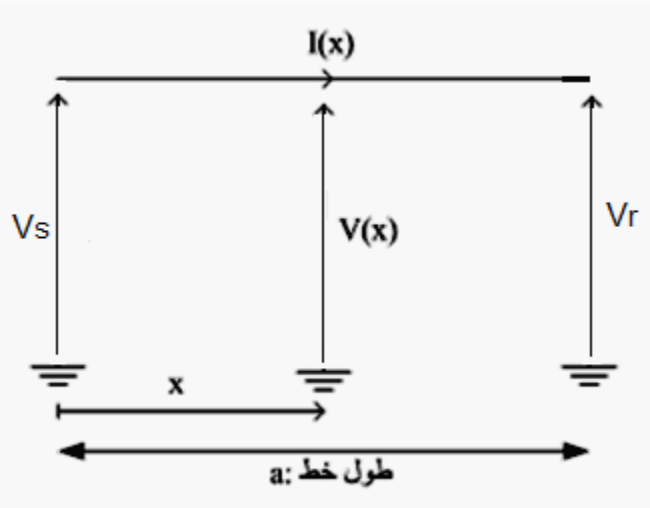


کنترل توان راکتیو در سیستمهای قدرت

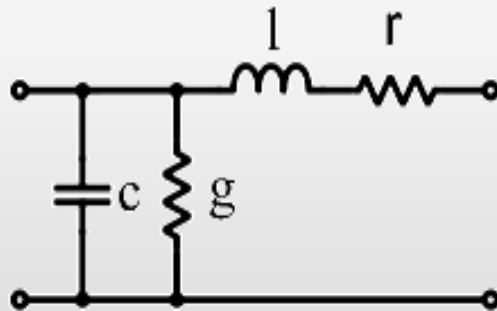
رفتار خط انتقال در شرایط ماندگار

معادلات موجی خط انتقال

خط انتقالی به طول a را در نظر میگیریم:



پارامترهای خط انتقال عبارتند از:



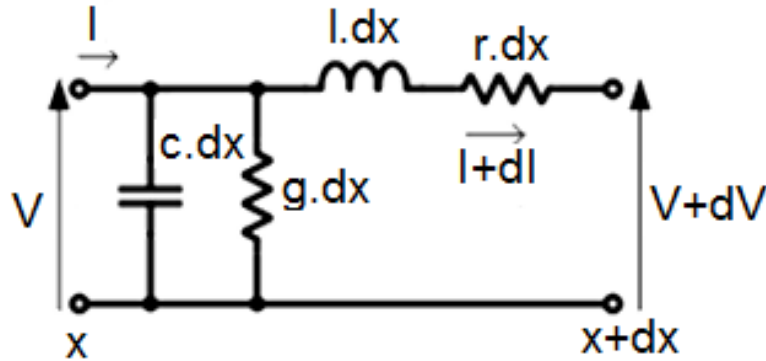
• r : مقاومت سری در واحد طول

• l : اندوکتانس سری در واحد طول

• g : هدایت موازی در واحد طول

• c : کاپاسیتانس موازی در واحد طول

برای یافتن روابط ولتاژ و جریان در هر نقطه از خط، بخش کوچکی از آن به طول dx را در نظر می گیریم. داریم:



$$\begin{cases} dV = -(r + j\omega l)I dx \\ dI = -(g + j\omega c)V dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = -(r + j\omega l)I \\ \frac{dI}{dx} = -(g + j\omega c)V \end{cases} \xRightarrow{\frac{d}{dx}} \begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} = -(r + j\omega l) \frac{dI}{dx} \\ \frac{d^2I}{dx^2} = -(g + j\omega c) \frac{dV}{dx} \end{cases} \xrightarrow[\frac{dI}{dx} = -(g + j\omega c)V]{\frac{dV}{dx} = -(r + j\omega l)I} \begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} = (r + j\omega l)(g + j\omega c)V \\ \frac{d^2I}{dx^2} = (r + j\omega l)(g + j\omega c)I \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= (r + j\omega l) \\ y &= (g + j\omega c) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} = zyV \\ \frac{d^2I}{dx^2} = zyI \end{cases}$$

معادله مشخصه سیستم و ریشه های آن بصورت زیر بدست می آید:

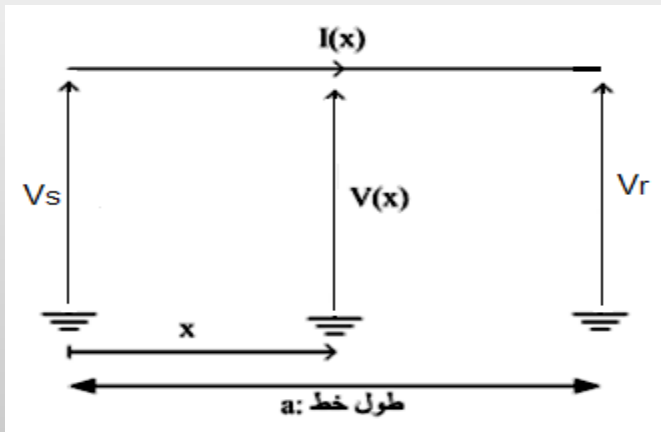
$$m^2 - zy = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{zy}$$

و در نهایت حل معادلات سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} V = A_1 e^{x\sqrt{zy}} + A_2 e^{-x\sqrt{zy}} \\ I = -\frac{1}{\sqrt{z/y}} (A_1 e^{x\sqrt{zy}} - A_2 e^{-x\sqrt{zy}}) = -\frac{1}{z_0} (A_1 e^{x\sqrt{zy}} - A_2 e^{-x\sqrt{zy}}), \quad z_0 = \sqrt{z/y} \end{cases}$$

که در آن z_0 امپدانس مشخصه خط می باشد.

برای پیدا کردن ضرائب A_1 و A_2 از شرایط مرزی یعنی ولتاژ و جریان انتهای خط استفاده میکنیم.



$$x = a: \begin{cases} V(x) = V_r \\ I(x) = I_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{V_r - z_0 I_r}{2} e^{-a\sqrt{zy}} \\ A_2 = \frac{V_r + z_0 I_r}{2} e^{+a\sqrt{zy}} \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} V(x) = \frac{V_r - Z_0 I_r}{2} e^{-(a-x)\sqrt{zy}} + \frac{V_r + Z_0 I_r}{2} e^{+(a-x)\sqrt{zy}} \\ I(x) = -\frac{1}{Z_0} \left(\frac{V_r - Z_0 I_r}{2} e^{-(a-x)\sqrt{zy}} - \frac{V_r + Z_0 I_r}{2} e^{+(a-x)\sqrt{zy}} \right) \end{cases}$$

در عمل چون مقادیر Γ و g کوچک هستند، می توان از آنها صرف نظر کرد.

$$\left. \begin{matrix} z \approx j\omega l \\ y \approx j\omega c \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sqrt{zy} = j\omega\sqrt{lc} = j\beta$$

β : عدد موج (Wave Number)

$$\beta = \omega\sqrt{lc}$$

θ : زاویه الکتریکی خط $\theta = \beta.a$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

Z_0 : امپدانس مشخصه خط

$$e^{j\beta(a-x)} = \cos\beta(a-x) +$$

$$j \sin\beta(a-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(x) = V_r \cos\beta(a-x) + jZ_0 I_r \sin\beta(a-x) \\ I(x) = I_r \cos\beta(a-x) + j \frac{V_r}{Z_0} \sin\beta(a-x) \end{cases}$$

TABLE 3
Typical EHV-UHV Transmission Line Parameters^{a,b}

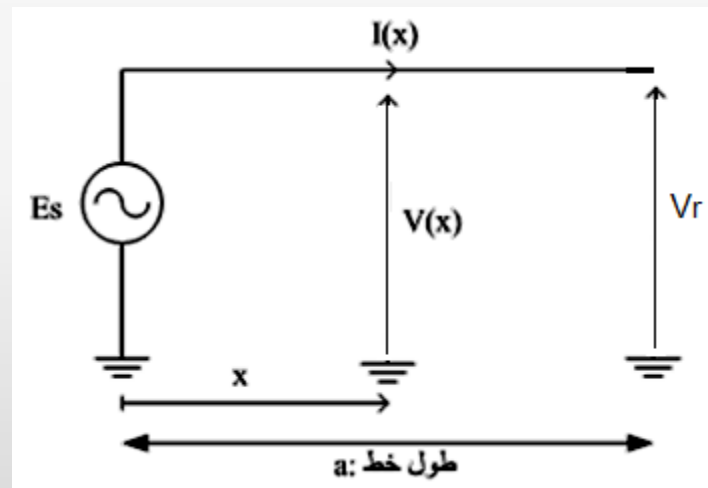
Characteristics	Nominal Voltage (kV)									
	345		500			765		1100		1500
	Conductor Configuration									
	Hor.	Delta	Hor.	Vert.	Delta	Hor.	Delta	Hor.	Delta	Hor.
ωl (Ω/mi)	0.59	0.59	0.60	0.49	0.51	0.53	0.53	0.48	0.47	0.47
r (Ω/mi)	0.060	0.060	0.025	0.026	0.019	0.020	0.020	0.0079	0.0076	0.0072
ωc ($\mu\text{S}/\text{mi}$)	7.27	7.29	7.23	8.80	8.35	8.02	8.01	8.94	8.92	9.21
β ($\text{rad}/\text{mi} \times 10^{-3}$)	2.07	2.07	2.08	2.08	2.06	2.06	2.06	2.07	2.05	2.08
Surge impedance Z_0 (Ω)	285	283	287	235	247	258	257	232	231	225
Natural load P_0 (MW)	417	420	870	1060	1010	2270	2280	5220	5250	10000
Charging MVA (MVA/mi)	0.866	0.868	1.81	2.20	2.09	4.70	4.70	10.8	10.8	20.7
Line current at SIL (A)	700	700	1000	1230	1170	1710	1720	2740	2750	3850

^a Reproduced by kind permission of J.J. LaForest, Electric Utility Systems Engineering Department.

^b This table contains typical positive-sequence characteristics of transmission lines from 345 to 1500 kV, calculated at nominal voltage, 60 Hz.

خط شعاعی:

ولتاژ ابتدای خط (E_s) توسط ماشین سنکرون قابل تنظیم است و ولتاژ انتهای آن (V_r) بستگی به بار خط دارد.



• وضعیت خط در بی باری:

$$\begin{cases} V(x) = V_r \cos \beta(a-x) + jZ_0 I_r \sin \beta(a-x) \\ I(x) = I_r \cos \beta(a-x) + j \frac{V_r}{Z_0} \sin \beta(a-x) \end{cases}$$

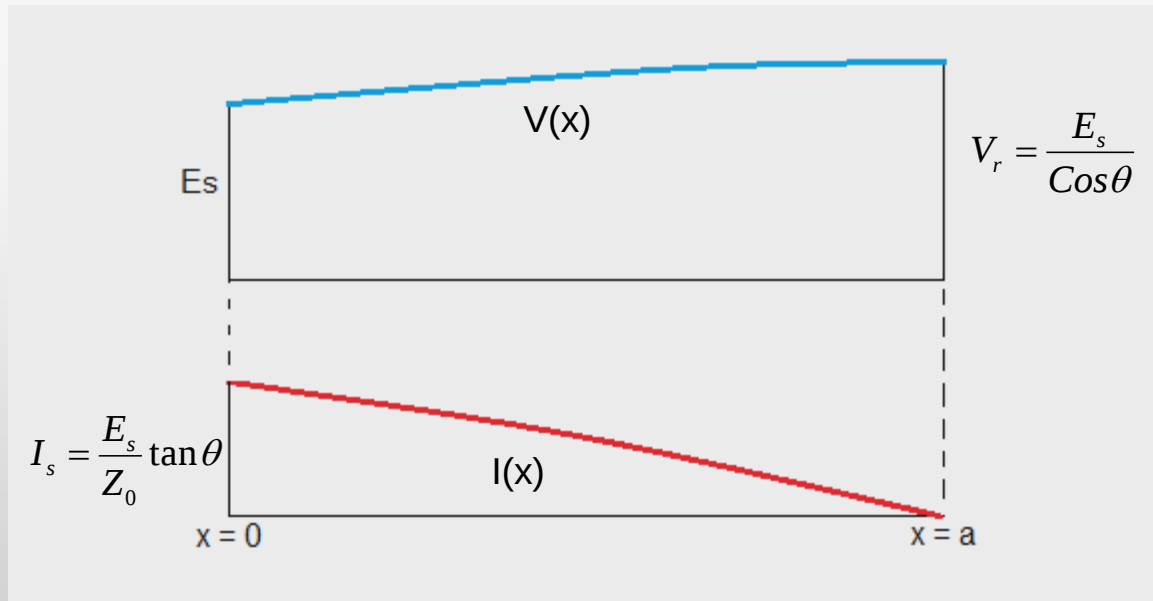
$$I_r = 0 \Rightarrow \begin{cases} V(x) = V_r \cos \beta(a-x) \\ I(x) = j \frac{V_r}{Z_0} \sin \beta(a-x) \end{cases} \quad \theta = \beta a$$

$$(x=0) \rightarrow \begin{cases} E_s = V_r \cos \beta a = V_r \cos \theta \\ I_s = j \frac{V_r}{Z_0} \sin \beta a = j \frac{V_r}{Z_0} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_r = \frac{E_s}{\cos \theta} \\ I_s = j \frac{E_s}{Z_0} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = j \frac{E_s}{Z_0} \tan \theta \end{cases}$$

از روابط فوق چنین برمیآید که ولتاژ ابتدا و انتهای خط همفاز هستند. در یک خط بی بار غیر از این نباید انتظار داشت. همچنین جریان ابتدای خط ۹۰ درجه با ولتاژ اختلاف فاز دارد. یعنی قدرتی از ماشین ابتدای خط جذب نمیشود که این هم مؤید بدون تلفات بودن خط است.

با جایگزینی V_r بر حسب E_s ، ولتاژ و جریان در طول خط شعاعی در حالت بی باری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \begin{cases} V(x) = \frac{E_s}{\cos \theta} \cos \beta(a-x) \\ I(x) = j \frac{E_s}{Z_0 \cos \theta} \sin \beta(a-x) \end{cases}$$

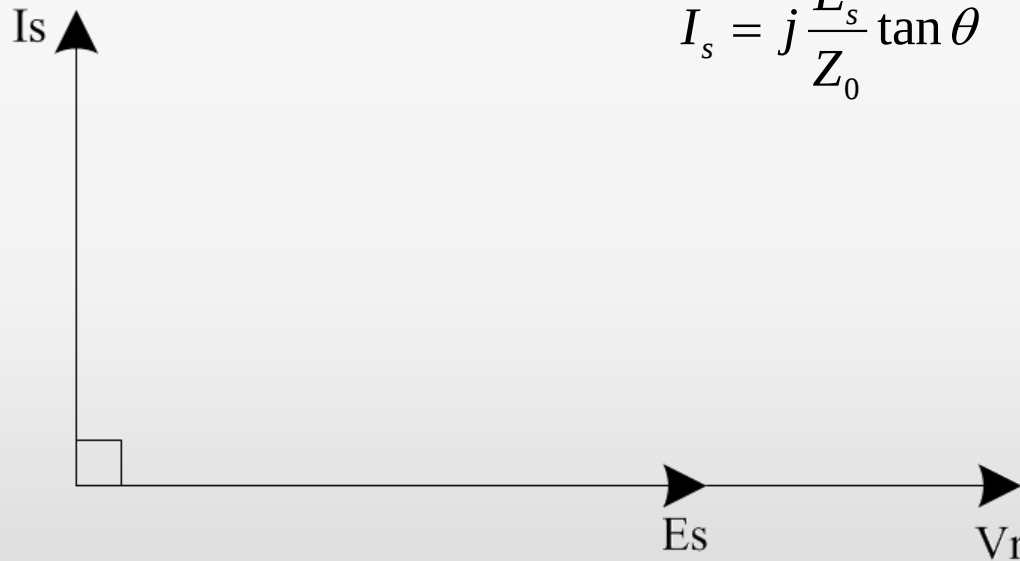


پروفیل ولتاژ و جریان

دیاگرام برداری جریان و ولتاژ ابتدا و انتهای خط:

$$V_r = \frac{E_s}{\cos \theta}$$

$$I_s = j \frac{E_s}{Z_0} \tan \theta$$



I_s جریان شارژینگ خط بوده و مربوط به خازن خط می باشد.

توان در ابتدای خط:

$$S_s = E_s I_s^* = P_s + jQ_s$$

$$I_s = j \frac{E_s}{Z_0} \tan \theta \quad \Rightarrow \quad S_s = E_s \left(-j \frac{E_s}{Z_0} \tan \theta \right) = -j \frac{E_s^2}{Z_0} \tan \theta$$

$$\begin{cases} P_s = 0 \\ Q_s = -\frac{E_s^2}{Z_0} \tan \theta \end{cases} \quad \text{if } |E_s| = V_0 = 1 \text{ pu} \Rightarrow Q = -\frac{V_0^2}{Z_0} \tan \theta \Rightarrow Q = -P_0 \tan \theta$$

$$P_0 = \frac{V_0^2}{Z_0} : SIL (Surge Impedence Load)$$

 V_0 : ولتاژ نامی خط P_0 : بار طبیعی خط

محدودیت ماشین سنکرون در جذب توان راکتیو:

پس ماشین ابتدای خط توان راکتیو جذب می

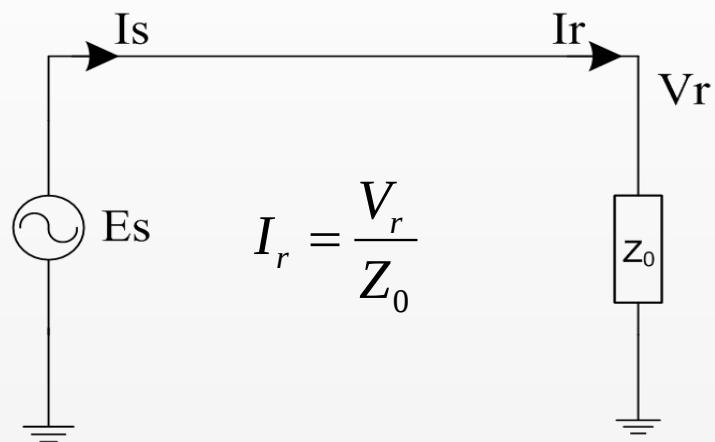
کند، یعنی زیر تحریک کار می کند.

• داغ شدن سیم پیچ استاتور

• ناپایداری

• داغ شدن دو انتهای استاتور

خط شعاعی در حالت باباری



الف) رفتار خط تحت بار طبیعی ($P=P_0$):

این حالت مانند این است که به انتهای خط امپدانس مشخصه یعنی Z_0 وصل شده باشد. معادلات ولتاژ و جریان به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} V(x) = V_r \cos \beta(a-x) + jZ_0 \frac{V_r}{Z_0} \sin \beta(a-x) = V_r [\cos \beta(a-x) + j \sin \beta(a-x)] = V_r e^{j\beta(a-x)} \\ I(x) = I_r \cos \beta(a-x) + j \frac{I_r Z_0}{Z_0} \sin \beta(a-x) = I_r [\cos \beta(a-x) + j \sin \beta(a-x)] = I_r e^{j\beta(a-x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_s = V_r e^{j\theta} = V_r \angle \theta \\ I_s = I_r e^{j\theta} = I_r \angle \theta \end{cases}$$

در بار طبیعی:

• دامنه ولتاژ و جریان در طول خط ثابت است.

• در هر نقطه از جمله در ابتدای خط ولتاژ و جریان همفاز هستند، یعنی ضریب قدرت واحد است

در واقع در بار طبیعی، توان راکتیو تولیدی کاپاسیته خط در هر نقطه با توان راکتیو مصرفی اندوکتانس آن نقطه برابر است.

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V_r}{I_r} = Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} = \frac{V}{I}$$

$$cV^2 = lI^2 \Rightarrow \omega cV^2 = \omega lI^2$$

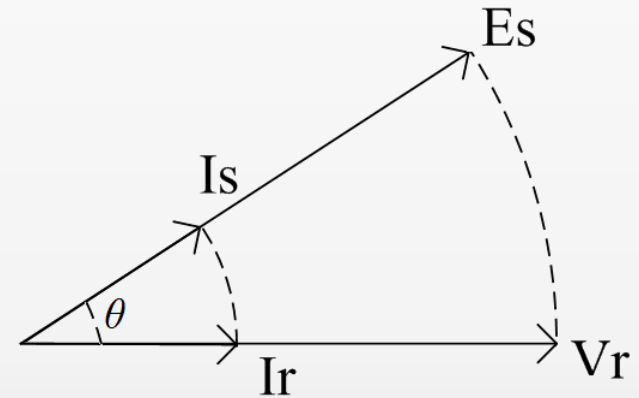
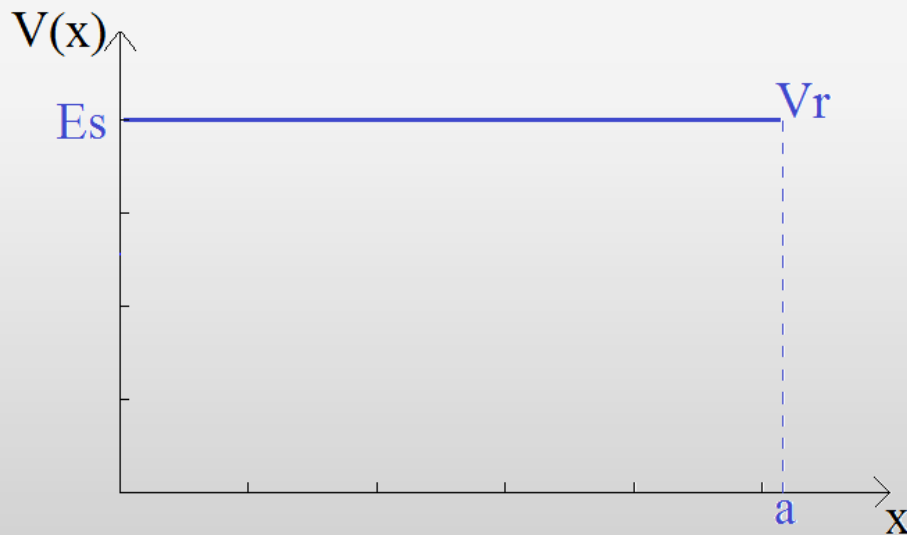
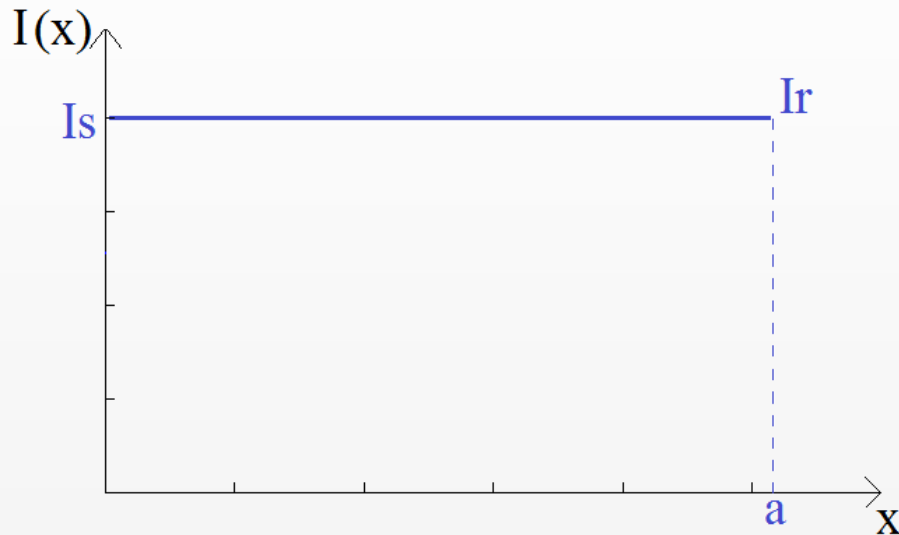
$$Q_c = Q_l$$

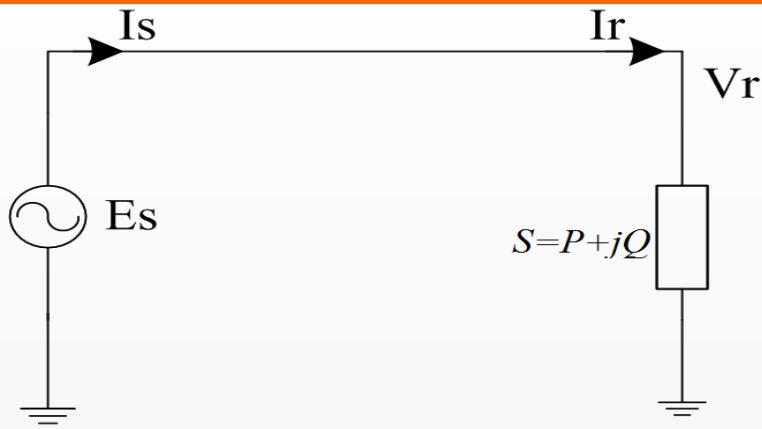
Q_c : توان راکتیو تولیدی توسط کاپاسیتانس واحد طول خط

Q_l : توان راکتیو مصرفی توسط اندوکتانس واحد طول خط

پروفیل و دیاگرام برداری ولتاژ و جریان خط

شعاعی در بار طبیعی:





(ب) رفتار خط تحت بار $S = P + jQ$

$$E_s = V_r \cos \theta + jZ_0 I_r \sin \theta$$

$$V_r = |V_r| \angle 0 \Rightarrow I_r = \frac{P - jQ}{V_r}$$

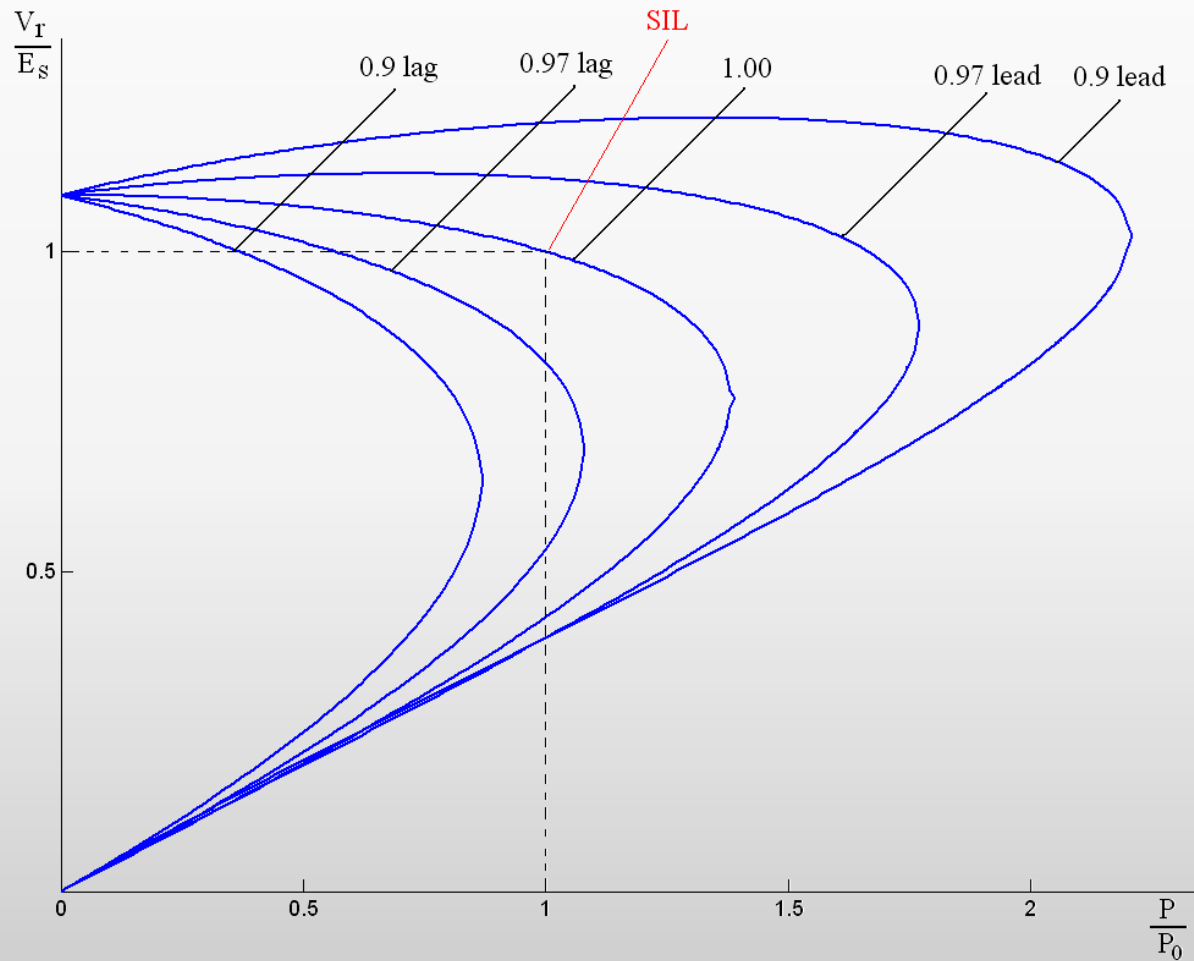
$$E_s = V_r \cos \theta + jZ_0 \frac{P - jQ}{V_r} \sin \theta = \left(V_r \cos \theta + Z_0 \frac{Q}{V_r} \sin \theta \right) + jZ_0 \frac{P}{V_r} \sin \theta$$

$$|E_s|^2 = \left(V_r \cos \theta + Z_0 \frac{Q}{V_r} \sin \theta \right)^2 + \left(Z_0 \frac{P}{V_r} \sin \theta \right)^2$$

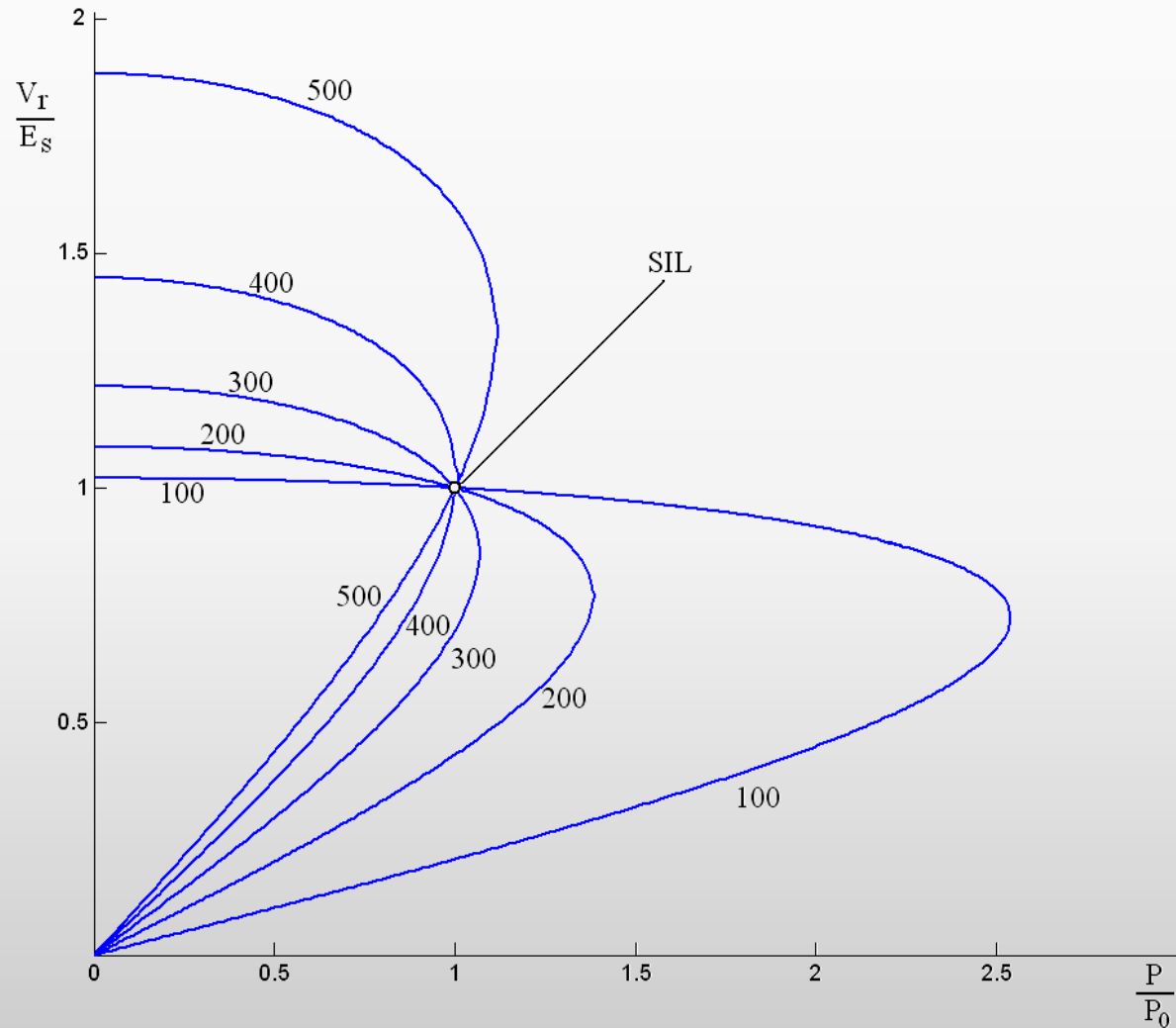
در رابطه فوق Z_0 و θ مربوط به خط مورد مطالعه و معلوم هستند، E_s توسط ماشین ابتدای خط در مقدار معینی تنظیم شده است. بنابراین به ازاء بار داده شده (P و Q) ولتاژ انتهای خط (V_r) قابل محاسبه است.

$$V_r^2 = \frac{\left(|E_s|^2 - Z_0 Q \sin 2\theta \right) \pm \sqrt{\left(|E_s|^2 - Z_0 Q \sin 2\theta \right)^2 - (Z_0 S \sin 2\theta)^2}}{1 + \cos 2\theta}$$

منحنی نرمالیزه شده ولتاژ انتهای خط بر حسب توان مصرفی بار در ضرایب قدرت مختلف (طول خط ۲۰۰ مایل بوده و از تلفات خط صرفنظر شده است)

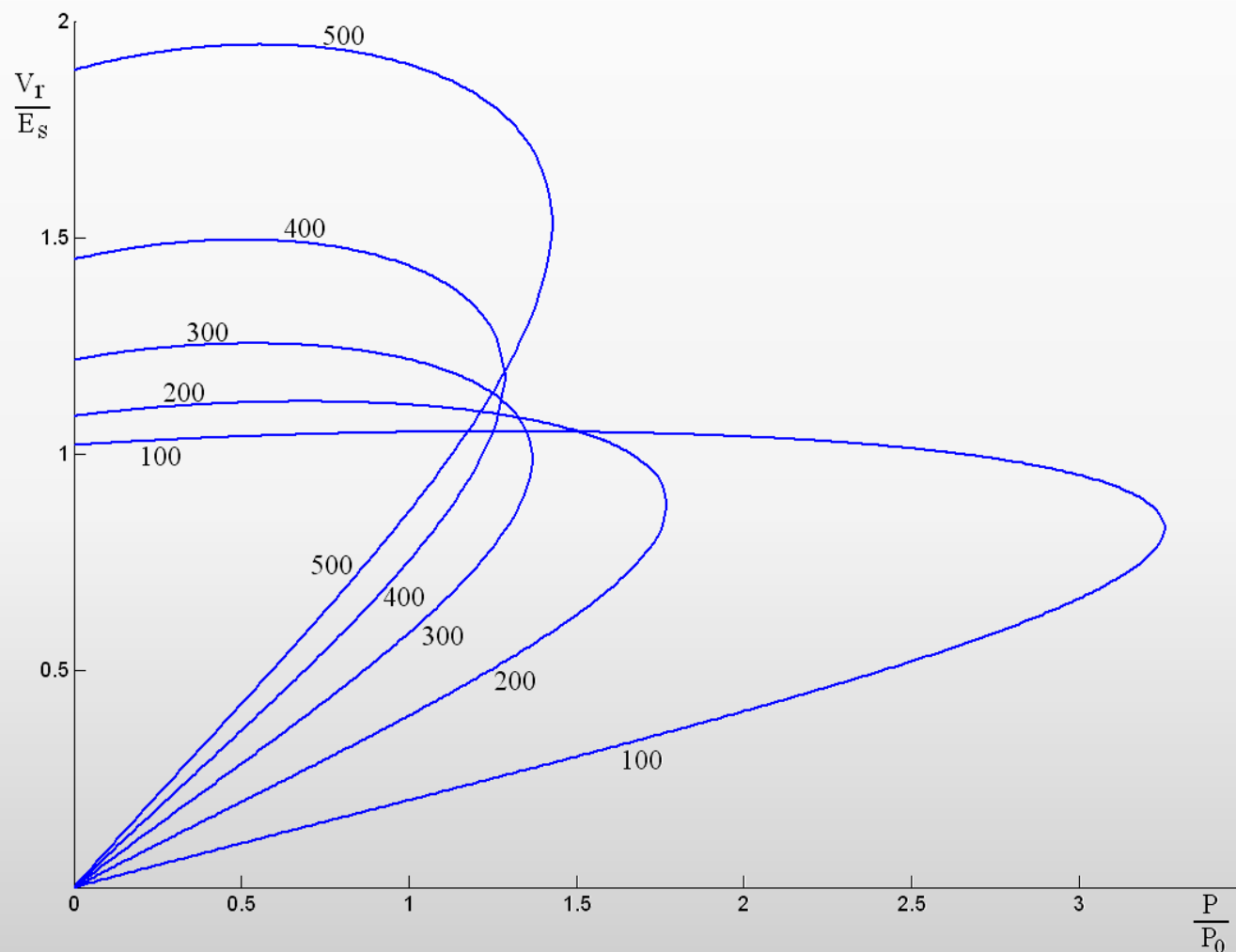


منحنی نرمالیزه شده ولتاژ انتهای خط بر حسب توان مصرفی بار در طول های مختلف خط و ضریب قدرت واحد



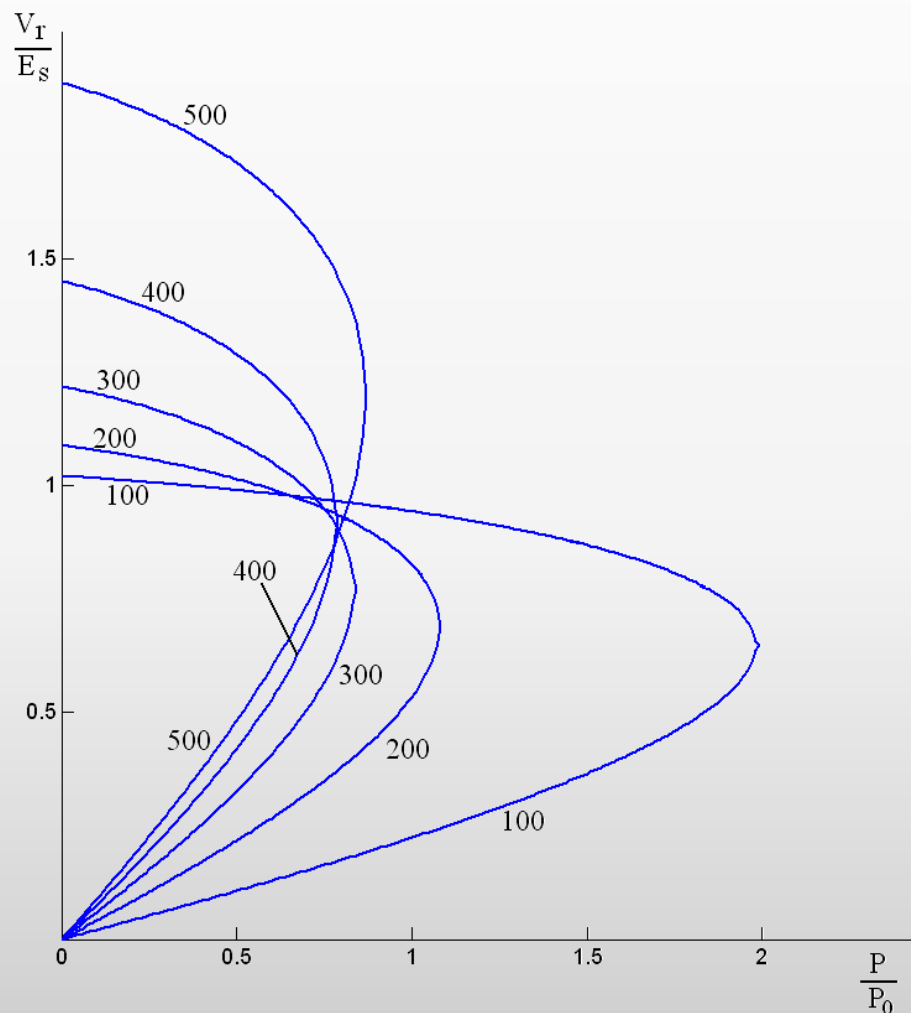
منحنی نرمالیزه شده ولتاژ انتهای خط بر حسب توان مصرفی بار در طول های مختلف خط و ضریب قدرت

۰/۹۷ پیشفاز



منحنی نرمالیزه شده ولتاژ انتهای خط بر حسب توان مصرفی بار در طول های مختلف خط و

ضریب قدرت ۰/۹۷ پسفاز



توان در ابتدای خط:

$$S_s = P_s + jQ_s = E_s I_s^*$$

$$\begin{cases} E_s = V_r \cos \theta + jZ_0 I_r \sin \theta \\ I_s = I_r \cos \theta + j \frac{V_r}{Z_0} \sin \theta \end{cases} \quad I_r = \frac{S^*}{V_r^*} = \frac{P - jQ}{V_r} \Rightarrow \begin{cases} E_s = \left(V_r \cos \theta + Z_0 \frac{Q}{V_r} \sin \theta \right) + jZ_0 \frac{P}{V_r} \sin \theta \\ I_s = \frac{P \cos \theta}{V_r} + j \left(\frac{V_r}{Z_0} \sin \theta - \frac{Q}{V_r} \cos \theta \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_s &= \left[\left(V_r \cos \theta + Z_0 \frac{Q}{V_r} \sin \theta \right) + jZ_0 \frac{P}{V_r} \sin \theta \right] \left[\frac{P}{V_r} \cos \theta - j \left(\frac{V_r}{Z_0} \sin \theta - \frac{Q}{V_r} \cos \theta \right) \right] \\ &= (P \cos^2 \theta + Z_0 \frac{P \cdot Q}{V_r^2} \sin \theta \cos \theta + P \sin^2 \theta - Z_0 \frac{P \cdot Q}{V_r^2} \sin \theta \cos \theta) + \\ &\quad j \left(-\frac{V_r^2}{Z_0} \sin \theta \cos \theta + Q \cos^2 \theta - Q \sin^2 \theta + Z_0 \frac{Q^2}{V_r^2} \sin \theta \cos \theta + Z_0 \frac{P^2}{V_r^2} \sin \theta \cos \theta \right) \\ &= P + j \left[\left(\frac{Z_0 S^2}{2V_r^2} - \frac{V_r^2}{2Z_0} \right) \sin 2\theta + Q \cos 2\theta \right] = P_s + jQ_s, \text{ Where: } S^2 = P^2 + Q^2 \end{aligned}$$

توان اکتیو در ابتدای خط:

$$P_s = P$$

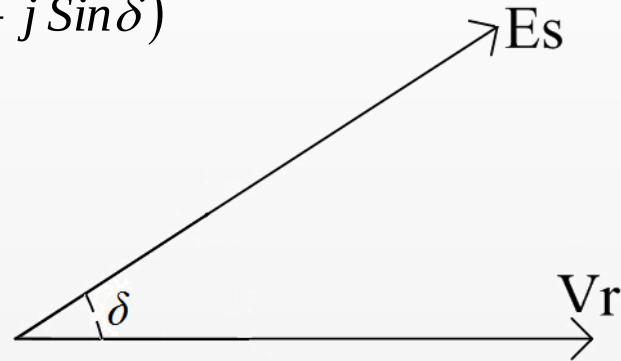
با توجه به بدون تلفات بودن خط توان تحویلی در ابتدای خط همان توان بار میباشد.

توان راکتیو در ابتدای خط:

$$Q_s = \left(\frac{Z_0 S^2}{2V_r^2} - \frac{V_r^2}{2Z_0} \right) \sin 2\theta + Q \cos 2\theta$$

δ : زاویه انتقال

$$V_r = |V_r|^{\angle 0} \Rightarrow E_s = |E_s|^{\angle \delta} = |E_s|(\cos \delta + j \sin \delta)$$



$$E_s = |E_s|(\cos \delta + j \sin \delta)$$

$$E_s = \left(V_r \cos \theta + Z_0 \frac{Q}{V_r} \sin \theta \right) + j Z_0 \frac{P}{V_r} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |E_s| \cos \delta = V_r \cos \theta + Z_0 \frac{Q}{V_r} \sin \theta \\ |E_s| \sin \delta = Z_0 \frac{P}{V_r} \sin \theta \end{cases}$$

پایداری استاتیکی خط شعاعی:

$$|E_s| \sin \delta = \frac{Z_0 P}{V_r} \sin \theta$$

$$P = \frac{|E_s| V_r}{Z_0 \sin \theta} \sin \delta = P_{\max} \sin \delta$$

δ : زاویه بار یا زاویه انتقال

$P_{\max}$: حد پایداری استاتیک ($\delta=90$)

$0.5P_{\max}$: حد پایداری دینامیک ($\delta=30$)



$$P_{\max} = \frac{|E_s| V_r}{Z_0 \sin \theta}$$

در یک خط کوتاه:

$$\text{if } \theta \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta = a\beta = a\omega\sqrt{lc}$$

$$P = \frac{|E_s|V_r}{Z_0 \sin \theta} \sin \delta = \frac{|E_s|V_r}{\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot a\omega\sqrt{LC}} \sin \delta = \frac{|E_s|V_r}{a\omega L} \sin \delta = \frac{|E_s|V_r}{X_L} \sin \delta$$

X_L : راکتانس سری خط

مثال: در یک خط بدون تلفات ۲۰۰ مایلی با راکتانس سری $\omega l = 0.5 \Omega/mi$ و سوسپیتانس موازی $\omega c = 8 \mu S/mi$

$$\theta = a\omega\sqrt{lc} = a\sqrt{\omega l \cdot \omega c} = 200\sqrt{0.5 \times 8 \times 10^{-6}} = 0.4^{Rad} = 22.9^\circ$$

با فرض $|E_s| = 1^{pu}$ در بی باری :

$$V_r = \frac{|E_s|}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos 22.9} = 1.086^{pu}$$

$$Q_s = -P_0 \tan \theta = -0.42 P_0 = -0.42^{pu}$$

$$P_{\max} = \frac{P_0}{\sin \theta} = \frac{P_0}{\sin 22.9^\circ} = 2.57^{pu}$$

خط انتقال با ولتاژ قابل تنظیم در هر دو انتها :



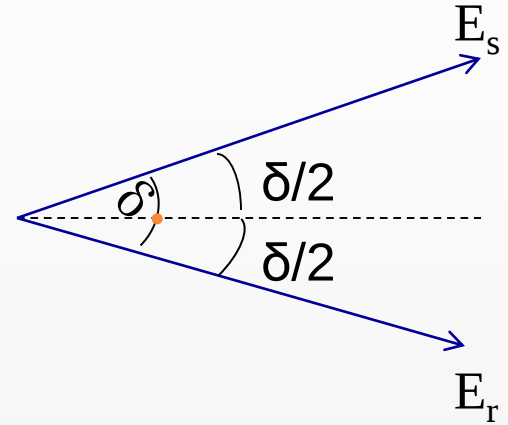
در این خط علاوه بر ولتاژ ابتدای آن ولتاژ انتهای خط نیز توسط ماشین سنکرون و یا وسیله دیگر قابل تنظیم است.

$$E_s = E_r \cos \theta + jZ_0 I_r \sin \theta \Rightarrow I_r = \frac{E_s - E_r \cos \theta}{jZ_0 \sin \theta} = \frac{j}{Z_0} [E_r \cot \theta - E_s \operatorname{cosec} \theta]$$

$$I_s = I_r \cos \theta + j \frac{E_r}{Z_0} \sin \theta = \frac{j}{Z_0} [E_r \cot \theta - E_s \operatorname{cosec} \theta] \cos \theta + j \frac{E_r}{Z_0} \sin \theta$$

$$= \frac{j}{Z_0} [E_r \operatorname{cosec} \theta - E_s \cot \theta]$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{j}{Z_0} [E_r \cot \theta - E_s \operatorname{cosec} \theta] \\ I_s = \frac{j}{Z_0} [E_r \operatorname{cosec} \theta - E_s \cot \theta] \end{cases}$$



$$\begin{cases} E_s = |E_s| e^{j\frac{\delta}{2}} = |E_s| \left(\cos \frac{\delta}{2} + j \sin \frac{\delta}{2} \right) \\ E_r = |E_r| e^{-j\frac{\delta}{2}} = |E_r| \left(\cos \frac{\delta}{2} - j \sin \frac{\delta}{2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{j}{Z_0} \left[|E_r| \left(\cos \frac{\delta}{2} - j \sin \frac{\delta}{2} \right) \cot \theta - |E_s| \left(\cos \frac{\delta}{2} + j \sin \frac{\delta}{2} \right) \operatorname{cosec} \theta \right] \\ I_s = \frac{j}{Z_0} \left[|E_r| \left(\cos \frac{\delta}{2} - j \sin \frac{\delta}{2} \right) \operatorname{cosec} \theta - |E_s| \left(\cos \frac{\delta}{2} + j \sin \frac{\delta}{2} \right) \cot \theta \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{1}{Z_0} \left[(|E_r| \cot \theta + |E_s| \operatorname{cosec} \theta) \sin \frac{\delta}{2} + j(|E_r| \cot \theta - |E_s| \operatorname{cosec} \theta) \cos \frac{\delta}{2} \right] \\ I_s = \frac{1}{Z_0} \left[(|E_r| \operatorname{cosec} \theta + |E_s| \cot \theta) \sin \frac{\delta}{2} + j(|E_r| \operatorname{cosec} \theta - |E_s| \cot \theta) \cos \frac{\delta}{2} \right] \end{cases}$$

خط متقارن :



اگر دامنه ولتاژ دو سر خط برابر تنظيم شوند به آن خط متقارن ميگوئيم.

$$|E_s| = |E_r|$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{1}{Z_0} \left[(|E_r| \cot \theta + |E_s| \operatorname{cosec} \theta) \sin \frac{\delta}{2} + j(|E_r| \cot \theta - |E_s| \operatorname{cosec} \theta) \cos \frac{\delta}{2} \right] \\ I_s = \frac{1}{Z_0} \left[(|E_r| \operatorname{cosec} \theta + |E_s| \cot \theta) \sin \frac{\delta}{2} + j(|E_r| \operatorname{cosec} \theta - |E_s| \cot \theta) \cos \frac{\delta}{2} \right] \end{cases}$$

$$|E_s| = |E_r| = E$$

$$\begin{cases} I_r = \frac{E}{Z_0} \left[(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta) \sin \frac{\delta}{2} - j(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta) \cos \frac{\delta}{2} \right] = \frac{E}{Z_0} \left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} - j \tan \frac{\theta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \\ I_s = \frac{E}{Z_0} \left[(\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta) \sin \frac{\delta}{2} + j(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta) \cos \frac{\delta}{2} \right] = \frac{E}{Z_0} \left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} + j \tan \frac{\theta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \end{cases}$$

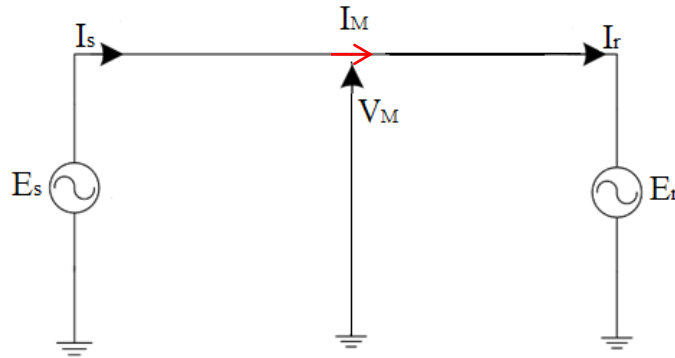
$$I_s = I_r^*$$

توان در دو سر خط :

$$\begin{aligned}
S_s &= E_s \cdot I_s^* = E \left(\cos \frac{\delta}{2} + j \sin \frac{\delta}{2} \right) \cdot \frac{E}{Z_0} \left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} - j \tan \frac{\theta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \\
&= \frac{E^2}{Z_0} \left[\left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) - j \left(\tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} - \cot \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \right] \\
&= \frac{E^2}{Z_0} \left[\frac{\sin \delta}{\sin \theta} - j \left(\tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} - \cot \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_r &= E_r \cdot I_r^* = E \left(\cos \frac{\delta}{2} - j \sin \frac{\delta}{2} \right) \cdot \frac{E}{Z_0} \left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} + j \tan \frac{\theta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \\
&= \frac{E^2}{Z_0} \left[\left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) + j \left(\tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} - \cot \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \right] \\
&= \frac{E^2}{Z_0} \left[\frac{\sin \delta}{\sin \theta} + j \left(\tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} - \cot \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} P_s = P_r = \frac{E^2}{Z_0 \sin \theta} \sin \delta \\ Q_s = -Q_r = -\frac{E^2}{Z_0} \left(\tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} - \cot \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \end{cases}$$



وضعیت در نقطه میانی خط :

$$\begin{cases} V_M = E_r \cos \frac{\theta}{2} + jZ_0 I_r \sin \frac{\theta}{2} \\ I_M = I_r \cos \frac{\theta}{2} + j \frac{E_r}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} I_r = \frac{E}{Z_0} \left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} - j \tan \frac{\theta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \\ E_r = E \left(\cos \frac{\delta}{2} - j \sin \frac{\delta}{2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_M = E \left(\cos \frac{\delta}{2} - j \sin \frac{\delta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} + j E \left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} - j \tan \frac{\theta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \\ I_M = \frac{E}{Z_0} \left(\cot \frac{\theta}{2} \sin \frac{\delta}{2} - j \tan \frac{\theta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} + j \frac{E}{Z_0} \left(\cos \frac{\delta}{2} - j \sin \frac{\delta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$V_M = E \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}, \quad I_M = \frac{E}{Z_0} \cdot \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\angle V_M = \angle I_M = 0$$

$$P_M = \frac{E_2}{Z_0} \cdot \frac{\sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{E_2}{Z_0 \sin \theta} \sin \delta = P_s = P_r$$

$$Q_M = 0 \Rightarrow p.f._M = 1$$

$$P = \frac{E_2}{Z_0 \sin \theta} \sin \delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$$

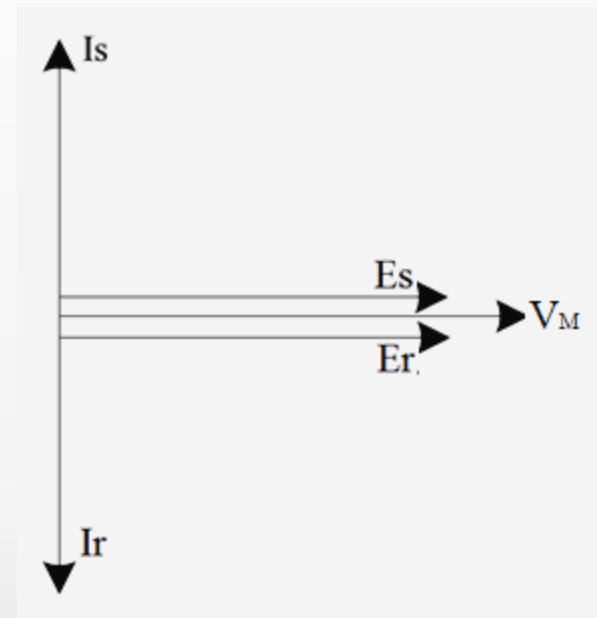
$$Q_s = -Q_r = -\frac{E^2}{Z_0} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\text{if } E = V_0 \Rightarrow Q_s = -Q_r = -\frac{V_0^2}{Z_0} \tan \frac{\theta}{2} = -P_0 \tan \frac{\theta}{2}$$

$$I_s = -I_r = j \frac{E}{Z_0} \tan \frac{\theta}{2}$$

$$V_M = \frac{E}{\cos \frac{\theta}{2}}, \quad I_M = 0$$

وضعیت خط متقارن در بی باری :



نتایج بدست آمده دلالت بر این دارد که خط متقارن را میتوان معادل دو خط شعاعی با طول نصف در نظر گرفت که پشت به پشت بهم متصل بوده توان با ضریب واحد در انتهای خود بهم تبادل مینمایند. عبارت دیگر میتوان نیمه اول خط را مشابه یک خط شعاعی که در انتها بار با ضریب قدرت واحد را تحویل میدهد مورد بررسی قرار داده وضعیت نیمه دوم را قرینه نیمه اول در نظر گرفت.

پروفیل ولتاژ و جریان در خط متقارن :

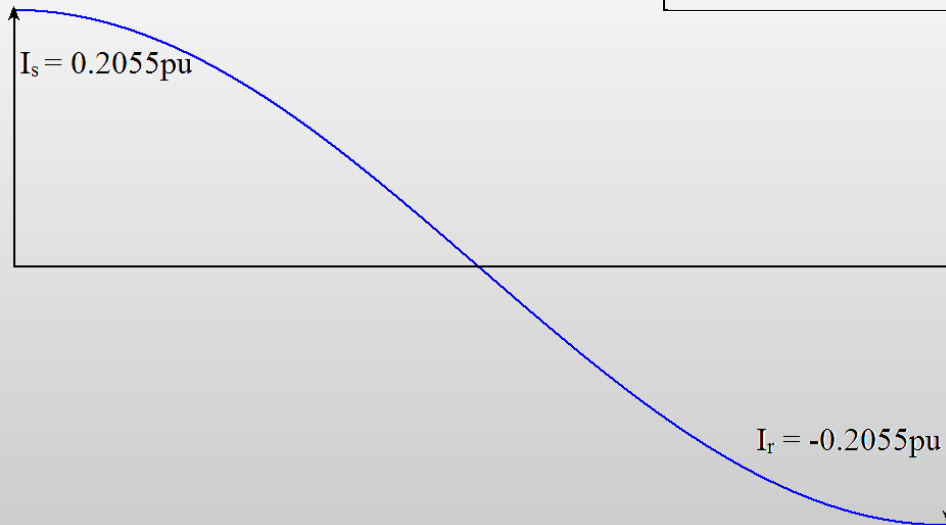
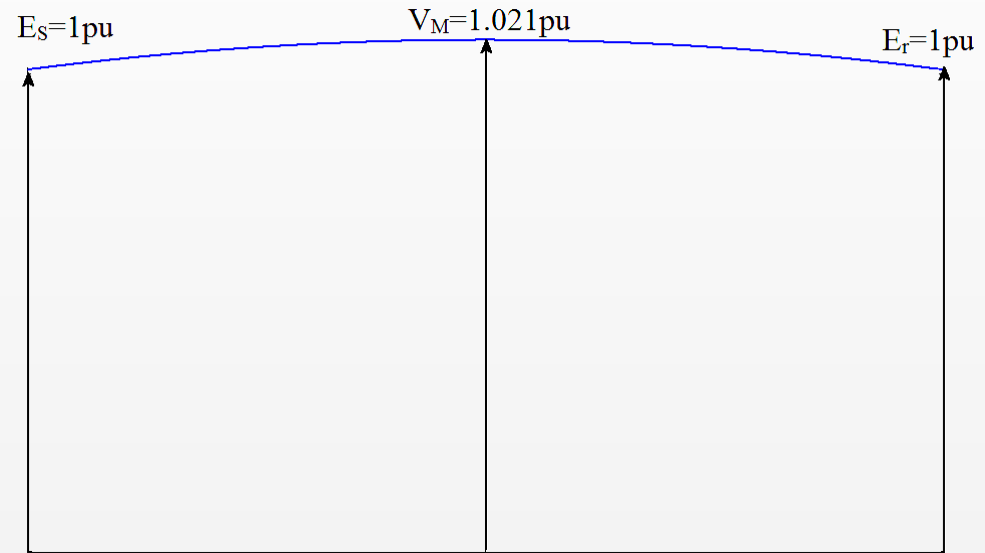
اگر a طول کل خط باشد، با توجه به روابط مربوط به خط شعاعی، برای نیمه اول خط میتوان نوشت :

$$\begin{cases} V(x) = V_M \cos \beta \left(\frac{a}{2} - x \right) + jZ_0 I_M \sin \beta \left(\frac{a}{2} - x \right) \\ I(x) = I_M \cos \beta \left(\frac{a}{2} - x \right) + j \frac{V_M}{Z_0} \sin \beta \left(\frac{a}{2} - x \right) \end{cases} \quad \text{for } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

و به دلیل تقارن:

$$\begin{cases} V(x) = V(a - x) \\ I(x) = I^*(a - x) \end{cases} \quad \text{for } \frac{a}{2} \leq x \leq a$$

برای یک خط متقارن ۲۰۰ مایلی ($\theta = 23.2^\circ$) پروفیل ولتاژ و جریان در بی باری به صورت زیر است:



$$V_M = \frac{1}{\cos\left(\frac{23.2}{2}\right)} = 1.021\text{pu}$$

بنابراین در یک خط متقارن اگر زاویه فاز ولتاژ وسط خط را مبنای فاز در نظر بگیریم، داریم:

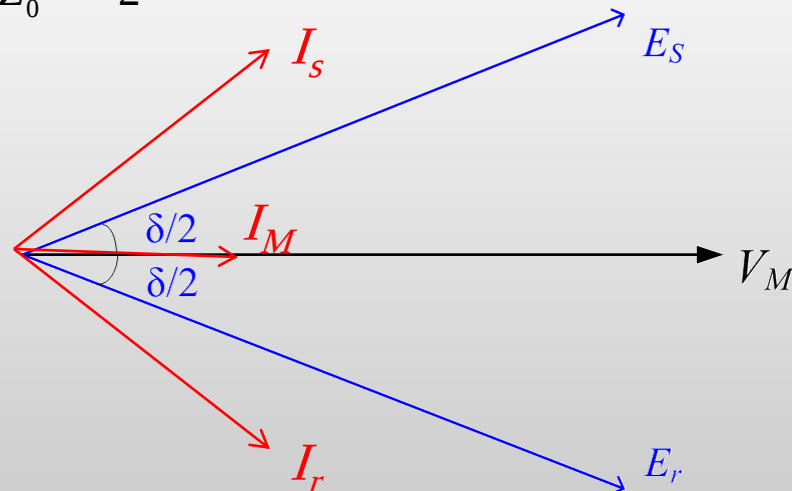
$$\vec{V}_M = |V_M|^{\angle 0} = V_M \Rightarrow \vec{I}_M = |I_M|^{\angle 0} = I_M$$

$$P = V_M I_M \Rightarrow I_M = \frac{P}{V_M}$$

$$\vec{E}_s = |E_s|^{\angle \frac{\delta}{2}}, \quad \vec{E}_r = |E_r|^{\angle -\frac{\delta}{2}}, \quad |E_s| = |E_r| = E$$

$$\begin{cases} E_s = V_M \cos \frac{\theta}{2} + jZ_0 I_M \sin \frac{\theta}{2} = V_M \cos \frac{\theta}{2} + jZ_0 \frac{P}{V_M} \sin \frac{\theta}{2} \\ I_s = I_M \cos \frac{\theta}{2} + j \frac{V_M}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} = I_M \cos \frac{\theta}{2} + j \frac{P}{I_M Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$I_r = I_s^* = I_M \cos \frac{\theta}{2} - j \frac{P}{I_M Z_0} \sin \frac{\theta}{2}$$



$$\begin{cases} E_s = V_M \cos \frac{\theta}{2} + jZ_0 I_M \sin \frac{\theta}{2} \\ E_s = |E_s| \left(\cos \frac{\delta}{2} + j \sin \frac{\delta}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |E_s| \cos \frac{\delta}{2} = V_M \cos \frac{\theta}{2} \\ |E_s| \sin \frac{\delta}{2} = Z_0 I_M \sin \frac{\theta}{2} = Z_0 \frac{P}{V_M} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

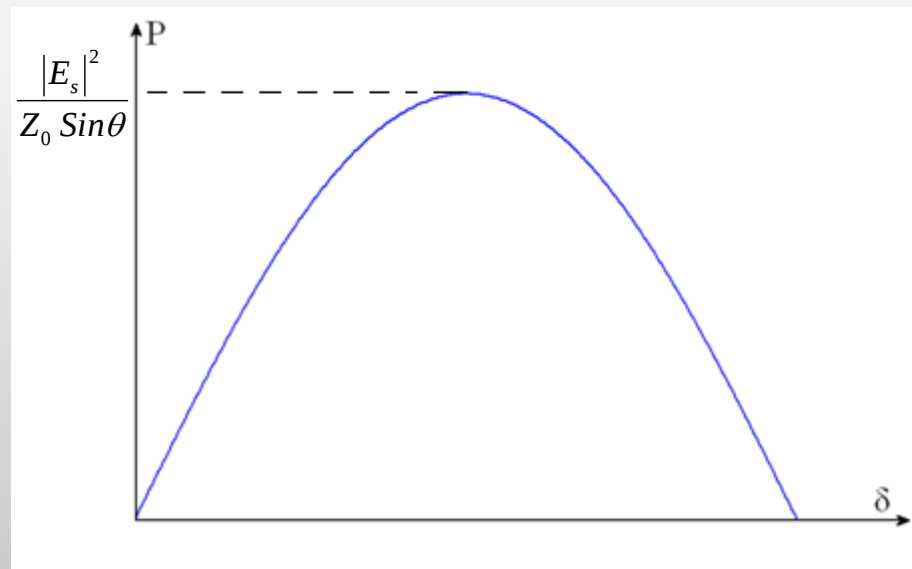
$$\Rightarrow |E_s|^2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} = Z_0 P \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow |E_s|^2 \sin \delta = Z_0 P \sin \theta$$

$$\Rightarrow P = \frac{|E_s|^2}{Z_0 \sin \theta} \sin \delta$$

$$P_{\max} = \frac{|E_s|^2}{Z_0 \sin \theta}$$

$$\text{if : } |E_s| = |E_r| = V_0$$

$$P = \frac{V_0^2}{Z_0} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \theta} = P_0 \frac{\sin \delta}{\sin \theta}$$



محاسبات توان اکتیو و راکتیو در خط متقارن با بار

$$\begin{cases} E_s = V_M \cos \frac{\theta}{2} + jZ_0 I_M \sin \frac{\theta}{2} \\ I_s = I_M \cos \frac{\theta}{2} + j \frac{V_M}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_s &= E_s I_s^* = \left[V_M \cos \frac{\theta}{2} + jZ_0 I_M \sin \frac{\theta}{2} \right] \left[I_M \cos \frac{\theta}{2} - j \frac{V_M}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ &= \left[V_M I_M \cos^2 \frac{\theta}{2} + I_M V_M \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + j \left[Z_0 I_M^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{V_M^2}{Z_0} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ &= P + j \frac{1}{2} \left[I_M^2 Z_0 - \frac{V_M^2}{Z_0} \right] \sin \theta \\ &= P_s + jQ_s \\ \Rightarrow \begin{cases} P_s = P \\ Q_s = \frac{1}{2} \left[I_M^2 Z_0 - \frac{V_M^2}{Z_0} \right] \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$

محاسبات توان راکتیو در خط متقارن با بار

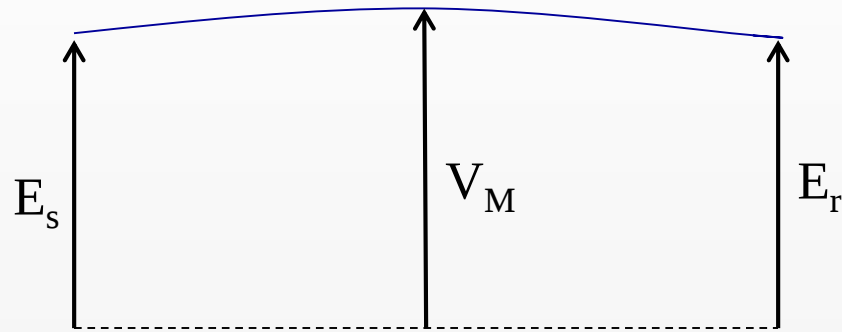
$$\begin{aligned}
Q_s &= \frac{1}{2} \sin \theta \left[I_M^2 Z_0 - \frac{V_M^2}{Z_0} \right] = \frac{1}{2} \sin \theta \left[Z_0 I_M^2 \frac{V_0^2}{V_0^2} \times \frac{V_M^2}{V_M^2} - \frac{V_M^2}{Z_0} \times \frac{V_0^2}{V_0^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sin \theta \left[\frac{Z_0}{V_0^2} \times (I_M V_M)^2 \times \left(\frac{V_0}{V_M} \right)^2 - \left(\frac{V_0^2}{Z_0} \right) \times \left(\frac{V_M}{V_0} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \sin \theta \left[\frac{P^2}{P_0} \times \left(\frac{V_0}{V_M} \right)^2 - P_0 \times \left(\frac{V_M}{V_0} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \sin \theta \left[\left(\frac{P}{P_0} \right)^2 \times \left(\frac{V_0}{V_M} \right)^2 - \left(\frac{V_M}{V_0} \right)^2 \right] P_0 = -Q_r
\end{aligned}$$

با داشتن E_s و P می توان V_M را به صورت زیر محاسبه نمود:

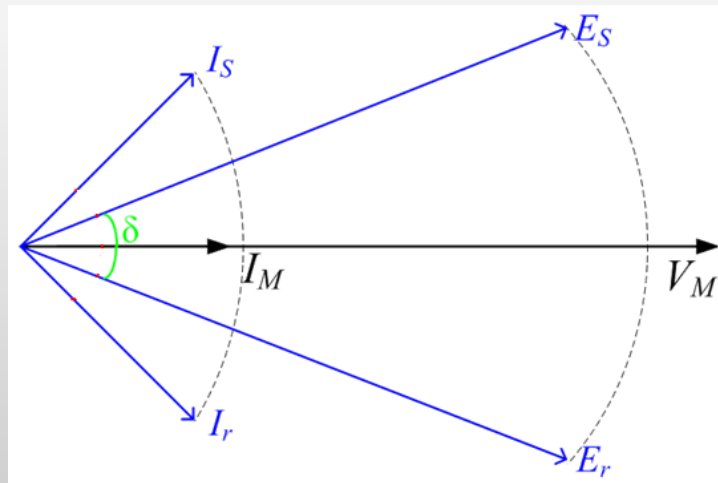
$$E_s = V_M \cos \frac{\theta}{2} + j \frac{Z_0 P}{V_M} \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow |E_s|^2 = \left(V_M \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 + \left(\frac{Z_0 P}{V_M} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \Rightarrow V_M = \dots$$

وضعیت خط در شرایط باری مختلف :

الف) کم باری : $0 < P < P_0$



پروفیل ولتاژ



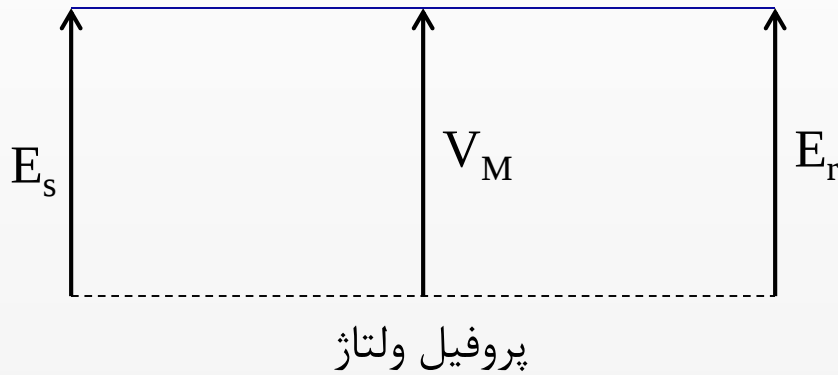
$$|E_s| = |E_r| < |V_M|$$

$$|I_s| = |I_r| > I_M$$

$$Q_s = -Q_r < 0$$

$$\delta < \theta$$

وضعیت خط در شرایط باری مختلف :



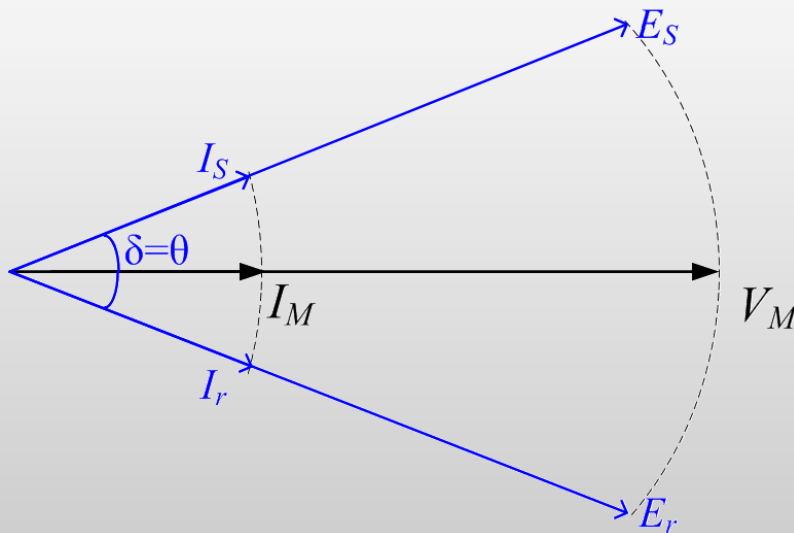
(ب) بار طبیعی : $P = P_0$

$$|E_s| = |E_r| = |V_M| = V_M$$

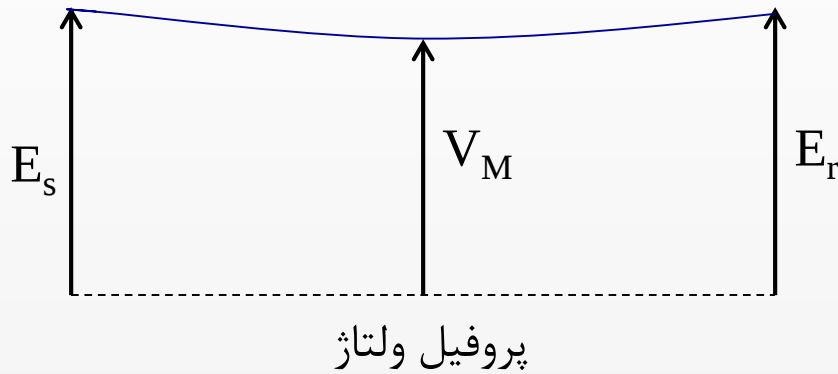
$$|I_s| = |I_r| = |I_M| = I_M$$

$$Q_s = -Q_r = 0$$

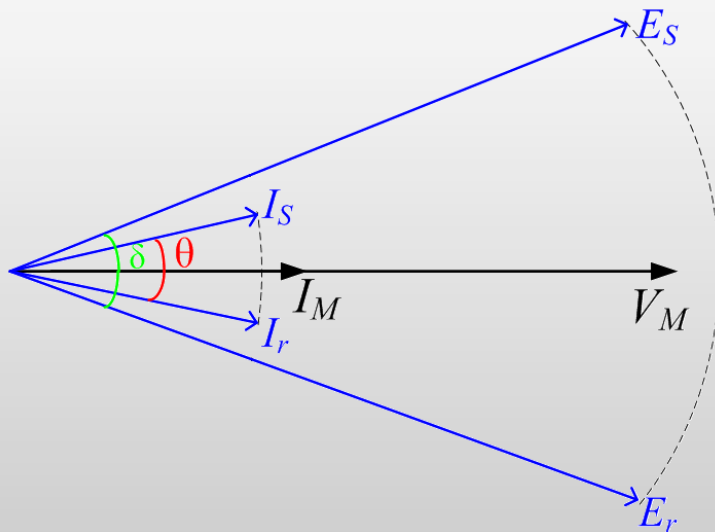
$$\delta = \theta$$



وضعیت خط در شرایط باری مختلف :



ج) پرباری : $P > P_0$



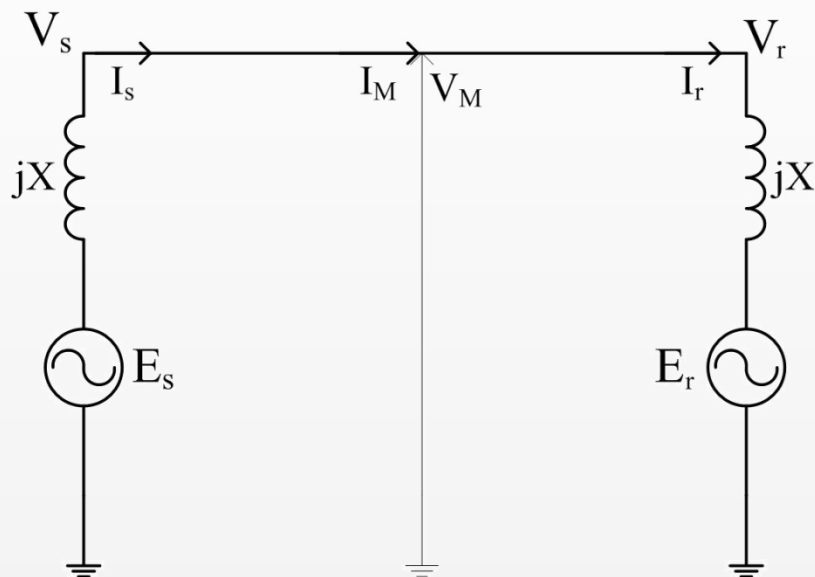
$$|E_s| = |E_r| > |V_M|$$

$$|I_s| = |I_r| < I_M$$

$$Q_s = -Q_r > 0$$

$$\delta > \theta$$

خط متقارن با در نظر گرفتن امپدانس منبع



با در نظر گیری امپدانس منبع، محاسبات مربوط به ولتاژ و جریان به صورت زیر خواهد بود:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{|E_s||E_r|}{Z_0 \sin \theta} \sin \delta \\ V_0 &= |E_s| = |E_r| \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \frac{V_0^2}{Z_0 \sin \theta} \sin \delta = \frac{P_0}{\sin \theta} \sin \delta, \quad P_{\max} = \frac{P_0}{\sin \theta}$$

$$E_s = V_s + jX_s I_s, \quad E_r = V_r - jX_s I_r$$

$$\begin{cases} V_s = V_M \cos \frac{\theta}{2} + jZ_0 I_M \sin \frac{\theta}{2} \\ I_s = I_M \cos \frac{\theta}{2} + j \frac{V_M}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

$$E_s = V_s + jX_s I_s \Rightarrow E_s = \left(V_M \cos \frac{\theta}{2} + jZ_0 I_M \sin \frac{\theta}{2} \right) + jX_s \left(I_M \cos \frac{\theta}{2} + j \frac{V_M}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\begin{cases} E_s = V_M \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{X_s}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \right) + jI_M \left(Z_0 \sin \frac{\theta}{2} + X_s \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ E_s = |E_s| \left(\cos \frac{\delta}{2} + j \sin \frac{\delta}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |E_s| \cos \frac{\delta}{2} = V_M \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{X_s}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ |E_s| \sin \frac{\delta}{2} = I_M \left(Z_0 \sin \frac{\theta}{2} + X_s \cos \frac{\theta}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |E_s|^2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} = V_M I_M \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{X_s}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(Z_0 \sin \frac{\theta}{2} + X_s \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad |E_s| = |E_r| = E$$

$$|E|^2 \sin \delta = 2P \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{X_s}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(Z_0 \sin \frac{\theta}{2} + X_s \cos \frac{\theta}{2} \right) \Rightarrow P = \frac{E^2}{\left(Z_0 - \frac{X_s^2}{Z_0} \right) \sin \theta + 2X_s \cos \theta} \sin \delta$$

اگر بخواهیم قدرت انتقالی را بر حسب ولتاژ وسط خط نشان دهیم، داریم:

$$E = |E_s| = \frac{V_M \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{X_s}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \frac{\delta}{2}} \Rightarrow P = \dots = \frac{|V_M|^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{X_s}{Z_0} \sin \frac{\theta}{2} \right)}{Z_0 \sin \frac{\theta}{2} + X_s \cos \frac{\theta}{2}} \cdot \tan \frac{\delta}{2}$$

اگر امپدانس منبع را صفر در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{if } X_s = 0 \Rightarrow P = \frac{|V_M|^2}{Z_0 \tan \frac{\theta}{2}} \cdot \tan \frac{\delta}{2}$$

مثال: یک خط متقارن با مشخصات زیر داریم. مطلوب است:

الف) زاویه بین V_s و E_s

$$\theta = 23.2^\circ, X_s = 0.35 \text{ pu}, a = 200 \text{ mi}, P = P_0$$

ب) زاویه بین E_r و E_s

دیاگرام برداری ولتاژها و جریان های خط به صورت زیر است:

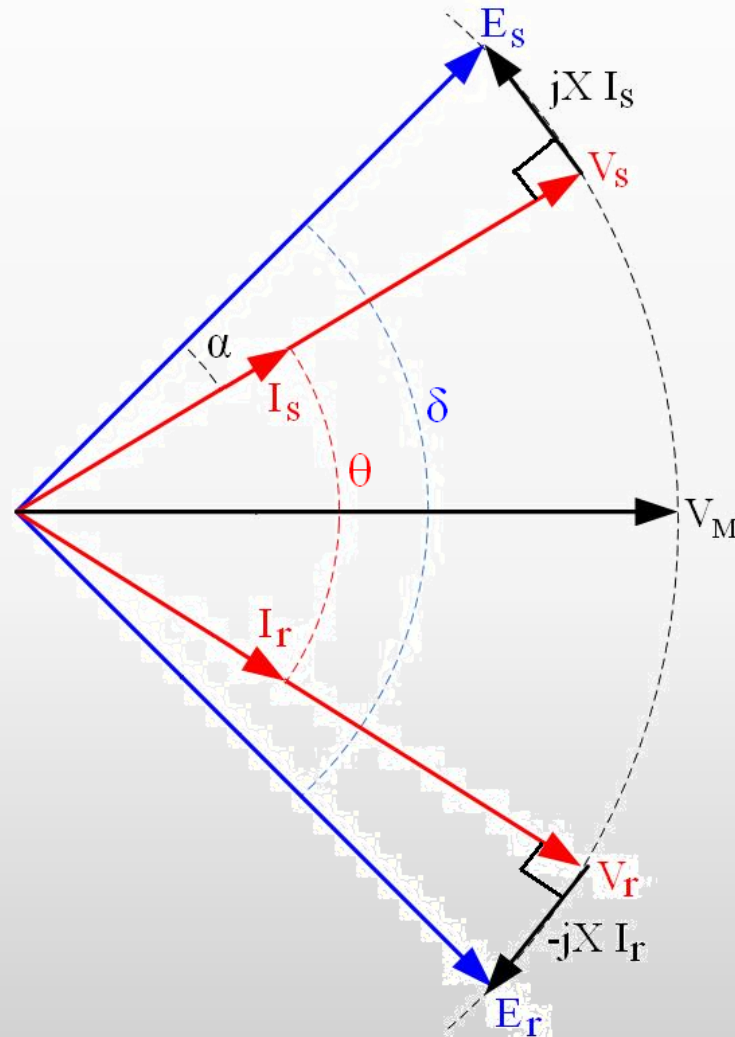
$$P = P_0 \Rightarrow V_M = |V_s| = |V_r| = 1 pu$$

$$I_r = I_s = 1 pu$$

$$X_s I_s = X_r I_r = 0.35 pu$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{0.35}{1} \right) = 19.3^\circ$$

$$\delta = 23.2^\circ + 2 \times 19.3^\circ = 61.8^\circ$$



معادلات کلی خط انتقال:

$$V_r = |V_r| \angle 0^\circ$$

$$V_s = V_r \cos \theta + jZ_0 I_r \sin \theta = V_r \cos \theta + jZ_0 \left(\frac{P_r - jQ_r}{V_r} \right) \sin \theta$$

$$= \left(V_r \cos \theta + \frac{Z_0 Q_r}{V_r} \sin \theta \right) + j \frac{Z_0 P_r}{V_r} \sin \theta$$

$$V_s = |V_s| (\cos \delta + j \sin \delta)$$

$$|V_s| \cos \delta = V_r \cos \theta + \frac{Z_0 Q_r}{V_r} \sin \theta$$

$$Q_r = \frac{V_r (|V_s| \cos \delta - V_r \cos \theta)}{Z_0 \sin \theta}$$

$$Q_s = - \frac{V_s (|V_r| \cos \delta - V_s \cos \theta)}{Z_0 \sin \theta}$$

به طور مشابه :

برای یک خط متقارن:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{V_r (|V_s| \cos \delta - V_r \cos \theta)}{Z_0 \sin \theta} \\ |V_s| &= |V_r| \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_r = -Q_s = \frac{|V_s|^2 (\cos \delta - \cos \theta)}{Z_0 \sin \theta}$$

برای یک خط کوتاه:

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \cos \theta \approx 1, \sin \theta \approx \theta$$

$$Q_s = -\frac{|V_s|^2 (\cos \delta - 1)}{Z_0 \theta} = -\frac{|V_s|^2 (\cos \delta - 1)}{X_l} = \frac{|V_s|^2 (1 - \cos \delta)}{X_l}$$

X_l : راکتانس سری خط

در خطوط کوتاه محدودیت حرارتی داریم نه پایداری.