

طراحی کنترل کننده مد لغزشی پایان دار مبتنی بر داده برای سیستم‌های غیر خطی گسسته زمان

ناهید ابراهیمی^۱، سجاد ازگلی^۲

^۱ دانشجوی دکترا مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، n.ebrahimimeymand@modares.ac.ir

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، ozgoli@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۱/۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۴/۵)

چکیده: در این مقاله کنترل کننده مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل برای کنترل سیستم‌های غیرخطی گسسته زمان پیشنهاد شده است. روش پیشنهادی یک روش مستقل از مدل است که تنها از داده‌های ورودی و خروجی استفاده می‌کند. این روش از سطح لغزش بازگشتی و غیرخطی استفاده می‌کند که منجر به دقت ردیابی بالاتری می‌شود. در این روش برای طراحی کنترل کننده از یک روش مبتنی بر داده موسوم به کنترل تطبیقی مستقل از مدل بهره گرفته شده است. تحلیل نظری، کران دار بودن خطای ردیابی و برتری روش پیشنهادی نسبت به روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل مبتنی بر سطح خطی را نشان می‌دهد. این نتایج توسط شبیه‌سازی‌های انجام شده نیز تأیید شده است.

کلمات کلیدی: کنترل مد لغزشی پایان دار، کنترل مبتنی بر داده، کنترل تطبیقی مستقل از مدل، کنترل مد لغزشی گسسته زمان

Design of Model Free Terminal Sliding Mode Control for Discrete Time Nonlinear Systems

Nahid Ebrahimi, Sadjaad Ozgoli

Abstract: A model free terminal sliding mode controller has been proposed. The proposed controller is data driven i.e. based only on input and output data (thus, model free). This method employs a recursive nonlinear sliding surface. This leads to higher tracking precision and to finite time convergence of the response. The method uses “Model Free Adaptive Controller” approach, combined with “Discrete time Sliding Mode Controller” method. Boundedness of tracking error is proved analytically. Theoretical analysis also shows the superiority of the proposed method over Model Free Linear Sliding Mode Controller. Analysis results are confirmed via simulation.

Keywords: Terminal Sliding Mode Control, Data Driven Control, Model Free Adaptive Control, Discrete time Sliding Mode Control.

مناسب، حالت‌های سیستم به روی آن همگرا شوند. این روش علی‌رغم مزایای اشاره شده، با مشکلاتی نیز همراه است. از اصلی‌ترین مشکلاتی که در این روش مطرح می‌شود می‌توان به همگرایی زمان نامحدود حالت‌ها و پدیده وزوز اشاره کرد. در دهه‌های اخیر برای حل این مشکلات صورت‌های دیگری از روش کنترل مد لغزشی از جمله روش کنترل مد لغزشی مرتبه بالا، روش کنترل مد لغزشی انتگرالی و روش

۱- مقدمه

روش کنترل مد لغزشی، یک روش ساده برای کنترل سیستم‌های خطی و غیرخطی است. این روش ویژگی‌های قابل توجهی در کنترل سیستم‌ها از جمله سادگی، قوام در برابر عدم قطعیت و اغتشاشات خارجی دارد. اساس طراحی یک کنترل کننده مد لغزشی با تعریف یک سطح لغزش همراه است که سعی می‌شود با استفاده از یک قانون کنترل

تغییرات ورودی ها و خروجی ها در لحظات قبل را در نظر می گیرد. از بین این روش ها روش FFDL کامل ترین صورت است [۱۴]. در حوزه طراحی کنترل کننده های مد لغزشی که تنها مبتنی بر داده باشند، مطالعات اندکی انجام شده است. قوی ترین کار انجام شده بر اساس روش کنترل تطبیقی مستقل از مدل در [۱۵] ارائه شده است. سطح لغزش در نظر گرفته شده در این روش یک سطح خطی است و طراحی کنترل کننده بر مبنای روش کنترل تطبیقی مستقل از مدل CFDL انجام شده است. در [۱۶] روشی مشابه روش ارائه شده در [۱۵] برای کنترل سرعت یک موتور خطی به کار گرفته شده است. این روش نیز برای طراحی کنترل کننده از سطح لغزش خطی و روش CFDL استفاده کرده است.

در این مقاله روش کنترل مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل بر مبنای روش کنترل تطبیقی مستقل از مدل طراحی می شود. سطح لغزش تعریف شده در این روش یک سطح لغزش بازگشتی و غیر خطی است. با استفاده از تحلیل های جبری نشان داده می شود که دقت ردیابی روش کنترل مد لغزشی پایان دار بیشتر از روش های کنترل مد لغزشی مبتنی بر سطوح خطی است. علاوه بر این، روش پیشنهادی برخلاف کارهای انجام شده تاکنون می تواند از صورت های پیچیده تر روش کنترل تطبیقی مستقل از مدل یعنی دو روش PFDL و FFDL استفاده کند، که این از جمله مزایای این روش است چرا که فرم CFDL در صورتی که سیستم واقعی از مرتبه بالایی برخوردار باشد و دینامیک پیچیده ای داشته باشد، ممکن است نتواند تخمین خوبی برای سیستم واقعی باشد. به منظور مقایسه روش پیشنهادی این مقاله با روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطوح خطی، نتایج شبیه سازی مربوط به روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطوح خطی نیز آورده شده است. نتایج شبیه سازی حاکی از کارایی و عملکرد مناسب روش پیشنهادی و بهبود پاسخ است. ساختار مقاله حاضر به این صورت است: در بخش (۲) فرمول بندی مسئله آورده شده است. در بخش (۳) توضیحات مربوط به روش کنترل مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل آورده شده است. نتایج شبیه سازی مربوط به روش پیشنهادی و مقایسه آن با روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطوح خطی در بخش (۴) ارائه شده است. در نهایت نتایج روش پیشنهادی در بخش (۵) جمع بندی شده است.

۲- فرمول بندی مسئله

یک سیستم تک ورودی- تک خروجی غیر خطی به طور کلی به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$y(k+1) = f(y(k), \dots, y(k-n_y)), \quad (1)$$

$$u(k), \dots, u(k-n_u))$$

کنترل مد لغزشی پایان دار^۱ مورد توجه محققان قرار گرفته است. روش کنترل مد لغزشی پایان دار از جمله روش هایی است که با استفاده از سطوح غیر خطی لغزش به جای سطوح خطی، همگرایی زمان محدود حالت ها را تضمین می کند [۱]. از سوی دیگر این روش از قوام بیشتر و دفع اغتشاش مؤثرتری برخوردار است. تاکنون مطالعات مختلفی در حوزه کنترل مد لغزشی هم به صورت پیوسته و هم به صورت گسسته انجام شده است. برای مثال در [۲، ۳] طراحی TSMC مرتبه دوم بررسی شده است. در [۴] کنترل TSMC مرتبه بالای پیوسته گسسته شده است. در [۵] TSMC بر پایه بازخورد خروجی برای سامانه های غیر خطی مرتبه دوم به کار گرفته شده است. در [۶] یک کنترل مد لغزشی پایان دار مرتبه دوم بر پایه بازخورد خروجی طراحی شده است. در [۷] کنترل کننده TSMC هوشمند بر مبنای یک سطح لغزش جدید برای کنترل آشوب به کار گرفته شده است. در [۸، ۹] کاربرد کنترل مد لغزشی پایان دار در سیستم های عملی ارائه شده است. در اکثر مطالعات انجام شده در این حوزه فرض بر این است که مدل سیستم مشخص است. در حالی که در بسیاری از مسائل عملی مدل دقیقی از سیستم در دسترس نیست یا مدل سازی فرایند دشوار است. برای حل این مشکل در طراحی کنترل کننده می توان به جای استفاده از مدل از روش های کنترل مبتنی بر داده بهره گرفت که تنها از داده های ورودی و خروجی استفاده می کنند.

روش های کنترل مبتنی بر داده^۲ به زیرشاخه های مختلفی از جمله روش کنترل ابطال نشده^۳ [۱۰]، روش کنترل یادگیری تکراری^۴ [۱۱]، روش تخمین همزمان انحراف تصادفی^۵ [۱۲] و روش کنترل تطبیقی مستقل از مدل^۶ [۱۳] تقسیم می شود. از بین این روش ها روش کنترل تطبیقی مستقل از مدل روشی است که تنها از داده های برخط استفاده می کند و نیازی به ساختار مشخص کنترل کننده ندارد. ایده اصلی این روش بر این مبنای است که به جای استفاده از مدل واقعی سیستم، از بردار شبه گرادیان استفاده می کند. این بردار تنها با استفاده از داده های ورودی و خروجی و در هر لحظه زمانی تخمین زده می شود [۱۳]. این روش بسته به پیچیدگی به سه روش کنترل تطبیقی مستقل از مدل به فرم بسته^۷ (CFDL)، کنترل تطبیقی مستقل از مدل به فرم جزئی^۸ (PFDL) و کنترل تطبیقی مستقل از مدل به فرم کامل^۹ (FFDL) تقسیم می شود. در روش CFDL فرض می شود خروجی سیستم تنها به مقدار سیگنال کنترل در دو لحظه قبل وابسته است. روش PFDL اثر سیگنال های کنترل در لحظات ماقبل را نیز لحاظ می کند و روش FFDL، وابستگی بین خروجی سیستم و

¹ Terminal Sliding Mode Control (TSMC)

² Data driven control

³ Unfalsified Control (UC)

⁴ Iterative Learning Control (ILC)

⁵ Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA)

⁶ Model Free Adaptive Control (MFAC)

⁷ Compact Form Dynamic Linearization

⁸ Partial Form Dynamic Linearization

⁹ Full Form Dynamic Linearization

$$\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k) = \Phi_{L_y, L_u}^T(k) \Delta H_{L_y, L_u}(k) + d(k) \quad (3)$$

که

$$\Phi_{L_y, L_u}(k) = [\phi_1(k), \phi_2(k), \dots, \phi_{L_y+1}(k), \dots, \phi_{L_y+L_u}(k)]^T$$

و

$$\Delta H_{L_y, L_u}(k) = H_{L_y, L_u}(k) - H_{L_y, L_u}(k-1)$$

و $d(k)$ نشان دهنده نامعینی های موجود در سیستم است و کران بالای آن L در نظر گرفته شده است، به عبارت دیگر $|d(k)| < L$.

■

در واقع صورت FFDL، وابستگی بین تغییرات خروجی در لحظه $k+1$ و تغییرات ورودی ها و خروجی ها در لحظات قبل را در نظر می-گیرد. برای طراحی کنترل کننده، لازم است که بردار شبه گرادیان مشخص باشد ولی از آن جا که فرض می شود مدل سیستم ناشناخته است، باید بردار شبه گرادیان تخمین زده شود:

۲-۱- تخمین بردار شبه گرادیان [۱۳]

برای تخمین بردار شبه گرادیان، از تابع هزینه زیر استفاده شده است

$$J(\hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k)) = |y(k) - y(k-1) - \hat{\Phi}_{L_y, L_u}^T(k) \Delta H_{L_y, L_u}(k-1)|^2 + \mu \|\hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k) - \hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k-1)\|^2 \quad (4)$$

که $\mu > 0$ یک ضریب وزنی مثبت و $\hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k)$ تخمین بردار شبه گرادیان است. با کمینه کردن تابع (۴) نسبت به $\hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k)$ الگوریتم تخمین به صورت زیر به دست می آید.

$$\hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k) = \hat{\Phi}_{L_y, L_u}(1) \text{ if } \|\hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k)\| \leq e \text{ or } \|\Delta H_{L_y, L_u}(k-1)\| \leq e \text{ or } \text{sign}(\hat{\Phi}_{L_y+1}(k)) \neq \text{sign}(\hat{\Phi}_{L_y+1}(1))$$

در غیر این صورت

$$\hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k) = \hat{\Phi}_{L_y, L_u}(k-1) + \frac{\eta \Delta H_{L_y, L_u}(k-1) (y(k) - y(k-1) - \hat{\Phi}_{L_y, L_u}^T(k-1) \Delta H_{L_y, L_u}(k-1))}{\mu + \|\Delta H_{L_y, L_u}(k-1)\|^2} \quad (5)$$

که e مقدار مثبت بسیار کوچکی است. روابط مربوط به فرایند تخمین، روابط کلی هستند. در [۱۳] نشان داده شده است که چنانچه $0 < \eta < 2$, $\mu > 0$ انتخاب شود، الگوریتم تخمین همگرا می-شود. در ادامه ما برای سادگی مقدار هر دو پارامتر را برابر یک انتخاب و از روند مقاله حذف می کنیم.

که $y(k)$ و $u(k)$ به ترتیب ورودی کنترل و خروجی سیستم در لحظه k و n_y, n_u به ترتیب مرتبه های نامعلوم خروجی و ورودی هستند. $f(\cdot)$ یک تابع غیرخطی نامعلوم است.

فرض ۱: مشتقات جزئی $f(\cdot)$ نسبت به همه متغیرهای آن پیوسته است.

فرض ۲: سیستم (۱) برای همه k ها (مگر تعداد محدودی k) و برای $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \geq 0$ و $H_{L_y, L_u}(k_1) \neq H_{L_y, L_u}(k_2)$ لیپ شیتز^۱ کلی است؛ یعنی

$$|y(k_1+1) - y(k_2+1)| \leq b \|H_{L_y, L_u}(k_1) - H_{L_y, L_u}(k_2)\| \quad (2)$$

که در آن

$$H_{L_y, L_u}(k) = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-L_y+1), u(k), u(k-1), \dots, u(k-L_u+1)]$$

و در آن $0 \leq L_y \leq n_y, 1 \leq L_u \leq n_u$ شبه مرتبه های سیستم هستند.

نکته ۱: در طراحی کنترل کننده معمولاً در صورتی که n_y, n_u مشخص باشند، مقادیر $L_u = n_u, L_y = n_y$ انتخاب می شود، در حالی-که غالباً در سیستم های عملی این مقادیر نامشخص هستند و یا حتی ممکن است این مقادیر متغیر با زمان باشند. به همین دلیل در طراحی کنترل کننده معمولاً مقادیر شبه مرتبه ها به صورت تقریبی از مرتبه های واقعی سیستم در نظر گرفته می شود [۱۳]. هم چنین استفاده از روش های مبتنی بر داده برای تخمین مرتبه سیستم می تواند به کار گرفته شود [۱۷]. تعیین ثابت لیپ شیتز نیز غالباً بسته به سیستم و شناختی که از آن داریم، انتخاب می شود، هر چند که در این مورد نیز استفاده از روش های مبتنی بر داده برای تعیین مقدار ثابت لیپ شیتز می تواند مد نظر قرار گیرد [۱۸].

نکته ۲: نکته قابل توجه دیگر این است که از نظری عملی، فرض ۱ و ۲، فرض هایی منطقی و قابل قبول هستند. در واقع فرض ۱ قیدی عمومی برای اکثر سیستم های غیر خطی در حوزه کنترل است. فرض ۲ یک کران بالا بر روی تغییرات خروجی نسبت به تغییرات ورودی کنترل است که به تفصیل در [۱۳] توضیح داده شده است. اکثر سیستم های کنترل عملی از جمله سیستم های کنترل دما، فشار و سطح مایعات و ... این فرض را برآورده می کنند [۱۳].

قضیه ۱ [۱۳]- اگر سیستم غیرخطی (۱) دو فرض فوق را برای هر L_y, L_u برآورده کند و $\|\Delta H_{L_y, L_u}(k)\| \neq 0$ باشد، آن گاه بردار شبه گرادیان $\hat{\Phi}_{L_y, L_u} \in R^{L_y+L_u}$ وجود دارد به نحوی که سیستم (۱) را می توان به صورت FFDL تخمین زد.

¹ Lipschitz

² Pseudo order

در قضیه ی زیر با معرفی سطح لغزش و قانون کنترل نشان می دهیم که خطای ردیابی کراندار است.

قضیه ۲- برای سامانه غیر خطی به شکل معادله (۱) که فرض ۱ و ۲ را برآورده می کند، با سطح لغزش بازگشتی به صورت زیر

$$S_1(k) = \Delta S_0(k) + \beta S_0(k)^\alpha \quad (8)$$

که در آن $S_0(k) = e(k-1)$ است که $e(k) = y(k) - r(k)$ و $r(k)$ سیگنال مرجع است و $\Delta S_0(k) = \frac{S_0(k+1) - S_0(k)}{h}$ که در آن h زمان نمونه برداری است. هم چنین پارامتر α عدد مثبت به صورت

$$\alpha = \frac{p}{q} \text{ است که } p < q \text{ و هر دو فرد هستند،}$$

و با در نظر گرفتن قانون کنترل مطابق با رابطه زیر

$$u(k) = u_{eq}(k) + u_{sw}(k) \quad (9)$$

که در آن

$$u_{eq}(k) = \frac{r(k+1) + 2e(k) - e(k-1) - F(k) - y(k) - h^2 \beta_1 \Delta S_0(k)^\alpha}{\hat{\phi}_{L_{y+1}}(k)} \quad (10)$$

$$u_{sw}(k) = \frac{-h^2 K \text{sign}(S_1(k))}{\hat{\phi}_{L_{y+1}}(k)} \quad K > L \quad (11)$$

آن گاه $K^* > 0$ وجود دارد، به نحوی که

$$|S_1(k)| \leq \rho_i \quad \forall k > K^* \quad (12)$$

و خطای ردیابی کراندار است.

اثبات

با در نظر گرفتن $S_1(k)$ داریم:

$$\Delta S_1(k) = \frac{S_1(k+1) - S_1(k)}{h} = \Delta^2 S_0(k) + \beta \Delta S_0(k)^\alpha \quad (13)$$

از طرفی با توجه به $S_0(k) = e(k-1)$ داریم

$$\Delta S_0(k) = \frac{e(k) - e(k-1)}{h} \quad (14)$$

و با توجه به تعریف خطای ردیابی $e(k) = y(k) - r(k)$ و رابطه (۱۴) می توان رابطه (۱۵) را نتیجه گرفت.

$$\Delta^2 S_0(k) = \frac{y(k+1) - r(k+1) - 2e(k) + e(k-1)}{h^2} \quad (15)$$

با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۵) و (۳) و با اعمال قانون کنترل (۹) داریم

$$S_1(k+1) - S_1(k) = h \Delta^2 S_0(k) + h \beta \Delta S_0(k)^\alpha = -h K \text{sign}(S_1(k)) + h d(k) \quad (16)$$

بنابراین براساس لم داریم

۳- کنترل کننده مد لغزشی پایان دار مبتنی بر

داده

روش کنترل مد لغزشی پایان دار روشی قوی از لحاظ قوام در برابر عدم قطعیت و اغتشاش، سادگی طراحی و همگرایی سریع حالت ها است. در این روش برای طراحی کنترل کننده از یک سطح لغزش غیر خطی خاص به جای سطوح خطی استفاده می شود. در این بخش کنترل کننده مد لغزشی پایان دار به صورت مستقل از مدل طراحی می شود و با تحلیل نظری برتری این روش بر روش های کنترل مد لغزشی مبتنی بر سطوح خطی نشان داده خواهد شد.

طراحی کنترل کننده مد لغزشی پایان دار شامل دو گام اساسی است. در گام اول یک سطح لغزش غیر خطی مناسب انتخاب می شود و در گام دوم با تعریف قانون کنترل مناسب سعی می شود اهداف کنترلی برآورده شود. در تحلیل کنترل کننده های مد لغزشی زمان پیوسته ابتدا ثابت می شود سطح لغزش به صفر همگرا می شود (شرط لغزش یا همان $|S| < -\eta SS$) و سپس رفتار زمانی خطای ردیابی و همگرایی آن به صفر بررسی می شود (موسوم به پایداری سطح لغزش). در [۳] نشان داده شده است که در کنترل مد لغزشی پایان دار زمان گسسته سطح لغزش الزاماً به صفر نمی رسد، بلکه پس از طی شدن مرحله رسیدن، مقداری محدود اختیار می کند و در نتیجه ثابت می شود که خطای ردیابی مقداری کران دار خواهد داشت. در ادامه در قضیه ۲ با معرفی سطح لغزش و یک قانون کنترل مناسب روش مد نظر این مقاله ارائه شده و نشان داده شده است که خطای ردیابی سیستم کراندار است. سپس در قضیه ۳ برتری روش ارائه شده نسبت به TSMC مبتنی بر سطح خطی نشان داده شده است. برای اثبات قضیه ی ۳ نیاز به دانستن دو لم زیر است:

لم ۱ [۱۹]- برای سیستم دینامیکی اسکالر $z(k+1) = z(k) + g(k) - \varepsilon \text{sign}(z(k))$ و اگر $|g(k)| < \gamma$ و $0 < \gamma < \varepsilon$ باشد، آن گاه حالت $z(k)$ به صورت زیر همگرا خواهد شد.

$$|z(k)| < \varepsilon + \gamma < 2\varepsilon \quad (6)$$

لم ۲ [۲۰]- برای سیستم دینامیکی و اسکالر $z(k+1) = z(k) - lz(k)^\alpha + g(k)$ که $0 < \alpha < 1$ و $l > 0$ نسبت دو عدد فرد است، اگر $|g(k)| < \gamma$ و $\gamma > 0$ آن گاه عدد محدود $K^* > 0$ به نحوی وجود دارد که

$$|z(k)| \leq \psi(\alpha) \cdot \max \left\{ \left(\frac{\gamma}{l} \right)^{1/\alpha}, l^{1/\alpha} \right\} \quad \forall k > K^* \quad (7)$$

که

$$\psi(\alpha) = 1 + \alpha^{1-\alpha} - \alpha^{1/\alpha}$$

از طرفی با توجه به رابطه (۱۹)، $\lim_{k \rightarrow \infty} |S_0(k)| < \rho_0$ ، در نتیجه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k)|_{TSMC} < \rho_0 \quad (23)$$

که با توجه به رابطه (۲۲) داریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k)|_{TSMC} < O(h^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (24)$$

با در نظر داشتن این که $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ می توان نتیجه گرفت

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k)|_{TSMC} < O(h) \quad (25)$$

از طرفی در حالت کنترل مد لغزشی با سطوح خطی داریم [۲]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k)|_{LSMC} = O(h) \quad (26)$$

با توجه به روابط (۲۵) و (۲۶) می توان نتیجه گرفت $\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k)|_{TSMC}$ از $\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k)|_{LSMC}$ کمتر است.

در بخش بعد برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، این روش برای دو مثال مختلف و به ازای سیگنال های مرجع متفاوت شبیه سازی شده است. سپس نتایج شبیه سازی با نتایج شبیه سازی روش کنترل مد لغزشی براساس سطوح خطی مقایسه شده است.

۴- شبیه سازی

برای انجام شبیه سازی روش پیشنهادی، الگوریتم زیر به کار گرفته شده است:

گام ۱- تعیین پارامترهای $\mu, \alpha, \beta, K, \eta$ و شرایط اولیه انتخاب α, β : در [۲۱] نشان داده شده است که هرچه مقدار پارامتر β بزرگتر و مقدار پارامتر α کوچکتر باشد، می توان خطای ردیابی کمتری داشت. توضیحات مربوط به نحوه انتخاب این پارامترها به همراه تحلیل ریاضی به طور کامل در این مرجع تشریح شده است.

انتخاب K : همان طور که توضیح داده شد چنانچه کران بالای نامعینی برابر L باشد، لازم است $K > L$ انتخاب شود، هر چند که هرچه مقدار این پارامتر بزرگتر انتخاب شود، میزان چترینگ در سیستم نیز زیاده تر می شود که این موضوع در ادامه در شبیه سازی ها نیز نشان داده شده است.

دو پارامتر μ, η از پارامترهای تخمین هستند که توضیحات مربوط به نحوه انتخاب آن ها و تاثیر آن ها در همگرایی الگوریتم تخمین در [۱۳] آمده است. از آنجایی که در این مقاله ما قصد انتخاب بهینه این پارامترها را نداریم، برای سادگی هر دو این پارامترها را برابر مقدار واحد انتخاب می کنیم و از روند مقاله حذف می کنیم. انتخاب بهینه ی این پارامترها از کارهای باز در این حوزه است که می تواند در ادامه کار مورد توجه قرار گیرد.

$$|S_1(k)| \leq h(K+L) = \rho_1 \quad \forall k > K^* \quad (17)$$

از سوی دیگر براساس رابطه (۸) خواهیم داشت

$$S_0(k+1) = S_0(k) - h\beta S_0(k)^\alpha + hS_1(k) \quad (18)$$

بنابراین براساس لم ۲ و رابطه (۱۸) عدد محدود $K^* > 0$ به نحوی وجود دارد که

$$|S_0(k)| \leq \rho_0 = \psi(\alpha) \cdot \max \left\{ \left(\frac{\rho_1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, (h\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} \quad \forall k > K^* \quad (19)$$

پس $1 - K^* > 0$ و خطای ردیابی کراندار است.

در قضیه ۲ نشان دادیم که خطای ردیابی با اعمال کنترل کننده پیشنهادی محدود باقی می ماند. در ادامه نشان خواهیم داد که با انتخاب مناسبی از α ، خطای ردیابی در حالت کنترل مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل، کمتر از خطای ردیابی در حالت کنترل مد لغزشی مستقل از مدل مبتنی بر سطوح خطی^۱ است. به عبارت دیگر اختیار سطح لغزش پایان دار پیشنهادی در این مقاله، باعث کاهش خطای ردیابی خواهد شد.

این مطلب در قضیه ی ۳ به شرح زیر بیان شده است. برای بیان و اثبات این قضیه نیاز به بازگو کردن تعریف زیر داریم:

تعریف: تابع $f(h)$ از مرتبه $g(h)$ گفته می شود و به صورت $f(h) = O(g(h))$ نشان داده می شود، اگر $M > 0$ و $\delta > 0$ وجود داشته باشد، به نحوی که $|f(h)| < M|g(h)|$ برای $|h| < \delta$. [۱۹]

قضیه ۳- با انتخاب مناسبی از α ، خطای ردیابی در حالت کنترل مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل کمتر از خطای ردیابی در حالت کنترل مد لغزشی مستقل از مدل با سطح خطی است.

اثبات

براساس رابطه (۱۷) داریم

$$\rho_1 = O(h) \quad (20)$$

و براساس رابطه (۱۹) داریم

$$\rho_0 = \max \left\{ \psi(\alpha)(O(h))^{\frac{1}{\alpha}}, \psi(\alpha)(O(h))^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} \quad (21)$$

با توجه به رابطه (۲۱)، اگر فرض کنیم $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ باشد،

$$\text{داریم } 1 < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{و در نتیجه}$$

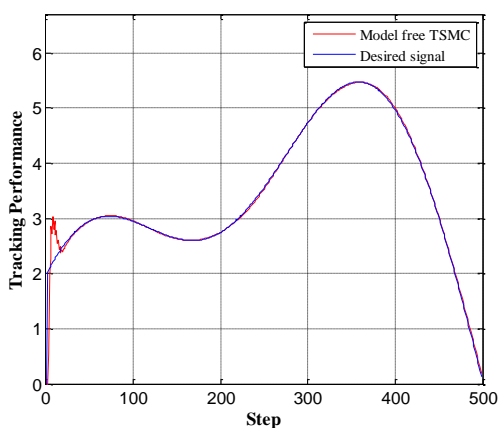
$$\rho_0 = O(h^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (22)$$

¹ Linear Sliding Mode Control (LSMC)

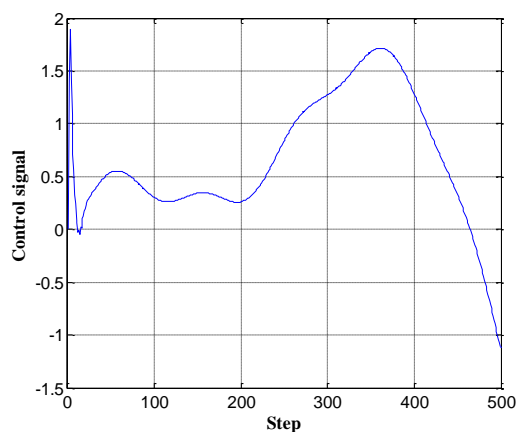
همان طور که مشخص است خروجی سیستم به خوبی توانسته است سیگنال مرجع مربعی را با خطای ردیابی محدود ردیابی کند. کنترل کننده پیشنهادی برای ردیابی خروجی نیازی به مدل سیستم غیر خطی ندارد و سیگنال کنترل تنها با استفاده از داده های ورودی و خروجی به دست آمده است. این امر نشان دهنده توانایی کنترل کننده پیشنهادی در کنترل سیستم های غیر خطی است که مدل آن ها در دسترس نیست یا مدل سازی آن ها دشوار است. سیگنال کنترل که در شکل ۲ نشان داده شده است دارای مقدار محدود است. به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی در ردیابی سیگنال های دیگر از جمله سیگنال های سینوسی در قسمت بعد فرض شده است که سیگنال مرجع به صورت

$$r(k) = 5 \sin\left(\frac{k\pi}{500}\right) + 2 \cos\left(\frac{k\pi}{200}\right)$$

نتایج شبیه سازی را نشان می دهند



شکل ۳: ردیابی سیگنال مرجع سینوسی توسط کنترل کننده مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل



شکل ۴: سیگنال کنترل در ردیابی سیگنال مرجع سینوسی توسط کنترل کننده پیشنهادی

با توجه به نتایج شبیه سازی، مشخص است که در این حالت نیز خروجی سیستم، سیگنال مرجع که یک سیگنال سینوسی است را به

گام دوم: تخمین بردار شبه گرادیان در لحظه k بر اساس رابطه (۵) و با استفاده از داده های ورودی و خروجی
گام سوم: طراحی کنترل کننده بر اساس رابطه (۹) و اعمال آن به سیستم
گام چهارم: ذخیره داده های ورودی و خروجی و برگشت به گام دوم

مثال ۱: سیستم زیر در نظر گرفته شده است [۱۵].

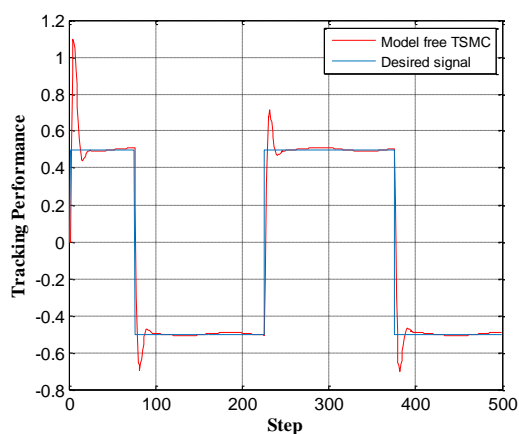
$$y(k) = y(k-1) - 0.24y(k-2) + u(k-1) - 0.5u(k-2) + 0.5 + 0.05\cos(0.06k)$$

فرض شده است هدف ردیابی سیگنال مرجع

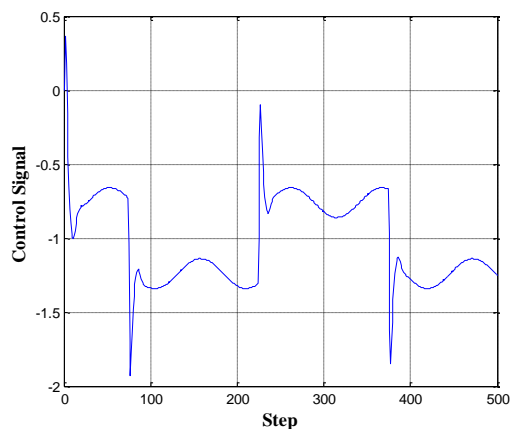
$$r(k) = 0.5(-1)^{\text{round}\left(\frac{k}{150}\right)}$$

است. پارامترهای طراحی به صورت $\alpha = 5/7$, $\beta = 0.6$, $K = 0.0004$

نتایج شبیه سازی در شکل ۱ و شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۱: ردیابی سیگنال مرجع مربعی توسط کنترل کننده مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل



شکل ۲: سیگنال کنترل در ردیابی سیگنال مرجع مربعی توسط کنترل کننده پیشنهادی

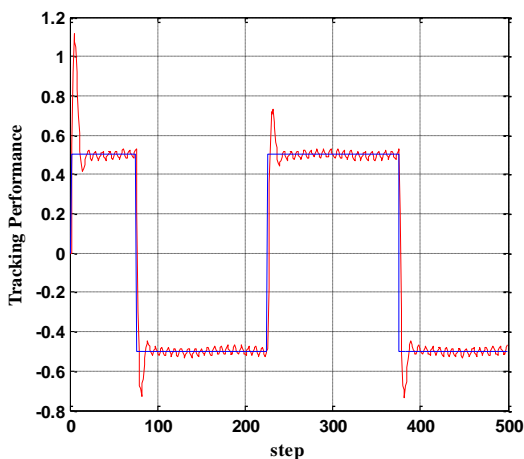
در حالت دوم که سیگنال مرجع

$$r(k) = 5 \sin\left(\frac{k\pi}{500}\right) + 2 \cos\left(\frac{k\pi}{200}\right)$$
 در نظر گرفته شده است، مشخص است ردیابی سیگنال مرجع با استفاده از هردو روش انجام شده است اما با استفاده از کنترل کننده پیشنهادی دقت ردیابی بالاتر است، مقادیر نرم-۲ خطای ردیابی (جدول ۱) نیز دقت بالاتر روش پیشنهادی را تایید می کنند.

جدول ۱: مقادیر نرم-۲ خطای ردیابی مربوط به روش پیشنهادی و روش کنترل مد لغزشی مبتنی بر سطح خطی

	سیگنال مرجع سینوسی		سیگنال مرجع مربعی	
	سطح لغزش خطی	سطح لغزش پیشنهادی	سطح لغزش خطی	سطح لغزش پیشنهادی
$\ e\ _2$	۴/۵۴	۲/۹۷	۲/۹۱	۲/۴۰

مشخص است که با اعمال روش پیشنهادی مقادیر نرم دوم خطای ردیابی نسبت به روش کنترل کننده مد لغزشی مبتنی بر سطح خطی مقدار کمتری اختیار کرده است که نشان دهنده برتری روش پیشنهادی است. نکته قابل توجه در اعمال روش پیشنهادی این است که با افزایش ضریب K در سیگنال کنترل میزان چترینگ در سیستم افزایش می یابد. شکل ۷ و شکل ۸ به ترتیب ردیابی سیگنال مرجع مربعی و سیگنال کنترل را با افزایش ضریب K به مقدار $K = 0.02$ نشان می دهند.

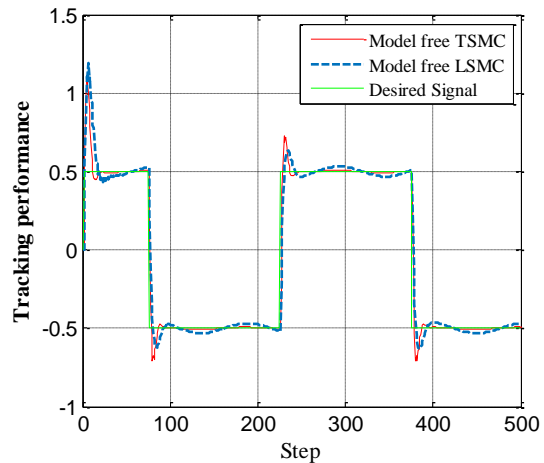


شکل ۷: ردیابی سیگنال مرجع مربعی توسط کنترل کننده پیشنهادی با

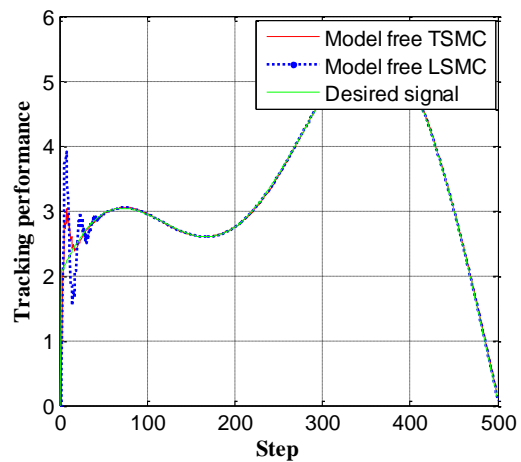
افزایش ضریب K

خوبی و در مدت زمان اندکی ردیابی کرده است و سیگنال کنترل هم دارای مقادیر محدود است.

به منظور مقایسه عملکرد کنترل کننده پیشنهادی با روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطح خطی، نتایج شبیه سازی مربوط به هر دو روش و به ازای هردو سیگنال مرجع در شکل ۵ و شکل ۶ آورده شده است.



شکل ۵: ردیابی سیگنال مرجع مربعی توسط کنترل کننده پیشنهادی و کنترل کننده LSMC مستقل از مدل



شکل ۶: ردیابی سیگنال مرجع سینوسی توسط کنترل کننده پیشنهادی و کنترل کننده LSMC مستقل از مدل

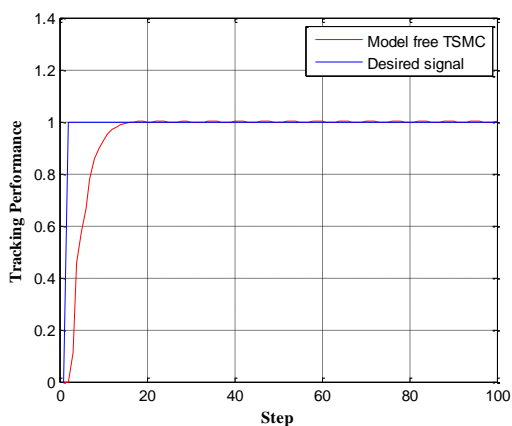
در حالتی که سیگنال مرجع $r(k) = 0.5(-1)^{\text{round}(\frac{k}{150})}$ فرض شده است با اعمال کنترل مد لغزشی مبتنی بر سطح خطی ردیابی خروجی به خوبی صورت نگرفته است، در حالی که با اعمال کنترل کننده پیشنهادی خروجی سیستم توانسته است سیگنال مرجع را با سرعت مناسبی ردیابی کند. براساس جدول ۱ که مقادیر نرم-۲ خطای ردیابی مربوط به هر دو روش را نشان می دهد، نیز مشخص است که خطای ردیابی مربوط به روش پیشنهادی کمتر است.

واضح است که با افزایش ضریب K مقدار چترینگ سیستم افزایش می یابد که برای کاهش آن می توان به جای تابع علامت $sign(\cdot)$ در سیگنال کنترل از تابع $sat(\cdot)$ استفاده کرد.

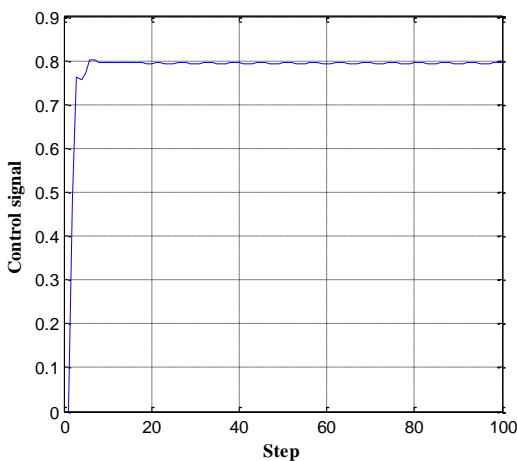
مثال ۲: سیستم غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$y(k) = \frac{y(k-1)^2}{1+y(k-1)^2} + u(k-1)^3$$

فرض شده است هدف ردیابی سیگنال مرجع $r(k) = 1$ است. پارامترهای طراحی به صورت $\alpha = 5/7, \beta = 0.2, K = 0.002$ در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه سازی در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نشان داده شده است.

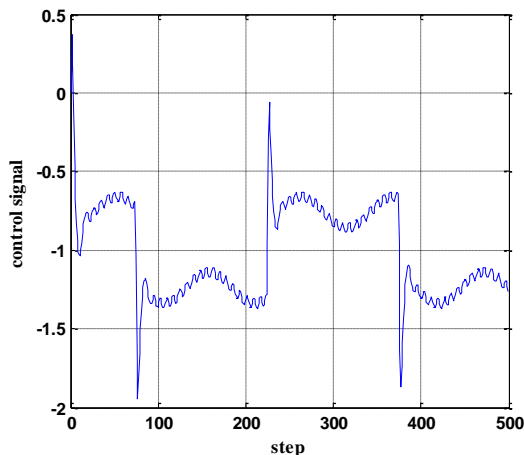


شکل ۱۱: ردیابی سیگنال مرجع توسط کنترل کننده مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل



شکل ۱۲: سیگنال کنترل در ردیابی سیگنال مرجع توسط کنترل کننده پیشنهادی

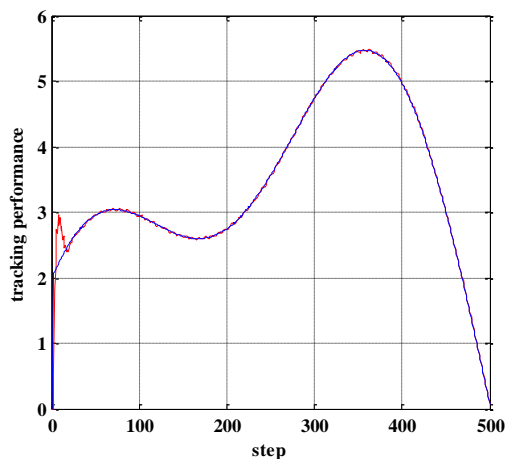
همان طور که مشخص است با اعمال کنترل کننده پیشنهادی، خروجی سیستم سیگنال مرجع را با خطای ردیابی کم و در مدت زمان اندکی ردیابی کرده است. سیگنال کنترل اعمالی نیز دارای مقادیر محدود است. به منظور مقایسه عملکرد کنترل کننده پیشنهادی با روش کنترل مد



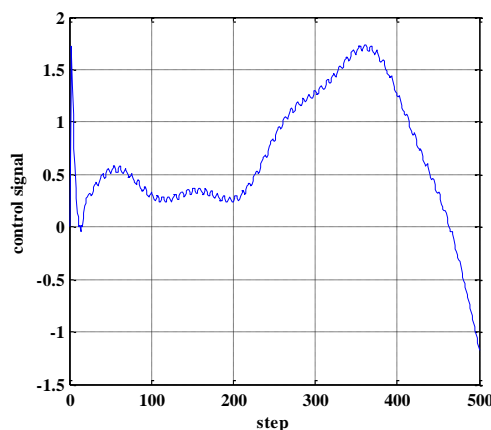
شکل ۸: سیگنال کنترلی در ردیابی سیگنال مرجع مربعی با افزایش ضریب

K

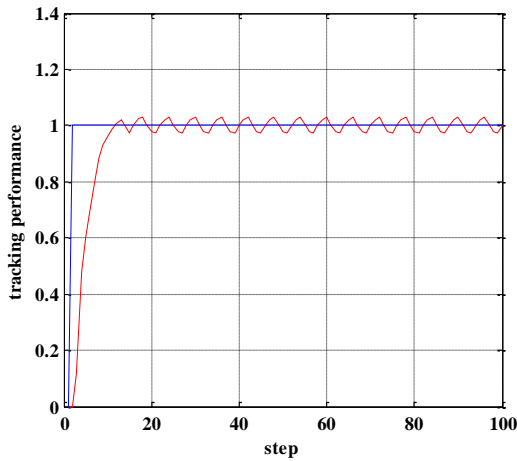
شکل ۹ و شکل ۱۰ به ترتیب ردیابی سیگنال مرجع سینوسی و سیگنال کنترل را با افزایش ضریب K به مقدار $K = 0.02$ نشان می دهند.



شکل ۹: ردیابی سیگنال مرجع سینوسی توسط کنترل کننده پیشنهادی با افزایش ضریب K

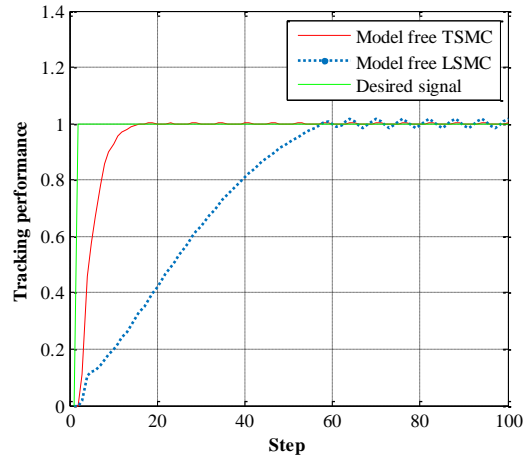


شکل ۱۰: سیگنال کنترلی در ردیابی سیگنال مرجع سینوسی با افزایش ضریب K

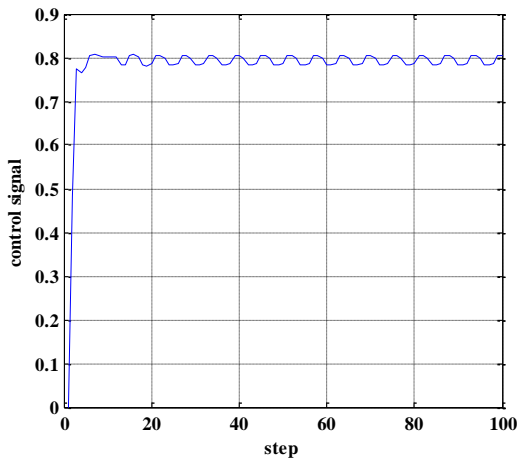


شکل ۱۴: ردیابی سیگنال مرجع توسط کنترل کننده پیشنهادی با افزایش ضریب K

لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطح خطی، نتایج شبیه سازی مربوط به هر دو روش در شکل ۱۳ آورده شده است.



شکل ۱۳: ردیابی سیگنال مرجع توسط کنترل کننده پیشنهادی و کنترل کننده LSMC مستقل از مدل



شکل ۱۵: سیگنال کنترلی در ردیابی سیگنال مرجع مربعی با افزایش ضریب K

همان طور که مشخص است با اعمال کنترل کننده پیشنهادی، خروجی سیستم توانسته سیگنال مرجع را با دقت بالاتری و در مدت زمان کمتری ردیابی کند که این امر نشان دهنده برتری روش پیشنهادی نسبت به روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطح خطی است. مقادیر نرم-۲ خطای ردیابی (جدول ۲) نیز دقت بالاتر روش پیشنهادی را تایید می کند.

جدول ۲: مقادیر نرم-۲ خطای ردیابی مربوط به روش پیشنهادی و روش کنترل مد لغزشی مبتنی بر سطح خطی

	سیگنال مرجع ثابت	
	روش پیشنهادی	سطح لغزش خطی
$\ e\ _2$	۱/۵۷	۳/۸۴

مشخص است که مقادیر نرم دوم خطای ردیابی که با اعمال روش پیشنهادی به دست آمده است، نسبت به روش کنترل کننده مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطح خطی مقدار کمتری اختیار کرده است که نشان دهنده برتری روش پیشنهادی است.

نتایج شبیه سازی با افزایش ضریب K به مقدار $K = 0.02$ در ادامه آورده شده است.

مشخص است که در این حالت نیز با افزایش ضریب K چترینگ در سیستم نیز زیاد می شود.

مثال ۳: سیستم غیر خطی و دارای نامعینی زیر را در نظر بگیرید.

$$y(k) = \begin{cases} \frac{y(k)}{1+y(k)^2} + u(k)^3 & k < 500 \\ \frac{y(k)y(k-1)y(k-2)u(k-1)(y(k-2)-1) + a(k)u(k)}{1+y^2(k-1)+y^2(k-2)} & k > 500 \end{cases}$$

که

$$a(k) = \begin{cases} 1 & k < 700 \\ 2 & k > 700 \end{cases}$$

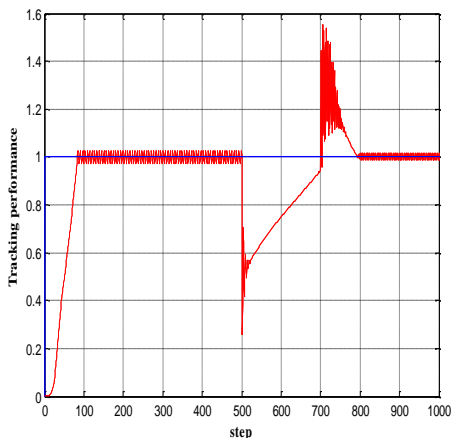
فرض شده است هدف ردیابی سیگنال مرجع $r(k) = 1$ است. پارامترهای طراحی به صورت $\alpha = 5/7, \beta = 0.5, K = 0.6$ در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه سازی در شکل ۱۶ و شکل ۱۷ نشان داده شده است.

همان طور که مشخص است با اعمال کنترل کننده پیشنهادی و در حضور عدم قطعیت نیز خروجی سیستم توانسته سیگنال مرجع را با دقت بالاتری و در مدت زمان کمتری ردیابی کند که این امر نشان دهنده برتری روش پیشنهادی نسبت به روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطح خطی است. مقادیر نرم-۲ خطای ردیابی (جدول ۳) نیز دقت بالاتر روش پیشنهادی را تایید می کند.

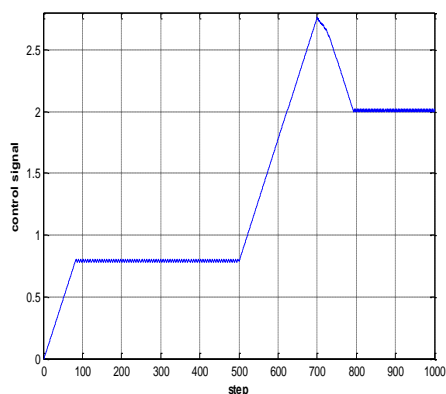
جدول ۳: مقادیر نرم-۲ خطای ردیابی مربوط به روش پیشنهادی و روش کنترل مد لغزشی مبتنی بر سطح خطی

	سیگنال مرجع ثابت	
	روش پیشنهادی	سطح لغزش خطی
$\ e\ _2$	۱۴/۱۹۸۴	۲۶/۱۵۳۲

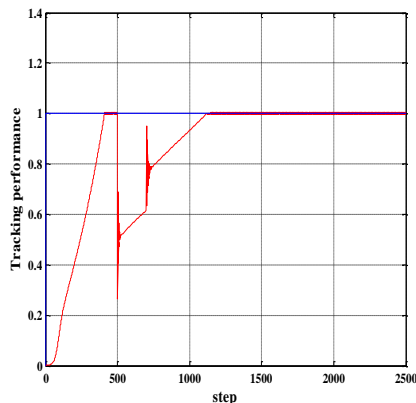
با افزایش ضریب K به مقدار $K = 1.5$ نتایج شبیه سازی به صورت زیر حاصل می شود.



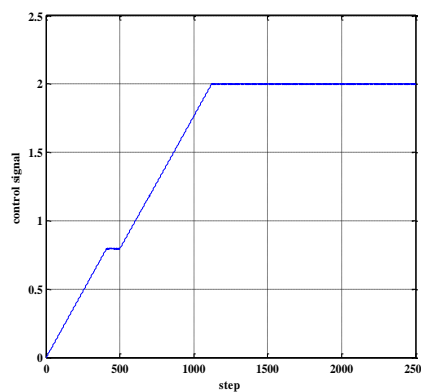
شکل ۱۹: ردیابی سیگنال مرجع توسط کنترل کننده پیشنهادی با افزایش ضریب K



شکل ۲۰: سیگنال کنترلی در ردیابی سیگنال مرجع با افزایش ضریب K

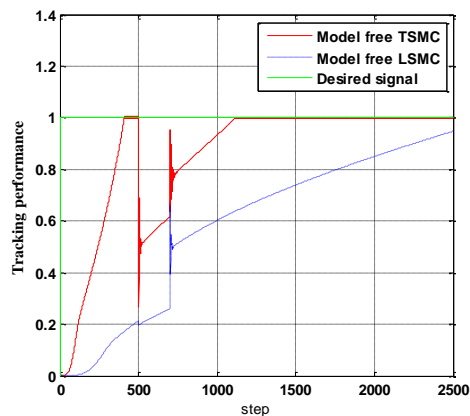


شکل ۱۶: ردیابی سیگنال مرجع توسط کنترل کننده مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل



شکل ۱۷: سیگنال کنترل در ردیابی سیگنال مرجع توسط کنترل کننده پیشنهادی

همان طور که مشخص است با اعمال کنترل کننده پیشنهادی، خروجی سیستم سیگنال مرجع را با خطای ردیابی کم و در مدت زمان اندکی ردیابی کرده است. سیگنال کنترل اعمالی نیز دارای مقادیر محدود است. به منظور مقایسه عملکرد کنترل کننده پیشنهادی با روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطح خطی، نتایج شبیه سازی مربوط به هر دو روش در شکل ۱۸ آورده شده است.



شکل ۱۸: ردیابی سیگنال مرجع توسط کنترل کننده پیشنهادی و کنترل کننده LSMC مستقل از مدل

[7] S. Khari, Z. Rahmani, B. Rezaie, and J. Sadat. "Chaos control based on combination of Integral Terminal Sliding Mode with a new sliding surface and adaptive neuro-fuzzy inference system". *Journal of control*, vol. 9, no.3, pp. 1-14, 2015.

[8] Z. Shuo. Nonsingular fast terminal sliding mode control method and its application on permanent magnet synchronous motor. in in 34th Chinese Control Conference (CCC). Hangzhou: IEEE, 2015.

[9] S. Li, C. Wu, and Z. Sun. "Design and implementation of clutch control for automotive transmissions Using terminal-sliding-mode control and uncertainty observer". *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 65, no.4, pp. 1890-1898, 2016.

[10] T. Wonghon and S. Engell. "Automatic controller tuning via unfalsified control". *Journal of Process Control*, vol. 22, no.10, pp. 2008-2025, 2012.

[11] H.S.Ahn, Y.Quan.Chen, and K.L.Moore. "Iterative Learning Control: brief survey and categorization". *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, vol. 37, no.6, pp. 1099-1122, 2007.

[12] L.Li, B.Jafarpour, and M.R. Khaninezhad. "A simultaneous perturbation stochastic approximation algorithm for coupled well placement and control optimization under geologic uncertainty". *Computational Geosciences*, vol. 17, no.1, pp. 167-188, 2012.

[13] Z.Hou and S.Jin, *Model Free Adaptive Control: theory and application*. CRC Press 2013.

[14] Y. Zhu, Z. Hou, and S. Jin. Full form dynamic linearization controller based data-driven model free adaptive control. in *The 27th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. Qingdao: IEEE, 2015.

[15] W.Wang and Z.Hou. "New adaptive quasi-sliding mode control for nonlinear discrete-time systems". *Journal of Systems Engineering and Electronics*, vol. 19, no.1, pp. 154-160, 2008.

[16] W. Hu and J. Tang. "Study of Model-free Adaptive Data-driven SMC Algorithm". *International Journal of Automation and Computing*, vol. 13, no.2, pp. 183-190, 2016.

[17] X. He and H. Asada. A new method for identifying orders of input-output models for nonlinear dynamic systems. in *American Control Conference*. 1993.

[18] M. Tanaskovic, L.Fagiano, C. Novara, and M. Morari. "On-line direct data driven controller

واضح است که با افزایش مقدار K در سیگنال کنترل، چترینگ در نتایج ظاهر می شود.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله کنترل کننده مد لغزشی پایان دار مستقل از مدل برای سیستم های غیر خطی گسسته زمان طراحی گردید. این کنترل کننده مستقل از مدل است و تنها به اطلاعات ورودی و خروجی سیستم نیاز دارد. از این رو در حالتی که مدل سیستم مشخص نیست، می تواند بدون استفاده از مدل سیستم، سیستم را به طور مطلوبی کنترل نماید. کنترل کننده پیشنهادی این مقاله برخلاف روش های کنترل مد لغزشی متداول از سطوح غیر خطی استفاده می کند که منجر به کاهش خطای ردیابی می شود. با استفاده از تحلیل های نظری برتری روش پیشنهادی و دقت ردیابی بالاتر آن، نسبت به روش کنترل مد لغزشی مستقل از مدل و مبتنی بر سطح خطی نشان داده شده است. همچنین کارایی روش توسط سه مثال با شبیه سازی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج نظری تایید شد.

در ادامه مطالعات خود، به حل مسئله بهینه سازی پارامترهای کنترلی و محاسبه عددی ثابت لپ شیتز که از جمله چالش های مطرح روش پیشنهادی هستند، خواهیم پرداخت و در نهایت روش پیشنهادی را برای سیستم های عملی به کار خواهیم گرفت.

۶- مراجع

[1] S. T. Venkataraman and S. Gulati. "Control of Nonlinear Systems Using Terminal Sliding Modes". *Journal of dynamic systems, measurement and control*, vol. 115, no.3, pp. 554-560, 1993.

[2] Z.Galias and X.Yu. "Euler's discretization of single input sliding mode control systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no.9, pp. 1726-1730, 2007.

[3] X.Yu, J.X.Xu, Y.Hong, and S.Yu. "Analysis of a class of discrete-time systems with power rule". *Automatica*, vol. 43, no.3, pp. 562-566, 2007.

[4] S.Janardhanan and B.Bandyopadhyay. "On discretization of continuous-time terminal sliding mode". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no.9, pp. 1532-1539, 2006.

[5] D.Zhao, S.Li, and Q.Zhu. "Output feedback terminal sliding mode control for a class of second order nonlinear systems". *Asian Journal of Control*, vol. 15, no.11, pp. 1-11, 2013.

[6] Q.Xu. "Piezoelectric nanopositioning control using second-order discrete-time terminal sliding mode strategy". *IEEE Transaction On Industrial Electronics*, vol. 12, no.62, pp. 7738-7748, 2015.

[20] S.Li, H.Du, and X.Yu. "Discrete-time terminal sliding mode control systems based on Euler's discretization". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 59, no.2, pp. 546-552, 2014.

[21] Z.Xi and T.Hesketh. On discrete time terminal sliding mode control for nonlinear systems with uncertainty. in American Control Conference. USA, 2010.

design approach with automatic update for some of the tuning parameters". Computer Sciences Journal, vol.no., 2015.

[19] X.Yu, B.Wang, Z.Galias, and G.Chen. "Discretization effect on equivalent control-based multi-input sliding-mode control systems". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no.6, pp. 1563-1569, 2008.