\sum_{i=1}^q \left(r_i^n \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \tau^{n+1} + (1 - Z_R) \sum_{i=1}^q \left(r_i^n \right)^2 \leq 0 \quad (16)$$

در این رابطه، ضریب کاهنده نیروی نامیزان (Z_R) و گام زمانی در تکرار بعد (τ^{n+1})، مجهول می‌باشند.

به ماتریس سختی وتری و تغییرمکانهای گرهی آن وابسته است، از این رو می توان نوشت:

$$\dot{f}_i^{n+1/2} = \sum_{j=1}^q S_{ij,G} \dot{D}_j^{n+1/2} \quad (23)$$

در این رابطه، زیرنویس G نشانگر ماتریس سختی وتری است. از سوی دیگر، به دلیل تفاوت رفتار سازه در حالت های خطی و غیرخطی، رابطه سازی نمو زمانی نیروی داخلی، برای این دو حالت، در ادامه انجام می شود.

در سازه های با رفتار خطی، درایه های سختی در سرتاسر تحلیل، ثابت است، بنابراین، نیروی داخلی از رابطه زیر حساب می شود:

$$\dot{f}_i^{n+1/2} = \sum_{j=1}^q S_{ij,L} \dot{D}_j^{n+1/2} \quad (24)$$

در این رابطه، زیرنویس L نشانگر ماتریس سختی خطی است. با مشتق گیری از رابطه (24)، برحسب گام زمانی، نتیجه زیر به دست می آید:

$$\dot{f}_i^{n+1/2} = \sum_{j=1}^q S_{ij,L} \dot{D}_j^{n+1/2} \quad (25)$$

اکنون، با معلوم بودن سرعت های گرهی در میان گام، و نیز ثابت بودن ماتریس سختی، نمو زمانی نیروی داخلی در حالت خطی، از رابطه (25)، محاسبه می شود. لازم است ذکر شود که این روش دقیق بوده و هیچگونه فرضی در آن وارد نشده است.

در سازه های با رفتار غیرخطی، درایه های سختی، با پیشرفت حل تغییر می کنند. بنابراین عامل های مزبور، به گام زمانی وابسته اند. از سوی دیگر، در این حالت نیز نیروی داخلی از رابطه (23)، محاسبه می شود. چنانچه مشتق تابع مزبور، برحسب گام زمانی به دست آید، نتیجه زیر به دست می آید:

$$\dot{f}_i^{n+1/2} = \sum_{j=1}^q \left(\frac{\partial S_{ij,G}}{\partial \tau} \dot{D}_j^{n+1/2} + S_{ij,G} \dot{D}_j^{n+1/2} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 Z_R}{\partial (\tau^{n+1})^2} = 2 \frac{\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+1/2} \right)^2}{\sum_{i=1}^q \left(\dot{r}_i^n \right)^2} \geq 0 \quad (20)$$

روشن است که رابطه (20) همواره بزرگتر از صفر است. بنابر آزمون مشتق دوم، گام زمانی رابطه (19)، عامل کاهنده نیروی نامیزان راکمینه می کند. در این حالت، برای تعیین مقدار عامل کاهنده، رابطه (19) در (17)، جایگذاری می شود. پس از ساده کردن، نتیجه زیر به دست می آید:

$$Z_R = 1 - \frac{\left[\sum_{i=1}^q \left(\dot{r}_i^n \dot{f}_i^{n+1/2} \right) \right]^2}{\left[\sum_{i=1}^q \left(\dot{r}_i^n \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+1/2} \right)^2 \right]} \leq 1 \quad (21)$$

عامل Z_R در رابطه (21)، همواره کوچکتر از یک است، بنابراین، فرایند تعیین گام زمانی با روش مزبور، پایداری عددی روش را تضمین می کند. اکنون، به بررسی حالت ویژه ای در این روش می پردازیم. چنانچه سازه مورد نظر، دارای فقط یک درجه آزادی باشد، در این صورت، رابطه های برداری راهکار مزبور به شکل جبری تبدیل می شوند. در این حالت، عامل کاهنده نیروی نامیزان صفر می شود و بنابراین، از دیدگاه ریاضی، نرخ همگرایی بینهایت می شود. به بیان دیگر، پاسخ در نخستین تکرار به دست می آید. گام زمانی مزبور برای سازه یک درجه آزادی، از رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\tau^{n+1} = \frac{r^n}{\dot{f}^{n+1/2}} \quad (22)$$

۴- نمو زمانی نیروی داخلی

فرمول بندی پیشنهادی برای گام زمانی، براساس نمو زمانی نیروی داخلی سازه انجام شد. بنابراین، باید روشی برای تعیین مقدار مزبور پیشنهاد شود. نیروی داخلی هر سازه،

$$\frac{\partial f_i^{n+\frac{1}{2}}}{\partial D_j^{n+\frac{1}{2}}} = S_{ij,T}^{n+\frac{1}{2}} \quad (29)$$

در این رابطه، زیر نویس T نشانگر ماتریس سختی مماسی است. چنانچه از رابطه (۲۳)، برحسب عاملهای تغییر مکان مشتق گیری شود، نتیجه زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial f_i^{n+\frac{1}{2}}}{\partial D_j^{n+\frac{1}{2}}} \approx \frac{\partial S_{ij,G}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial D_j^{n+\frac{1}{2}}} D_j^{n+\frac{1}{2}} + S_{ij,G}^{n+\frac{1}{2}} \quad (30)$$

این رابطه نیز با فرض مشابه عبارت (۲۸) به دست آمد. از مساوی قرار دادن رابطه های (۲۹) و (۳۰)، نتیجه زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial S_{ij,G}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial D_j^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{S_{ij,T}^{n+\frac{1}{2}} - S_{ij,G}^{n+\frac{1}{2}}}{D_j^{n+\frac{1}{2}}} \quad (31)$$

اکنون با جایگذاری رابطه (۳۱)، در تابع (۲۸)، نمو زمانی نیروی داخلی، در حالت غیرخطی محاسبه می شود. نتیجه به قرار زیر است:

$$\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \approx \sum_{j=1}^q S_{ij,T}^{n+\frac{1}{2}} \dot{D}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (32)$$

محاسبه ماتریس سختی مماسی در میان گام دشوار است، از این رو در رابطه (۳۲)، از مقدارهای گام پیشین استفاده می شود. در این صورت، رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \approx \sum_{j=1}^q S_{ij,T}^n \dot{D}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (33)$$

چنانچه درایه های ماتریس سختی وتری، به طور صریح در دست باشند، در این صورت، از رابطه (۲۷)، مقدار دقیقتری برای نمو زمانی نیروی داخلی می توان محاسبه کرد.

رابطه های پیشنهادی برای گام زمانی، برحسب عاملهای نیروی نامیزان و سرعت های گرهی نوشته شده

مشکل اصلی این رابطه، تعیین مشتق زمانی ماتریس سختی وتری است. به بیان دیگر، ماتریس مزبور در رفتار غیرخطی، به طور صریح در دست نیست، لذا وجود عاملهای مزبور و مشتقهای آن، فرایند حل را دشوار می کند. برای برطرف کردن این مشکل، از ماتریس سختی مماسی استفاده می شود. در این قسمت، از قانون مشتق زنجیره ای استفاده شده و عاملهای تغییر مکان، جایگزین گام زمانی خواهند شد. در این صورت، رابطه زیر حاصل می شود:

$$\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^q \left[\left(\frac{\partial S_{ij,G}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial D_k^{n+\frac{1}{2}}} \dot{D}_k^{n+\frac{1}{2}} \right) D_j^{n+\frac{1}{2}} + S_{ij,G}^{n+\frac{1}{2}} \dot{D}_j^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (27)$$

شایان توجه است که رابطه (۲۷)، کلی و دقیق است. از سوی دیگر، می توان با استفاده از یک فرض منطقی، تابع مزبور را ساده کرد. برای انجام این منظور، از تعریف درایه ij ماتریس سختی استفاده می شود. یاد آوری می شود که عامل S_{ij} ، همان نیرو در درجه آزادی i ام، به سبب تغییر مکان یکه در درجه آزادی j ام است، هنگامی که فقط درجه آزادی j ام، حرکت دار باشد. با فرض اینکه تغییر مکان درجه آزادی j ام، بیشترین اثر را بر درایه S_{ij} ماتریس سختی داشته باشد، می توان نوشت:

$$\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \approx \sum_{j=1}^q \left[\frac{\partial S_{ij,G}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial D_j^{n+\frac{1}{2}}} D_j^{n+\frac{1}{2}} + S_{ij,G}^{n+\frac{1}{2}} \right] \dot{D}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (28)$$

در اینجا، مشتقهای تغییر مکانی درایه های ماتریس سختی، مجهول است. برای تعیین این مقادیر، از رابطه بین ماتریس سختی مماسی و وتری استفاده می شود. نخست با مشتق گیری از نیروی داخلی، برحسب تغییر مکانها، رابطه زیر به دست می آید:

با τ_{cr} مشخص می‌شود.

۵- مرتبه همگرایی

معیار سنجش روشهای مختلف تکراری، مرتبه همگرایی ریاضی آنها است. برای یافتن این معیار، راهکارهای گوناگونی وجود دارد. یکی از این روشها، استفاده از سری تیلور است. در این شیوه، نخست هر روش انتخابی را به صورت رابطه‌ای تکراری می‌نویسند و سپس با استفاده از سری تیلور، درجه نخستین مشتق مخالف صفر را به عنوان مرتبه همگرایی در نظر می‌گیرند. اکنون فرض می‌شود که معادله غیرخطی زیر در دست باشد [۸]:

$$F(D) = 0 \quad (35)$$

در هر مرحله از فرایندهای تکراری، تقریبی از ریشه حقیقی به دست می‌آید. بنابراین رابطه تکراری مزبور را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$D^{n+1} = g(D^n) \quad (36)$$

در این رابطه، g تابعی فرضی است که از مشخصه‌های فرایند حل به دست می‌آید. افزون بر این، D^n و D^{n+1} ، تقریبهای پاسخ در گامهای n و $(n+1)$ ام، است. چنانچه α ، پاسخ حقیقی معادله (۳۵) باشد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$D^n = \alpha + \varepsilon^n \quad (37)$$

در اینجا، ε^n مقدار خطا در گام n ام است. اکنون با در نظر گرفتن مقدار خطا در دو گام پیاپی و نیز استفاده از رابطه‌های (۳۶) و (۳۷)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha + \varepsilon^{n+1} = g(\alpha + \varepsilon^n) \quad (38)$$

در این رابطه، ε^{n+1} مقدار خطا در گام $(n+1)$ ام است. در ادامه، با فرض مشتق پذیر بودن g و استفاده از دنباله تیلور، رابطه (۳۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

است. بنابراین با داشتن مقادیر مزبور، عامل زمانی محاسبه می‌شود. از سوی دیگر، سنجش فرایند حل در روش رهایی پویا، با دو عامل نیروی نامیزان و کارمایه جنبشی انجام می‌شود. کارمایه جنبشی، با توان دوم سرعتهای گرهی متناسب است. اکنون فرض می‌شود که همگرایی به پاسخ، در مرحله‌های پایانی قرار دارد. به بیان دیگر، کمتهای نیروی نامیزان یا سرعتهای گرهی، به سمت صفر میل می‌کنند. مقادیر مزبور، در صورت و مخرج یک عبارت قرار دارند. چنانچه نیروی نامیزان به سمت صفر میل کند و ضریبهای سختی سازه نیز مقادیر بزرگی داشته باشند؛ در این صورت، گام زمانی رابطه (۱۹)، به سمت صفر می‌گراید. از سوی دیگر، کوچک بودن عاملهای سختی سازه و نیز به سمت صفر میل کردن سرعتهای گرهی، سبب می‌شود که مقدار عددی گام زمانی رابطه (۱۹)، بسیار بزرگ شود.

بر این اساس، اندازه‌های عددی هر مسأله، اثر قابل توجهی بر فرایند پیشنهادی دارد. برای برطرف کردن این مشکل، از خطای قابل قبول نیروی نامیزان و کارمایه جنبشی استفاده می‌شود. به بیان دیگر، چنانچه در رابطه پیشنهادی برای گام زمانی، مقدارهای مزبور جایگزین نیروی نامیزان و سرعتهای گرهی شوند، حد گام زمانی به دست می‌آید. در این فرایند، کمینه یا بیشینه مقدار گام زمانی، با توجه به بعد عددی سازه محاسبه می‌شود. به بیان دیگر، ضریبهای سختی موجود، بیشترین نقش را در تعیین مقدارهای مزبور ایفا می‌کنند. در ادامه، با جایگزینی نیروی نامیزان و سرعتهای گرهی توسط عاملهای خطا در رابطه (۱۹)، و ساده سازی آن می‌توان نوشت:

$$\tau_{cr} = \frac{e_R \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q S_{ij}}{e_K \left[\sum_{i=1}^q \left[\sum_{j=1}^q S_{ij} \right] \right]^2} \quad (34)$$

در این رابطه e_R و e_K به ترتیب، خطای نیروی نامیزان و کارمایه جنبشی دستگاه است. همچنین حد گام زمانی

از نگره گرشگورین به دست می‌آیند. افزون بر این، عامل میرایی توسط اصل ریلی و از رابطه (۷) محاسبه می‌شود. باید دانست که در راهکار مزبور، گام زمانی در تمام تکرارها ثابت بوده و برابر یک در نظر گرفته می‌شود. اکنون چنانچه این مقادارها برای سازه یک درجه آزادی به کار روند، رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$m = \frac{S_T}{4} \quad (43)$$

$$c^n = 4 \sqrt{\frac{S_G}{S_T}} \quad (44)$$

در این رابطه‌ها S_T و S_G ، به ترتیب سختی وتی و معامسی است. با جایگذاری رابطه‌های (۴۳) و (۴۴) در عبارت (۴۲)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$g(D) = D + \tau^{n+1} \left[\left(2 - 4 \sqrt{\frac{S_G}{S_T}} \right) \dot{D}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{8R^n}{S_T} \right] \quad (45)$$

در این رابطه، $\dot{D}^{n-\frac{1}{2}}$ سرعت گرهی در گام پیشین است از این رو، مقدار ثابتی دارد. با مشتق‌گیری از رابطه (۴۵)، برحسب عامل تغییر مکان و صفرکردن نیروی نامیزان، مقدار زیر به دست می‌آید:

$$g'(\alpha) = 1 - 4 \left[S_T \frac{\partial S_G}{\partial D} - S_G \frac{\partial S_T}{\partial D} \right] \frac{\left[\frac{S_T}{S_G} \dot{D}^{n-\frac{1}{2}} + (S_T)^2 \left(2 + 4 \sqrt{\frac{S_G}{S_T}} \right) \right]}{\left[S_T \left(1 + 2 \sqrt{\frac{S_G}{S_T}} \right) \right]^2} \bigg|_{\alpha} \quad (46)$$

در این رابطه α نشانگر پاسخ دستگاه می‌باشد. از سوی دیگر، تابع (۴۶) در حالت کلی مخالف صفر است.

$$\alpha + \varepsilon^{n+1} = g(\alpha) + \varepsilon^n g'(\alpha) + \frac{(\varepsilon^n)^2}{2!} g''(\alpha) + \dots + \frac{(\varepsilon^n)^m}{m!} g^{(m)}(\alpha) + \dots \quad (39)$$

از سوی دیگر، برای نقطه $D = \alpha$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$\alpha = g(\alpha) \quad (40)$$

با جایگذاری رابطه (۴۰) در دنباله (۳۹)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n g'(\alpha) + \frac{(\varepsilon^n)^2}{2!} g''(\alpha) + \dots + \frac{(\varepsilon^n)^m}{m!} g^{(m)}(\alpha) + \dots \quad (41)$$

از رابطه (۴۱)، برای تعیین مرتبه همگرایی استفاده می‌شود. شایان توجه است که درجه نخستین مشتق مخالف صفر تابع g را به عنوان مرتبه همگرایی در نظر می‌گیرند. باید دانست که مرتبه همگرایی هر یک از شیوه‌ها، برای سازه با یک درجه آزادی تعیین می‌شود. در ادامه، برای سنجش مرتبه همگرایی فرایند رهایی پویا، از روش پیشین استفاده خواهد شد. در این روش نخستین کار، معرفی تابع تکراری g است. با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳)، تابع g در روش رهایی پویا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g(D) = D + \tau^{n+1} \left[\frac{2 - c^n \tau^n}{2 + c^n \tau^n} \dot{D}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^n}{(2 + c^n \tau^n)m} R^n \right] \quad (42)$$

چنانچه عامل‌های روش رهایی پویا در رابطه (۴۲) جایگزین شود، رابطه نهایی برای تعیین مرتبه همگرایی به دست می‌آید. در ادامه، چند دسته از فرایندهای رهایی پویا، بررسی می‌شود.

راهکار زانگ، یکی از متداولترین و پایدارترین روشهای رهایی پویا است [۴]. در این فرایند، مقادیر جرم

$$g'(D) = -\frac{R^n \frac{\partial S_T}{\partial D}}{(S_T)^2} \quad (50)$$

از سوی دیگر، نیروی نامیزان در نقطه α ، برابر صفر است. بنابراین، مشتق مرتبه یکم صفر می‌شود. به بیان دیگر، می‌توان نوشت:

$$g'(\alpha) = 0 \quad (51)$$

با مشتق‌گیری دوباره از رابطه (50)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$g''(\alpha) = \frac{R^n \left[\frac{\partial^2 S_T}{\partial D^2} S_T - 2 \left(\frac{\partial S_T}{\partial D} \right)^2 \right] - (S_T)^2 \frac{\partial S_T}{\partial D}}{(S_T)^3} \Bigg|_{\alpha}$$

با صفر شدن نیروی نامیزان در نقطه α ، مشتق مرتبه دوم، به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$g''(D) = \frac{\frac{\partial S_T}{\partial D}}{S_T} \Bigg|_{\alpha} \quad (53)$$

در حالت کلی، رابطه (53) مخالف صفر است. بنابراین، مرتبه همگرایی راهکار پیشنهادی در رفتار غیرخطی، دو است. اکنون، چنانچه رفتار سازه خطی فرض شود؛ در این صورت، سختی مماسی در طول تحلیل ثابت خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial S_T}{\partial D} = \frac{\partial^2 S_T}{\partial D^2} = \dots = \frac{\partial^m S_T}{\partial D^m} = \dots = 0 \quad (54)$$

با توجه به رابطه‌های (53) و (54)، می‌توان دریافت که مشتق مرتبه دوم در حالت خطی برابر صفر می‌شود. از سوی دیگر، رابطه (52) تابعی از عاملهای نیروی نامیزان، سختی مماسی و مشتقهای آن است. بنابراین، چنانچه از رابطه مزبور بر حسب تغییر مکان مشتق‌گیری شود، نتیجه

بنابراین مرتبه همگرایی فرایند زانگ در رفتار غیرخطی برابر یک است. اکنون چنانچه رفتار خطی مورد توجه قرار گیرد، سختیهای مماسی و وتری، با یکدیگر برابر خواهند بود و مقدار آنها در طول تحلیل ثابت است. از این رو، با فرض مزبور، رابطه (46) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$g'(\alpha) = -\frac{1}{3} \quad (47)$$

با توجه به رابطه (47)، نخستین مشتق مخالف صفر است. بنابراین مرتبه همگرایی روش زانگ در حالت خطی نیز برابر یک است. خاطر نشان می‌شود که گامهای محاسباتی روش آندروود نیز به فرایند زانگ، بسیار نزدیک است. به بیان دیگر، تنها عامل میرایی به شکل متفاوتی وارد می‌شود. از این رو، می‌توان عملیات (52) مشابهی را برای روش آندروود انجام داد. پس از محاسبه لازم، مرتبه همگرایی روش مزبور در حالت خطی و غیرخطی، برابر یک به دست می‌آید.

در راهکار پیشنهادی، گام زمانی از رابطه (19) به دست می‌آید. در این صورت، چنانچه سازه با یک درجه آزادی به کار رود، رابطه زیر برای گام زمانی نتیجه می‌شود:

$$\tau^{n+1} = \frac{R^n}{S_T \dot{D}^{n+\frac{1}{2}}} \quad (48)$$

اکنون، با جایگذاری رابطه (48)، در تابع (42) و ساده‌کردن آن، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

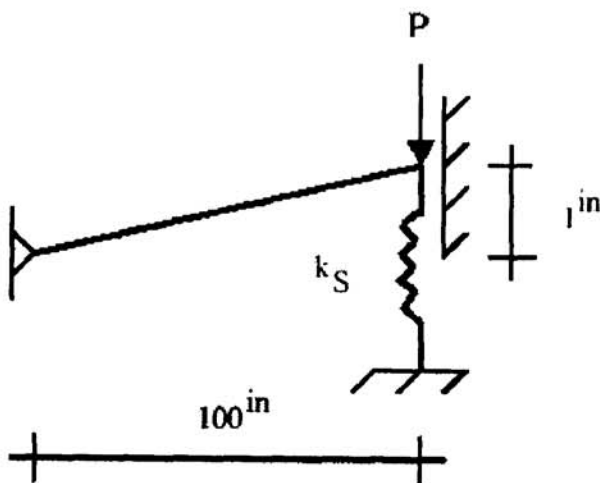
$$g(D) = D + \frac{R^n}{S_T} \quad (49)$$

در این رابطه، R^n ، نیروی نامیزان در گام n ام و S_T ، سختی مماسی است. با مشتق‌گیری از رابطه (49) و ساده کردن آن، نتیجه زیر به دست می‌آید:

است. بنابراین فرایند حل با یک حدس نخستین آغاز می‌شود. راهکارهای گوناگونی برای تعیین این مقدار اولیه پیشنهاد شده است [۴،۵،۹]. در اینجا برای سادگی، حدس نخستین تغییر مکان در نمو آغازین، برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. در نمودار بعدی، از نقطه تعادلی گام پیشین به عنوان حدس نخستین استفاده می‌شود. همچنین از نسبت نیروی نامیزان به بارهای وارد به سازه، به عنوان معیار همگرایی استفاده می‌شود. مقدار خطای مجاز این عامل با نشانه e_R مشخص می‌شود. e_K خطای مجاز کارمایه جنبشی دستگاه را نشان می‌دهد. در ادامه، تعدادی سازه خرابایی با چهار روش مزبور تحلیل می‌شوند.

۶-۱- خرابای فنری خیزدار

این سازه ترکیبی از فنر و یک عضو خرابایی است که فقط یک درجه آزادی دارد [۷]. سازه مزبور در شکل ۱ مشخص شده است.



شکل ۱ خرابای فنری خیزدار

از سوی دیگر، رابطه‌های زیر برای نیروی داخلی و سختی مماسی سازه مزبور به کار می‌رود:

نیز تابعی از عاملهای یاد شده می‌باشد. به بیان دیگر، در حالت خطی، تمامی مشتق‌های بالاتر رابطه (۵۲) صفر می‌شوند. از این رو، مرتبه همگرایی در حالت مزبور، پینهایت است. یکی از ویژگیهای فرایند پیشنهادی این است که مرتبه همگرایی، مستقل از مقادیر جرم و عامل میرایی است. به بیان دیگر، گام زمانی پیشنهادی، به تنهایی فرایند رهایی پویا را بهبود می‌دهد.

۶- مثالهای عددی

بر اساس فرمولبندی این مقاله، نویسندگان برنامه‌ای رایانه‌ای با نام DRT نوشته‌اند. این برنامه، برای تحلیل خراباهای مستوی و فضایی با رفتار غیرخطی هندسی به کار می‌رود و بر روش اجزای محدود استوار است. در این تحلیل، با استفاده مستقیم از ماتریسهای سختی عضو خرابایی، تغییر مکانهای گرهی سازه به دست می‌آید. برای تحلیل هر سازه، چهار روش در نظر گرفته می‌شود.

نخستین روش بر گامهای محاسباتی زانگ منطبق است. در این شیوه، جرم از نگره گرشگورین و میرایی از رابطه (۷) انتخاب و گام زمانی برابر یک فرض می‌شود [۴]. این راهکار با نشانه Zh نشان داده می‌شود.

در دومین روش از گام زمانی پیشنهادی استفاده می‌شود. رابطه (۱۹) این مقدار را مشخص می‌کند. البته جرم از نگره گرشگورین و میرایی از رابطه (۷) به دست می‌آید. نشانه NTZ ، این روش را مشخص می‌کند.

سومین راهکار بر گامهای محاسباتی آندروود منطبق است. در این فن، جرم از نگره گرشگورین و میرایی از رابطه (۸) انتخاب و گام زمانی برابر یک اختیار می‌شود [۶]. این روش با نشانه Un مشخص می‌شود.

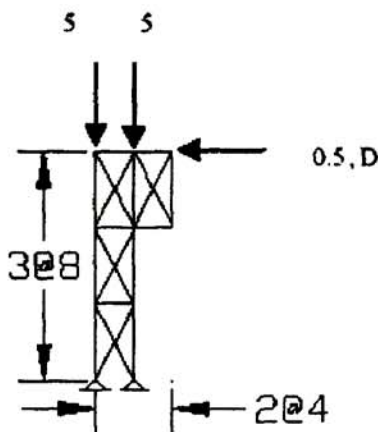
در چهارمین روش نیز از گام زمانی پیشنهادی استفاده می‌شود. برای این کار، رابطه (۱۹) به کار می‌رود. همچنین ماتریس جرم از نگره گرشگورین و میرایی از رابطه (۸) به دست می‌آید. نشانه NTU ، این روش را مشخص می‌کند. روش رهایی پویا عضوی از خانواده روشهای تکراری

جدول ۲ تکرارهای نموی خرابای طره ای ۶ عضوی

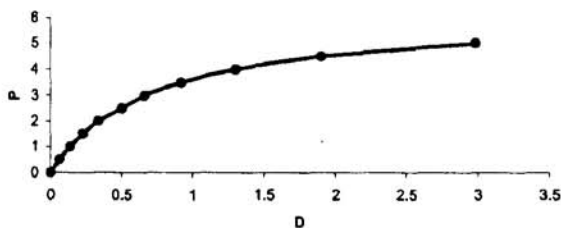
نوع	نم										مجموع
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
Zh	۶۶	۶۲	۵۰	۴۳	۴۳	۴۵	۴۹	۵۷	۶۷	۸۳	۵۶۵
NTZ	۵۸	۵۳	۴۶	۴۲	۴۱	۴۳	۴۸	۵۵	۶۲	۶۶	۵۱۴
Un	۶۳	۵۶	۵۷	۵۵	۵۳	۵۲	۵۱	۴۷	۵۸	۶۲	۵۵۴
NTU	۴۵	۴۷	۵۱	۴۵	۴۴	۴۷	۵۰	۵۱	۵۴	۱۰۷	۵۴۱

جدول ۳ تکرارهای نموی دکل خرابایی ۲۰ عضوی

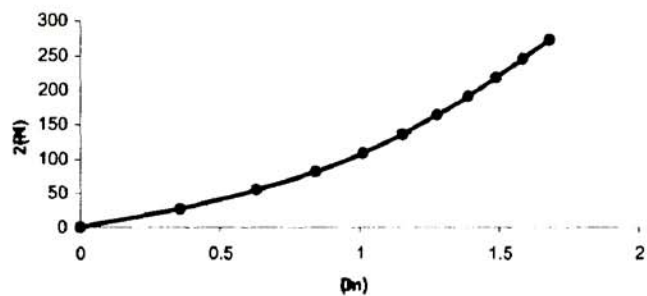
نوع	نم										مجموع
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
Zh	۳۱۲	۱۶۰	۱۲۳	۱۰۶	۱۰۰	۹۷	۱۰۱	۱۱۱	۱۳۰	۱۷۱	۱۴۱۱
NTZ	۲۶۷	۱۴۱	۱۱۷	۱۰۳	۸۷	۸۵	۹۹	۱۱۰	۱۲۶	۱۶۴	۱۲۹۹
Un	۱۰۶	۷۴	۶۴	۶۷	۶۵	۶۹	۶۹	۷۵	۸۵	۱۰۴	۷۷۸
NTU	۱۳۲	۸۰	۶۲	۶۱	۵۹	۵۰	۶۰	۶۷	۸۶	۱۰۲	۷۵۹



شکل ۵ دکل خرابایی ۲۰ عضوی



شکل ۶ مسیر ایستایی دکل خرابایی ۲۰ عضوی



شکل ۴ مسیر ایستایی خرابای طره ای ۶ عضوی

۳-۶- دکل خرابایی ۲۰ عضوی

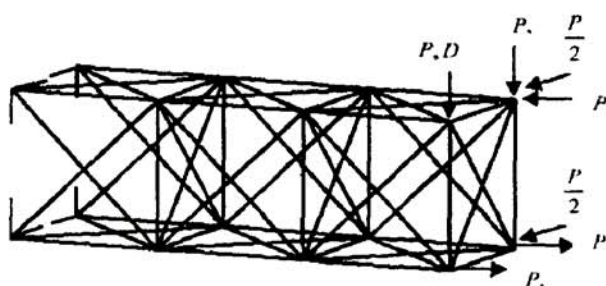
شکل ۵ این سازه خرابایی ۲۰ عضوی را که ۱۶ درجه آزادی دارد، نشان می‌دهد. اندازه‌ها و بارها بدون یکا است. ضریب λ بین ۱ تا ۱۰ تغییر می‌کند. ثابتهای تحلیل عبارت است از: $AE = ۳۸۵۰$ ، $e_R = ۵ \times 10^{-۳}$ و $e_K = 10^{-۶}$. نشانه D درجه آزادی مبنا را مشخص می‌کند. در جدول ۳، تعداد تکرارهای تحلیل این سازه آورده شده است. مسیر ایستایی سازه مزبور برای درجه آزادی مبنا، در شکل ۶ آورده شده است.

۶-۴- خرابی طره ای ۵۴ عضوی

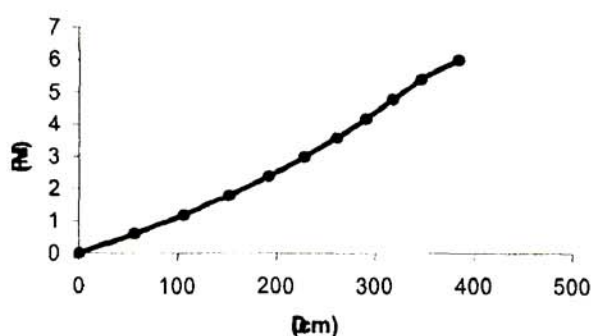
تعداد درجه های آزادی در این خرابی سه بعدی ۳۶ است. شکل ۷ مشخصه های این سازه را نشان می دهد [۱۰].

در این سازه تمامی دهانه ها برابر ۴۰۰۰ میلی متر است و λ بین ۱ تا ۱۰ تغییر می کند. مشخصه های دیگر این سازه به فرار زیر است: $P = 6 \times 10^6$ نیوتن، $AE = 6 \times 10^7$ نیوتن، $e_R = 10^{-4}$ و $e_K = 10^{-12}$ نشانه D درجه آزادی مبنا را مشخص می کند.

تعداد تکرارهای تحلیل روشهای مختلف در جدول ۴ آورده شده است. شکل ۸ مسیر ایستایی سازه مزبور را در درجه آزادی مبنا نشان می دهد.



شکل ۷ خرابی طره ای ۵۴ عضوی



شکل ۸ مسیر ایستایی خرابی طره ای ۵۴ عضوی

معیارهایی معرفی می شود.

نخستین عامل، استفاده از کمیت مجموع تکرارهای نموی در سازه های گوناگون است. برای این کار، در هر روش، تعداد تکرارهای لازم برای پیمایش مسیر ایستایی حساب می شود. نشانه A، این کمیت را مشخص می کند. دومین معیار، استفاده از مجموع حاصلضرب تعداد تکرارها در درجه آزادی سازه است. این مقدار با شمار درجه های آزادی سازه، رابطه ای مستقیم دارد. به بیان دیگر، سازه های بزرگ بیشترین اثر را بر کمیت مزبور دارند. این عامل، با نشانه B مشخص می شود.

سومین معیار، میانگین حسابی خارج قسمت تقسیم تکرارها بر تعداد درجه های آزادی سازه است. این کمیت، با تعداد درجه های آزادی رابطه وارون دارد. بنابراین سازه های کوچک و متوسط، بیشترین نقش را در بهبود عامل مزبور بازی می کنند. برای تعیین این کمیت، مجموع تکرارها، بر تعداد نمو های بارگذاری و درجه آزادی سازه تقسیم می شود. سپس میانگین حسابی آنها محاسبه می شود. نشانه C، این کمیت را مشخص می کند. جدول ۵ مقدار این سه معیار را برای سازه های تحلیل شده نشان می دهد.

برای مشخص کردن نقش گام زمانی بهبود یافته در فرایند رهایی پویا، روش Zh با NTZ، مقایسه می شود. همچنین مقایسه ای بین دو راهکار Un و NTU انجام می دهیم. برای این کار، میزان بهبود معیارهای سنجش شده مشخص می شود. این مقادارها در جدول ۶ به صورت درصدی درج شده است.

بررسی جدولهای ۵ و ۶ نشان می دهد که استفاده از گام زمانی پیشنهادی، تعداد تکرارهای همگرایی را در روش رهایی پویا کاهش می دهد. تحلیل دیگر سازه ها نیز، به نتیجه های مشابهی منجر می شود.

برای ارزیابی روشهای قبلی و روش پیشنهادی، از کمیت مجموع تکرارهای نموی استفاده می شود. بررسی کمیت مزبور، بهبود نرخ همگرایی را در روش رهایی پویا نشان می دهد. برای اینکه میزان این بهبود مشخص شود،

جدول ۴ تکرارهای نموی خرابی طره ای ۵۴ عضوی

نوع	نمو										تعداد
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
Zh	۱۱۵	۸۹	۸۲	۷۷	۷۴	۷۵	۸۰	۹۳	۱۱۶	۱۳۲	۹۳۳
NTZ	۵۸	۴۸	۴۶	۴۵	۴۳	۴۳	۴۴	۴۵	۴۷	۵۳	۴۷۲
Un	۸۶	۹۱	۸۲	۷۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۷	۹۱	۸۲	۷۹۷
NTU	۴۹	۴۸	۵۲	۵۱	۴۸	۴۳	۴۴	۵۶	۶۰	۵۳	۵۰۴

جدول ۵ سنجش روشهای پیشنهادی با روشهای قبلی

نوع	معیار		
	A	B	C
Zh	۳۱۵۷	۵۹۸۰۲	۱۰/۳۷
NTZ	۲۳۷۶	۴۰۹۵۱	۶/۳۹
Un	۲۳۷۹	۴۴۷۱۴	۹/۲۹
NTU	۱۸۹۵	۳۳۶۲۵	۵/۶۹

جدول ۶ اثر گام زمانی پیشنهادی در روشهای زانگ و آندروود

روشهای سنجش شده	معیار		
	A	B	C
بهبود روش زانگ بر اثر استفاده از گام زمانی پیشنهادی (%)	۲۴/۷۴	۳۱/۵۲	۳۸/۳۸
بهبود روش آندروود بر اثر استفاده از گام زمانی پیشنهادی (%)	۲۰/۳۴	۲۴/۸۰	۳۸/۷۵

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، رابطه‌سازی نوینی برای گام زمانی در روش رهایی پویا پیشنهاد شد. رابطه‌سازی مزبور، از کمینه سازی نیروی نامیزان سازه به دست آمد. ارزیابی ریاضی روشهای قبلی و پیشنهادی، با معرفی مرتبه همگرایی صورت گرفت. بر این اساس، استفاده از گام زمانی بهبود یافته، مرتبه همگرایی روش رهایی پویا را در حالت خطی به بینهایت و در رفتار غیرخطی، به دو افزایش می‌دهد. از سوی دیگر، برای ارزیابی عددی، تعدادی سازه خرابی در رفتار غیرخطی هندسی تحلیل شد. تحلیل مزبور اثر گام زمانی پیشنهادی را در فرایند رهایی پویا آشکار می‌کند.

به دلیل حجم محدود مقاله، درج کردن همه تجربه‌های عددی امکان‌پذیر نیست، اما نتیجه‌های عددی، کارایی گام زمانی پیشنهادی را در بهبود نرخ همگرایی روش رهایی پویا نشان می‌دهد.

۸- منابع

- [1] Fellipa, C.A.; "Nonlinear Finite Element Methods (ASEN 5017)"; Chapter 11; Explicit Dynamic Relaxation; Course Material; 1997.
- [2] Frankel, S.P.; "Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential

- Amsterdam; 1983; pp 245-256.
- [7] Shizhong Qiang; "*An Adaptive Dynamic Relaxation Method for Non-Linear Problems*"; *Comput.Struc.*; Vol.30; No.4; 1988; pp 855-859.
- [8] Murphy, J.; Ridout, D.; Mc-Shane, B.; "*Numerical Analysis Algorithms and Computation*"; Ellis Horwood Limited; 1988.
- [9] Alwar, R.S.; Ramachandra Rao, N.; Subba Rao, M.; "*An Alternative Procedure in Dynamic Relaxation*"; *Comput.Struc.*; Vol.5; 1975; pp 271-274.
- [۱۰] مهدیان، محمد؛ "بهینه‌سازی شکل خرپاها با چند روش جستجوی ارثی"؛ پایان نامه کارشناسی ارشد سازه؛ دانشکده مهندسی؛ دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۱۳۷۵.
- Equations*"; *Mathl. Tabl. Natn. Coun.*; Washington; Vol.4; 1950; pp 65-75.
- [3] Bardet, J.P.; Proubet, J.; "*Adaptive Dynamic Relaxation for Statics of Granular Materials*"; *Comput.Struc.*; Vol.39; No.3/4; 1991; PP 221-229.
- [4] Zhang, L.C.; Yu, T.X.; "*Modified Adaptive Dynamic Relaxation Method and Its Application to Elastic-Plastic Bending and Wrinkling of Circular Plates*"; *Comput.Struc.*; Vol.34; No.2; 1989; pp 609-614.
- [5] Zhang, L.C.; Kadkhodayan, M.; Mai, Y.W.; "*Development of the maDR Method*"; *Comput.Struc.*; Vol.52; No.1; 1994; pp 1-8.
- [6] Underwood, P.; "*Dynamic Relaxation, in Computational Method for Transient Analysis*"; Chapter 5; Elsevier,