قضیه ۱: فرض کنید R یک حلقه متناهی و p یک عدد اول ($p \leq 7$) باشد، عدد خوشه ای R.
$\omega(R)=3p$ اگر و تنها اگر R یکریخت است با

$R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_p$ $\quad 3 \leq p \leq 7$

$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_p$ $\quad 3 \leq p \leq 7$

$R \cong \mathbb{Z}_p \times R_2$ $\quad |R_2| = 9$ موضعی غیر میدان $3 \leq p \leq 5$

اثبات) فرض کنید $\omega(R)=3p$ است، بنابراین بزرگترین زیرگراف کامل از مرتبه $3p$ است. R میدان نیست زیرا طبق قضایای قبلی عدد خوشه ای میدان ها حداکثر یک یا دو است. که در اینجا $\omega(R)=3p$ ($2 \leq p \leq 7$) است که میدان نیست. لذا به دو صورت بررسی می کنیم.

حالت اول: R حلقه موضعی غیر میدان باشد و $\omega(R)=3p$ همچنین M ایده آل ماکسیمال از حلقه R باشد، طبق قضیه (۲.۱) داریم که $|M|=\omega(R)=3p$

پس $|M|=3p$، از طرفی هم طبق قضیه (۴.۱) داریم که

$$|M| = p^{r(s-1)} \Rightarrow |M| = 3p$$

$$|R| = p^{rs}$$

چون مرتبه M توانی از یک عدد اول نیست لذا R حلقه موضعی نیست.

حالت دوم) فرض کنید R حلقه غیرموضعی باشد که به صورت حاصل ضرب حلقه های موضعی نوشته می شود.

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_t$$

ادعا می کنیم که $t \geq 6$ نمی تواند باشد.

برهان خلف) فرض کنید که $t \geq 6$ باشد. از حلقه فوق یک خوشه به فرم $\{0\} \times R_2 \times \cdots \times R_t$ جدا کنیم می دانیم که برای هر i، اندازه مرتبه R_i حداقل ۲ است.

$$|\{0\} \times R_1 \times \cdots \times R_t| \geq 2^{t-1} \xrightarrow{t=6} 2^5 = 32$$

$$w(\mathbb{Z}_2\times R_2\times R_3\times R_4)=|R_2\times R_3\times R_4|=3p \quad *$$

رابطه (*) برقرار نیست زیرا طرف چپ حاصل ضرب سه عدد بزرگتر از یک است و طرف راست حاصل ضرب دو عدد است لذا برقرار نیست.

فرض کنید وجود داشته باشد $i=1,2,3,4$ که باشد به طوری که $|R_i|\geq 3$ باشد

$$R\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$$

$$w(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)=27$$

چون عدد فوق بزرگتر از فرض مسأله است لذا برقرار نیست.

$t=3$

فرض کنید $t=3$ باشد، یعنی $R\cong R_1\times R_2\times R_3$ باشد بدون کاستن از کلیت مسأله فرض کنید که $|R_1|\leq|R_2|\leq|R_3|$

فرض کنید برای $i=2,3$ هر تنها یکی از R_i ها مثلا $|R_1|\geq 2$ باشد. وجود داشته باشد $i=2,3$ باشد به طوری که $|R_i|\geq 3$ باشد.

$$R\cong\mathbb{Z}_2\times R_2\times R_3$$

$$\Rightarrow w(\mathbb{Z}_2\times R_2\times R_3)=|R_2\times R_3|=3p \quad *$$

برای اینکه رابطه (*) برقرار باشد چون $|R_2|\leq|R_3|$ است پس $|R_2|=3$ و تنها حلقه‌ای که از مرتبه ۳ و یکدار است حلقه $\mathbb{Z}_3$ است و $|R_3|=p$ چون p عدد اول است لذا R_3 یکریخت با $\mathbb{Z}_p$ است.

$$R\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_p \qquad 3\leq p\leq 7$$

فرض کنید وجود داشته باشد ۲،۳ و ۳تا مرتبه ۳ از |R| باشد.

$$R \cong \mathbb{Z}_3 \times R_2 \times R_3$$

فرض کنید که مرتبه ۸ = $|R_3|$ باشد و $|R_2| = 3$ باشد ابتدا

$$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times R_3$$

یک نتیجه از حلقه $\omega(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times M_3) = 36$ که عدد فرد نیست بزرگتر از مرتبه است پس حلقه مرتبه ۷ ≥ $|R_3|$ است،

$$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 \\ F_4 \\ R_4 \\ \mathbb{Z}_5 \end{pmatrix} \times \mathbb{Z}_7 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \checkmark \\ \mathbb{Z}_3 \times F_4 \times \mathbb{Z}_7 \rightarrow \omega(\ ) = 28 \times \\ \mathbb{Z}_3 \times R_1 \times \mathbb{Z}_7 \rightarrow \omega(\ ) = 42 \times \\ \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \rightarrow \omega(\ ) = 35 \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7} \checkmark \Rightarrow \omega(R) = |\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7| = 3 \times 7$$

$$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_3 \\ F_4 \\ R_1 \\ \mathbb{Z}_5 \end{pmatrix} \times \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \omega(\ ) = 15 = 3p \\ \times\ \mathbb{Z}_3 \times F_4 \times \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \omega(\ ) = 20 \neq 3p \\ \times\ \mathbb{Z}_3 \times R_1 \times \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \omega(\ ) = 30 \\ \times\ \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \omega(\ ) = 25 \end{cases}$$

$$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \omega(R) = |\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5| = 3 \times 5 = 3p$$

$$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 \\ F_4 \\ R_4 \end{pmatrix} \times R_3 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times R_3 \Rightarrow \omega(\ ) = 18 \neq 3p \\ \mathbb{Z}_3 \times F_4 \times R_3 \Rightarrow \omega(\ ) = 24 \neq 3p \\ \mathbb{Z}_3 \times R_2 \times R_3 \Rightarrow \omega(\ ) = 12 \neq 3p \\ |R_2| = 4 \end{cases}$$

$|R_2| = 4$

موضوع میدان

$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \Rightarrow w(R) = 9 = 3p \quad *$

رابطه * برقرار باشد ~~[illegible]~~ چون $|R_2| \le |R_3|$ است لذا $w(R) = 3p$
پس $|R_2| = 3$ و تنها حلقه‌ای که از مرتبه ۳ است حلقه موضعی $\mathbb{Z}_3$ است لذا

$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

نتیجه گیری:

فرض کنید که وجود داشته باشد $i = 1, 2, 3$ به طوری که مرتبه $|R_i| \le 3$ باشد. بدون کاستن از کلیت
$|R_1| \le |R_2| \le |R_3|$ باشد به طوری که

$R \cong \mathbb{Z}_3 \times R_2 \times R_3$

حالت اول: فرض کنید R_2 و R_3 هر دو میدان باشند که $|R_2| \le |R_3|$

$R \cong \mathbb{Z}_3 \times R_2 \times R_3 \Rightarrow w(R) = |R_2 \times R_3| = 3p \quad *$

برای اینکه رابطه $(*)$ برقرار باشد باید مرتبه $|R_2| = 3$ باشد و تنها حلقه‌ای که از مرتبه ۳ و موضعی است حلقه $\mathbb{Z}_3$ است است و $|R_3| = p$ باشد و $p \le 7$ است پس داریم

$R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_p \qquad 3 \le p \le 7$

فرض کنید که وجود داشته باشد $i = 1, 2, 3$ به طوری که مرتبه $|R_i| \ge 4$ باشد بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم که $|R_1| \le |R_2| \le |R_3|$

$|R_1| = |R_2| = |R_3| = 4$
موضعی غیر میدان

$R \cong R_1 \times R_2 \times R_3$

X $w(R) = 32 \ne 3p$

$R \cong F_4 \times F_4 \times F_4$

X $w(R) = 12 \ne 3p$

$R \cong F_4 \times F_4 \times \mathbb{Z}_5 \Rightarrow w(R) = 20 \ne 3p$

۲ باشد

فرض کنید $t=2$ باشد یعنی $R \cong R_1 \times R_2$ بدون کاستن از کلیت مسأله فرض ما کنید که $|R_1| \leq |R_2|$ است.

فرض کنید که مرتبه یکی از R_i مثلا $|R_1| \geq 2$ باشد و $\exists i = 2$ باشد به طوریکه $|R_i| \geq 3$ باشد.

حالت اول

$$R \cong \mathbb{Z}_2 \times R_2 \Rightarrow w(\mathbb{Z}_2 \times R_2) \neq |R_2| = 3p$$

رابطه * برقرار نیست زیرا R_2 یک حلقه غیر موضعی است که تناقض با فرض است.

حالت اول فرض کنید وجود داشته باشد i به طوریکه مرتبه $|R_1| \geq 3$ باشد.

$$R \cong \mathbb{Z}_q^{\alpha} \times R_2$$

فرض کنید R_2 حلقه موضعی غیرمیدان باشد طبق قضیه از قبل داریم

$$w(\mathbb{Z}_q^{\alpha} \times R_2) = \max\{|R_2|, q^{\alpha}|m_2|\} = 3p$$

(1) فرض کنید که $|R_2| = 3p$ بنابراین رابطه برقرار باشد که R_2 حلقه غیرموضعی است که تناقض با فرض است.

(2) فرض کنید که $q^{\alpha}|m_2| = 3p$ باشد پس

$\alpha = 1$ $\quad p = q$ $\quad |m_2| = 3$ $\quad |R_2| = 9$ موضعی غیرمیدان

$$\boxed{R \cong \mathbb{Z}_p \times R_2}$$

$|R_2| = 9$ موضعی غیرمیدان

$$3 < p \leq 7$$

حالت دوم: فرض کنید R_1 حلقه موضعی غیرمیدان و R_2 میدان باشد،
استدلال شبیه حالت اول است.

حالت سوم) فرض کنید که R_1 و R_2 هردو میدان باشند طبق قضیه از قبل داریم

$$R \cong R_1 \times R_2 \Rightarrow w(R_1 \times R_2) = \max\{|R_1|, |R_2|\} = 3p$$

۱) اگر فرض کنیم که $|R_1| = 3p$ باشد باید R_1 حلقه غیرموضعی باشد که تناقض با فرض است.

۲) 〃 〃 〃 $|R_2| = 3p$ 〃 〃 R_2 〃 〃 〃 〃
〃 〃 〃

حالت چهارم) فرض کنید که R_1 و R_2 هردو موضعی غیرمیدان باشند. طبق فرض داریم که $|R_1| \le 7$ و $|R_2| \le 7$ و چون R_1, R_2 موضعی غیرمیدان هستند لذا اولین حلقه موضعی غیرمیدان باشد $|R_1| \ge 4$ و $|R_2| \ge 4$

$R \cong R_1 \times R_2$ $\quad |R_1| = |R_2| = 4$ موضعی غیرمیدان

$$w(R_1 \times R_2) = 8 \neq 3p$$