مبحث اول: اصول و کاربرد ژئوستاتیک در تخمین خصوصیات فیزیکی آب و خاک

مبحث ژئوستاتیک بحث بسیار گسترده‌ای است. اصولاً برای تخمین روی پدیده‌هایی که ما اندازه‌گیری نکرده‌ایم چکار باید بکنیم ممکن است چند جا اندازه‌گیری شده باشد ولی همه نقاط اندازه‌گیری نشده باشد. ساده‌ترین روش این است که از نقاط اندازه‌گیری شده میانگین گرفته شده و برای نقاط اندازه‌گیری نشده از میانگین حساب شده استفاده کرد. بحث ژئوستاتیک در این رابطه روش‌های دقیق‌تری را ارایه می‌کند. اصولاً اگر بخواهیم نقاطی را تخمین بزنیم نحوه نمونه‌برداری از آن نقاط چگونه باید باشد که در این حالت هم الگو (نحوه) و هم تعداد نمونه مناسب است بعد از مشخص شدن الگو و تعداد باید چگونگی تخمین زدن مشخص کرد.

اگر این روش‌ها بخوبی یاد گرفته شود نه تنها برای مبحث Soil Hydrology در وسایل حواشی و همچنین یک وغیره بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مبحث ژئوستاتیک ابتدا از معدن شروع شد و پس از آن در کاربرد روابط ریاضی به تفسیر مسایل ربط داده شد.

به مقدار کمیت های مرتبط با پدیده ها و فرآیندهای مختلف از دو دیدگاه قطعیت و یا احتمال می‌توان نگریست. بسیاری از علوم تجربی در محدوده‌های مورد بررسی خود با عدم قطعیت مواجه هستند. لذا آمار و احتمال در اکثر علوم نقش کلیدی بازی می‌کند. بطور کلی برای شناخت هر جامعه‌ای نیاز به داشتن مقدار یا مقادیری از آن جامعه می‌باشد. اگر جامعه (Population) مورد بررسی را "کل" فرض کنیم نمونه‌ای برداشت شده از آن "جزء" تلقی می‌شود. گرچه اندازه‌گیری خواص مورد نیاز در جزء (نمونه) امکان پذیر است ولی نمی‌توان همه درصد معرف کل قلمداد شود زیرا رابطه مبهم و احتمال پذیر است. برای شناخت بیشتر آن معرف بودن جزء نسبت به کل می‌توان از قوانین احتمال استفاده کرد. برای شناخت جامعه (کل) که مجهول است می‌توان بر پایه توانایی آمار و پارامترهای آن از روی جزء مطالعه شده (معلوم) تخمین زد. تخمین پارامترهای کل (جامعه) از روی پارامترهای نمونه (جزء) در زمره امور احتمال پذیر یا غیر قطعی است بنابراین میتوان به دستیابی به واقعیت قطعی در مورد کل نزدیک شد. این عدم قطعیت با خطای تخمین "بیان می‌شود.

پارامترهای آماری

میانگین (mean): مهمترین ویژگی در مورد یک متغیر تصادفی، آگاهی از کجایی است که بقیه داده‌ها حول و حوش آن پراکنده‌اند. میانگین در واقع مقدار متوسط (average) توزیع است. در مورد n نمونه مستقل، میانگین از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

x_i - متغیر مستقل مورد نظر

n - تعداد نمونه

میانگین نمونه‌ای یعنی $\bar{X}$ تخمین‌گر نااریبی (unbiased) از میانگین واقعی جامعه است که امید میانگین واقعی معمولاً با μ نشان داده می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mu = E(\bar{X}) = E(X)$$

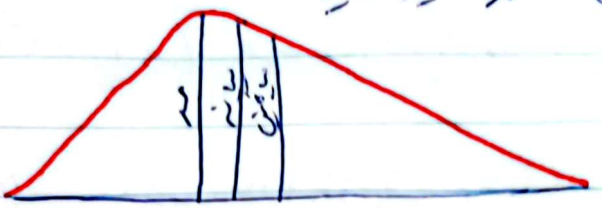
اگر تابع توزیع $f(x)$ در دست باشد خواهیم داشت:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

یکی از حدسهای آماره تقسیم مرتبش مناسبی برای تخمین میانگین جامعه کل (μ) به کمک تعداد معدودی نمونه است.

مد (mode): مد یک توزیع داده‌ای است که بیشترین فراوانی را دارد. به بیان دیگر، طول نقطه ماکزیمم سراسری، مد نامیده می‌شود.

میانه (median): مقداری از یک توزیع که ۵۰ درصد از مقادیر موجود کمتر از آن و ۵۰ درصد مقادیر موجود بیشتر از آن هستند میانه گوییم



مثال: تابع توزیع متغیری دامنه تغییرات آن به شکل زیر است میانگین آن را محاسبه کنید

$$f(x) = \frac{x}{2} \qquad 0 < x < 2$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x \frac{x}{2}\,dx = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{6}$$

واریانس یا پراش (variance): واریانس هر توزیع در حقیقت معیاری از پراکندگی مقادیر حول میانگین آن است. کمیت میانگین برای بیان تغییرپذیری یک متغیر مستقل، کافی نیست.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

اگر تابع توزیع حاصله $f(x)$ موجود باشد واریانس خواهد شد:

$$\sigma^2 = E(x-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

برای اینکه تخمین واریانس یک جامعه براساس تعداد معدودی نمونه به دست می‌آید نااریب باشد، مخرج رابطه ذکر شده را به $n-1$ تغییر می‌دهند

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

اگر رابطه فوق را ساده کنیم خواهیم داشت

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

علت اینکه مخرج n به $n-1$ تبدیل می‌شود آن است که در عمل به هنگام محاسبه واریانس، میانگین واقعی جامعه یعنی μ را نمی‌دانیم ولی به وسیله میانگین نمونه یعنی $\bar{x}$ آن را برآورد می‌کنیم. میانگین نمونه‌ها به گونه‌ای محاسبه می‌شود که توان دوم انحرافها در حول آن به حداقل برسد به عبارت دیگر رابطه $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ مقداری از $\bar{x}$ را به دست می‌دهد که با ازای آن مقدار $\sum (x_i - \bar{x})^2$ بین کلیه مقادیر ممکن که می‌شد انتخاب کرد حداقل باشد.

به بیان دیگر، عبارت $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ تخمین زن اریبی است و برای رفع این اشکال، مخرج کسر را به $n-1$ تغییر می‌دهند تا برآوردی بزرگتر از واریانس به دست آید و از اریبی آن کاسته شود.

مثال: فرض می‌کنیم که تابع توزیع به شکل زیر باشد،

$f(x) = \frac{x}{2}$ $\quad 0 < x < 2$

در این صورت واریانس چقدر خواهد شد؟

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$\mu = \int_0^2 x f(x)\,dx = \int_0^2 x \times \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{8}{6}$$

$$\sigma^2 = \int_0^2 (x - \tfrac{8}{6})^2 (\tfrac{x}{2})\,dx = \int_0^2 (x^2 - 2.67x + 1.78)(\tfrac{x}{2})\,dx$$

$$\sigma^2 = \int_0^2 (\frac{x^3}{2} - \frac{2.67}{2}x^2 + \frac{1.78}{2}x)\,dx$$

$$\sigma^2 = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{2.67}{6}x^3 + \frac{1.78}{4}x^2\right]_0^2 = 0.22$$

انحراف استاندارد یا انحراف معیار (standard deviation): گرچه واریانس

تا حد قابل توجهی تغییرپذیری را نشان می‌دهد ولی واحد آن، واحد مجذور واحد

متغیر مورد نظر است. به همین دلیل اگر متغیر مورد مطالعه طول باشد واریانس

برحسب m^2 خواهد بود که نامأنوس است. برای رفع این اشکال جذر واریانس

را به کار می‌برند و آن را انحراف معیار می‌نامند.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

در مورد جامعه ای که تابع آن $f(x)$ است داریم:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx}$$

در مورد یک جامعه نمونه، μ و σ به عنوان پارامتر و $\bar{X}$ و S به عنوان شاخص‌های آماری نامیده می‌شوند.

ضریب تغییرات (coefficient of variation): گرچه بزرگی انحراف معیار تا حدی چگونگی تغییرپذیری متغیر را بیان می‌کند اما به تنهایی برای مقایسه دو توزیع مختلف کافی نیست. به عنوان مثال اگر انحراف معیار نمونه‌های سری A و سری B هر دو برابر ۴ باشد ولی نمونه سری A دارای میانگین ۸ و سری B دارای میانگین ۵۰ باشد واضح است سری A نسبت به سری B تغییرات خیلی شدیدی دارد. برای اینکه میزان تغییرات مستقل از بزرگی میانگین‌ها باشد، از تعریف دیگری موسوم به ضریب تغییرات استفاده می‌کنند:

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \times 100$$

CV: ضریب تغییرات — coefficient of variation

S: انحراف معیار — standard deviation

$\bar{X}$: میانگین — mean

توزیع فراوانی (Frequency distribution) : نتیجه محتمل انتخاب تصادفی یک نمونه را با

توزیع احتمال بیان می‌کند. چنین توزیعی ممکن است معلوم یا مجهول باشد. ممکن است

بدانیم که شانس داشتن عیاری در فاصله ۳ تا ۴ درصد با ۶ تا ۸ درصد در یک کانسار

چقدر است. در عمل، چنین توزیعی هیچگاه از قبل مشخص نیست. تنها کاری که می‌توان

انجام داد ابتدا محاسبه توزیع احتمال تجربی است و آنگاه مشخص کرد که چه توزیع تئوریکی

ممکن است یک چنین توزیع تجربی نمونه‌گیری را ایجاد دهد.

در مورد یک متغیر دلخواه، که فقط می‌تواند مقادیر صحیح را اختیار کند، برای هر مقدار ممکن

x یک احتمال $P(x)$ همراه با آن وجود دارد. واضح است که $P(x)$ نمی‌تواند منفی

باشد و نیز جمع تمام مقادیر ممکن $P(x)$ برابر واحد است. در مورد یک توزیع پیوسته،

بازای هر مقدار x، احتمال معینی $f(x)$ مربوط به آن وجود دارد و بدین ترتیب

احتمال آنکه مقدار مورد نظر ما بین x و $x+dx$ واقع باشد، برابر $f(x)dx$ است

در اینجا dx یک بی‌نهایت کوچک در نظر گرفته شده است. بنابراین احتمال آنکه اندازه

x بین a و b باشد، عبارت خواهد بود از

$$\text{احتمال}\{a<x<b\} = \int_a^b f(x)dx$$

در اینجا مورد نیز این احتمال نمی‌تواند منفی باشد اگر ببینیم حدود $+\infty$ و $-\infty$ - انتگرال تبدیل می‌شود خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

مثال: فرض می‌کنیم که تابع احتمال به شکل زیر باشد:

$$f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$$

این در واقع یک توزیع یکنواخت در فاصله ۰ تا ۱ است. احتمال اینکه متغیر در محدوده مشخصی از این فاصله قرار گیرد را می‌توان از تابع توزیع به دست آورد. به عنوان مثال می‌خواهیم احتمال اینکه متغیر در فاصله ۰.۲ تا ۰.۴ باشد را به دست آوریم

$$\text{احتمال } \{0.2 \le x \le 0.4\} = \int_{0.2}^{0.4} f(x)dx = \int_{0.2}^{0.4} 1\,dx = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

توزیع احتمال تجمعی (cumulative probability distribution): توزیع احتمال تجمعی و یا بطور ساده‌تر توزیع تجمعی $F(x_0)$، نشانگر درصد احتمالی است که طی آن متغیر x کوچکتر یا مساوی مقدار معینی x_0 باشد:

$$F(x_0) = P(x \le x_0)$$

$$\text{احتمال } \{x \le x_0\} = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = F(x_0)$$

واضح است که همواره روابط زیر وجود دارد:

$$F(-\infty) = 0 \quad , \quad F(+\infty) = 1$$

مثال: تابع احتمال به شکل زیر است. احتمال اینکه متغیر تابع مورد نظر کمتر از x_0 باشد را محاسبه کنید!

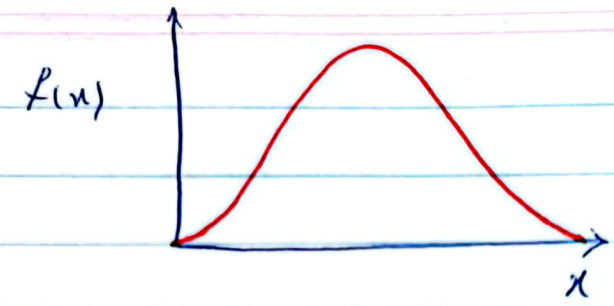
$$f(x) = 1$$

$$F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx = \int_0^{x_0} 1\, dx = \int_0^{x_0} dx = x_0$$

توزیع یک متغیره: توزیع فراوانی حاصل از n نمونه را به سادگی می‌توان به یک توزیع احتمال تبدیل کرد. برای اینکار، هرکدام از فراوانی‌ها را بر n یعنی تعداد کل مشاهدات تقسیم می‌کنند.

توزیع نرمال (Normal distribution): در بسیاری موارد، توزیع متغیرهای تصادفی (نرمال) از نوع توزیع طبیعی است. از جمله این موارد می‌توان قد انسان را اشاره کرد. متغیر شاخص این توزیع، متغیری معروف زنگوله‌ای شکل است. در مواردی که مقادیر یک پدیده ناشی از وجود چندین عامل مستقل از هم باشد، چنین توزیعی قابل انتظار است. در شکل زیر ۴ متغیر توزیع نرمال نشان داده شده است و تعادل آن تابع دو پارامتر μ و σ است.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right]$$



شکل زنگوله ای مانند توزیع نرمال

توزیع نرمال سبت به μ (میانگین) متقارن است. σ مقدار انحراف معیار است.

تابع تجمعی این مدل توزیع مقدار از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} EXP\left[-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right]$$

جدول‌های توزیع نرمال: توزیع تجمعی تابع $F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$ را از توان بسادگی محاسبه کرد و از آنجا که مقادیر این تابع همواره مورد نیاز است لذا بهتر است از جدول‌های موجود در این زمینه استفاده شود. این جدول‌ها برای کل تابع $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ می‌باشند

این امر به منزله تغییر متغیر و «استاندارد کردن مقادیر» است تا به توزیع توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف استاندارد واحد دست یابیم.

علت این امر این است که اگر بخواهیم توزیع مقادیر توزیع‌های نرمال مختلف را رسم کنیم، ترکیب وضعیت خاص خود را خواهند داشت که شاید آنها شکل است. بنابراین اگر

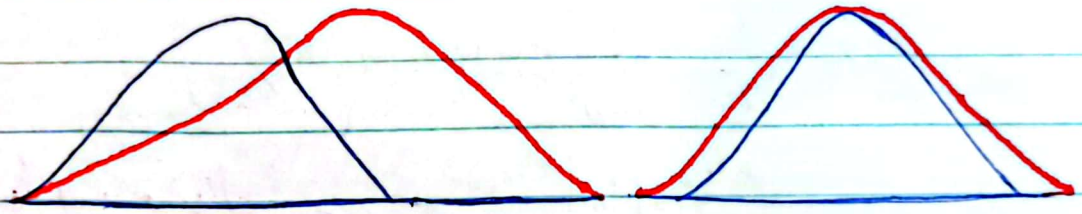
به جای متغیر اصلی x، متغیر جدید $x-\mu$ را رسم کنیم، میانگین تمام توزیع‌ها مثل هم

منطبق می‌شوند البته دامنه‌های منحنی‌ها هنوز مختلف است. برای رفع این مشکل می‌توان

متغیر $x-\mu$ را بر انحراف معیار (انحراف استاندارد) تقسیم کرد تا متغیر جدید $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$

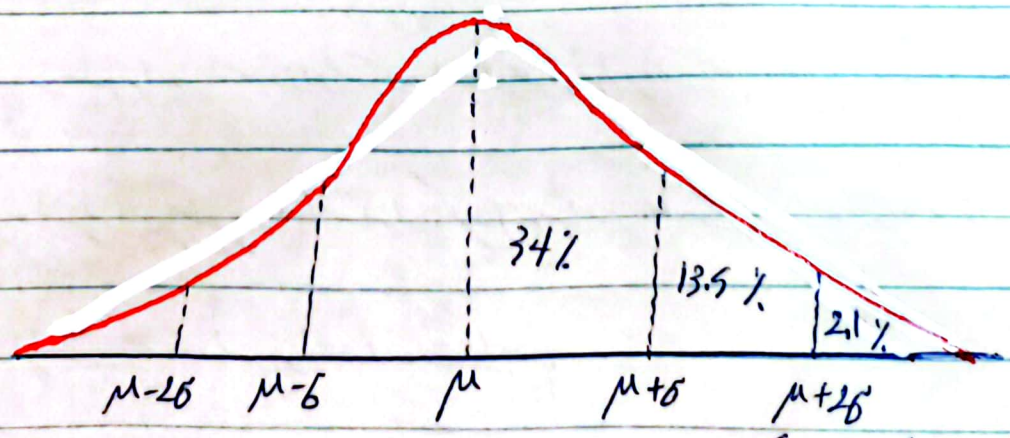
به دست آید. حسن این کار این است که واحد تغییرات در توزیع جدید، انحراف استاندارد

است و بنابراین منحنی‌های مختلف به آسانی قابل قیاس خواهند شد.



دو توزیع با میانگین مشترک صفر

دو توزیع نرمال مختلف



شکل عمومی یک توزیع نرمال استاندارد شده

مثال: مشخصات مجموعه‌ای از عناصر را که توزیع نرمال دارند با شرح زیر است

$\mu = 10$ $\quad \sigma = 2$

درصد نمونه‌هایی را که عیارشان بیش از 12 است محاسبه کنید.

$$P(x>12) = 1 - P(x<12) = 1 - \int_{-\infty}^{12} f(u)du$$

به جای محاسبه انتگرال از جدول توزیع نرمال استفاده می‌کنیم ابتدا متغیر جدید z را به دست می‌آوریم

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{12-10}{2} = 1$$

$$z = 1 \xrightarrow{\text{جدول توزیع نرمال}} 0.8413$$

بنابراین 84.13 درصد از نمونه‌ها عیار کمتر از 12 دارند.

$$P(x>12) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

15.87 درصد از نمونه‌ها دارای عیار بیشتر از 12 می‌باشد.

قضیه حد مرکزی c.l.t (central limit theorem)

از جمعیتی، تعداد n نمونه تهیه می‌کنیم و میانگین حاصل از آن‌ها را $\bar{x}$ می‌نامیم. اگر n بار این کار را تکرار کنیم، واضح است که میانگین‌هایی که به دست می‌آیند، الزاماً مساوی نیستند اما تمامی آن‌ها حول میانگین مشترکی متمرکز شده‌اند. هر چقدر تعداد دفعات یعنی n زیادتر شود داریم این میانگین‌ها کمتر شده و به میانگین واقعی نزدیک‌تر می‌شوند.

براساس قضیه حد مرکزی، صرف‌نظر از اینکه گروه‌های n نمونه چه توزیعی داشته باشند

* جدول توزیع نرمال

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5414	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

* اعداد منفی در جدول ذکر نشده است برای به دست آوردن آن می‌توان به شرح

$$F(-z) = 1 - F(z)$$

زیر عمل کرد

مثال $z = -0.5 \Rightarrow 1 - 0.6915 = 0.3085$ ← برابر با $z = 0.5$

مثال $z = -1.8 \Rightarrow 1 - 0.9641 = 0.0359$ ← برابر با $z = 1.8$

میانگین آنها توزیع نرمال دارد و واریانس میانگین حاصل از n بار اندازه‌گیری، n برابر کوچکتر از واریانس یک اندازه‌گیری است. البته این امر در صورتی صادق است که نمونه‌ها را بتوان متغیر تصادفی در نظر گرفت.

قضیه حد مرکزی، بیانگر آن است که میانگین کلی نمونه‌ها یعنی $\bar{x}$، تقریباً مطابق طبیعی نرمال توزیع شده و میانگین آن μ و انحراف معیارش $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است. این قضیه میانگر این مطلب نیز هست که با افزایش تعداد نمونه‌ها، وضعیت تخمین بهتر می‌شود.

سطح اعتماد (confidence limits): هر تخمین که براساس داده‌های نمونه‌ای انجام می‌گیرد، با محدوده‌ای از خطا همراه است که سطح اعتماد یا حدود اعتماد خوانده می‌شود. متداولترین سطح اعتمادی که در عمل به کار می‌رود سطح اعتماد ۹۵ درصد است که به شرح زیر تعیین می‌شود:

فرض می‌کنیم که $\bar{x}$ میانگین نمونه‌ها، σ انحراف معیار آنها و n تعداد نمونه‌ها باشد. در این صورت مقادیر $\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ و $\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ به ترتیب حدود بالا و پایین میانگین مورد انتظار با سطح اعتماد ۹۵ درصد خواهد بود.

عدد ۲ ($\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$) که در مورد سطح اعتماد ۹۵ درصد به کار می‌رود در واقع از خاصیت

توزیع نرمال به دست می‌آید. به ترتیبی که اینم، 68 درصد سطح زیر منحنی توزیع نرمال در فاصله $\pm\sigma$ و 95 درصد آن در فاصله $\pm 2\sigma$ و 99.7 درصد آن در فاصله $\pm 3\sigma$ گسترش دارد. به ازای سایر مقادیر می‌توان از جدول ذیل استفاده کرد.

سطح اعتماد (٪)	68.3	77	78	90	95	97.5	98.8	99.7
ضریب z	1	1.2	1.5	1.645	2	2.2	2.5	3

مثال: اطلاعات مربوط به یک مرحله نمونه‌برداری به شرح زیر است:

$\bar{x} = 30 \quad \sigma = 16 \quad n = 16$

حدبالا و پایین میانگین را با سطح اعتماد 95 درصد مشخص کنید.

$$\text{حد پایین} = \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 30 - \frac{2\times 16}{\sqrt{16}} = 22$$

$$\text{حد بالا} = \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 30 + \frac{2\times 16}{\sqrt{16}} = 38$$

این نتیجه به آن معنی است که به احتمال 95 درصد میانگین واقعی از 22 بیشتر و از 38 کمتر است.

این مطلب را به خوبی دکتر نیز می‌توان به کار برد، به این معنی که می‌توان تعداد نمونه‌های لازم برای رسیدن به یک سطح اعتماد معین را محاسبه کرد، در این گونه موارد، واریانس نمونه‌ها باید از قبل مشخص باشد.

مثال: در مثال قبل مقدار نمونه‌های لازم را برای آنکه حدود تغییرات میانگین نمونه‌ها با احتمال ۹۵ درصد از ± 2 درصد تجاوز نکند محاسبه کنید!

نیم‌بند خطای مجاز برابر $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ است

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow \frac{2\times 16}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow n = 256$$

مثال: ۱۰ نمونه از یک کانسار مس به شرح زیر در دست است. حدود تغییرات عیار آهن را با سطح اعتماد ۹۵ درصد محاسبه کنید!

55.8، 54.8، 56.5، 56، 57.5، 54.7، 55.3، 56.3، 55.9، 56.3

$\bar{x} = 55.91$ $\quad \sigma = 0.835$

$$\text{حد بالا} = \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 55.91 + \frac{2\times 0.835}{\sqrt{10}} = 56.44$$

$$\text{حد پایین} = \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 55.91 - \frac{2\times 0.835}{\sqrt{10}} = 55.38$$

$$55.38 < x < 56.44$$

توزیع لاگ نرمال (lognormal distribution): تجربیات نشان می‌دهد که در بسیاری از موارد، نمونه‌ها از توزیع نرمال تبعیت نمی‌کنند اما لگاریتم آن‌ها توزیع نرمال گرایش دارد. معادله توزیع لاگ نرمال به شرح زیر است

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma_{\ln} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-(\ln x - \mu_{\ln})^2 / 2\sigma_{\ln}^2\right]$$

x - متغیر مورد نظر است

$\sigma_{\ln}$ - انحراف معیار لگاریتم های متغیر مورد نظر

$\mu_{\ln}$ - میانگین حسابی لگاریتم‌های متغیر مورد نظر

تخمین میانگین در توزیع لاگ نرمال: تخمین میانگین در توزیع لاگ نرمال، از طریق ریاضی مشکل است. در مورد توزیعی که چولگی مثبت دارند میانگین حسابی از میانگین واقعی توزیع زیادتر است. میانگین حسابی، یک تخمینگر (estimator) نامریز از میانگین واقعی یک توزیع لگاریتمی است زیرا به شدت تحت تاثیر اعداد بالا قرار دارد.

برای تخمین میانگین واقعی توزیع لگاریتمی، بسته به اینکه واریانس واقعی داده‌ها از معلوم یا مجهول باشد، از روش‌های متفاوتی استفاده می‌شود. باید توجه داشت که در عمل واریانس واقعی هیچگاه از قبل مشخص نیست، اما اگر تعداد نمونه‌ها بیش از ۳۰ باشد با دقت کافی می‌توان واریانس را که بر اساس میانگین $\mu_{\ln}$ به دست می‌آید، معادل واریانس واقعی در نظر گرفت.

الف) حالتی که تعداد نمونه‌ها بیش از ۳۰ باشد: در اینجا برآورد میانگین، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$Mean = EXP(\mu_{Ln} + \frac{1}{2}\sigma_{Ln}^2)$$

μ_{Ln}: میانگین لگاریتم داده‌ها

σ_{Ln}^2: واریانس لگاریتم داده‌ها با توجه به میانگین μ_{Ln}

ب) حالتی که تعداد نمونه‌ها کمتر از ۳۰ باشد: تخمین میانگین به کمک رابطه بالا حتماً امکان پذیر و معتبر است که قبلاً واریانس واقعی معلوم باشد. در غیر اینصورت ممکن است اریبی قابل توجهی در مقایسه با بیش آید. برای حل این مشکل، به ویژه وقتی که تعداد معدودی نمونه در دست باشد سیشل (Sichel) تخمینگر ی را ارائه کرد که در انگلیس مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا به علت وجود جداول زیاد، ذکر نکرد. برای اطلاع می‌توان به کتاب مبانی زمین‌آمار تألیف دکتر حسن عزیزی انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر صفحه ۳۵ مراجعه کرد.

تخمین سطح اعتماد در توزیع لاگ نرمال: بسته به اینکه تعداد نمونه‌ها اندک یا زیاد باشد، چندین روش مختلف برای تعیین سطح اعتماد وجود دارد.

الف) حالتی که تعداد نمونه‌ها بیش از ۳۰ باشد: اگر تعداد نمونه‌ها زیاد باشد،

واریانس نگاریتم داده‌ها را می‌توان معادل واریانس واقعی در نظر گرفت و بنابراین سطح اعتماد مورد نظر برای میانگین نگاریتم داده‌ها را می‌توان همانند توزیع نرمال محاسبه کرد. سپس از این محاسبه، سطح اعتماد را می‌توان به سطح اعتماد داده‌های اولیه تبدیل کرد.

مثال، مشخصات نمونه‌ای از نمونه‌ها که به توزیع نگاریتمی نرمال گرایش دارند:

شرح زیر است:

$\sigma_{Ln}^2 = 0.8 \qquad \mu_{Ln} = 5.29832 \qquad n = 40$

می‌خواهیم محدوده تغییرات μ_{Ln} را با سطح اعتماد ۹۰ درصد محاسبه کنید؟

$$\text{حد پایین نگاریتم} = \mu_{Ln} - \frac{1.645\sigma_{Ln}}{\sqrt{n}} = 5.29832 - \frac{1.645\sqrt{0.8}}{\sqrt{40}} = 5.07$$

$$\text{حد بالای نگاریتم} = \mu_{Ln} + \frac{1.645\sigma_{Ln}}{\sqrt{n}} = 5.29832 + \frac{1.645\sqrt{0.8}}{\sqrt{40}} = 5.53$$

اکنون محدوده تغییرات را به مقادیر اولیه تبدیل می‌کنیم:

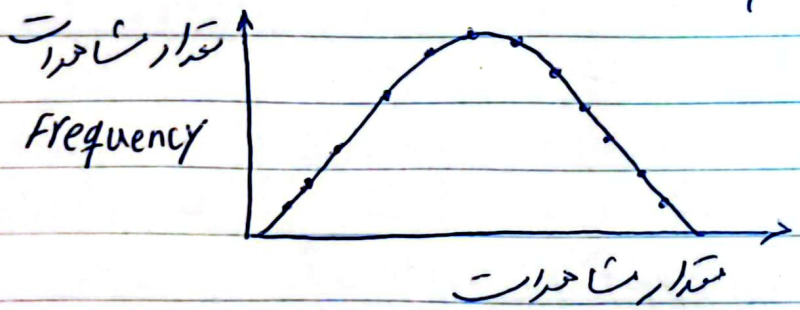
حد پایین $\text{Mean} = \exp(5.07 + 0.8/2) = 237.5$

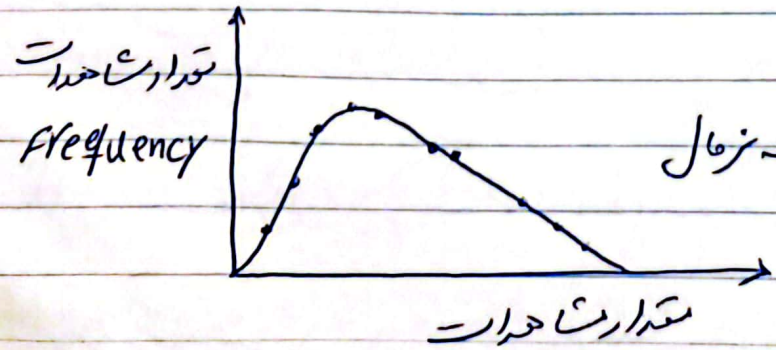
حد بالای $\text{Mean} = \exp(5.53 + 0.8/2) = 376.2$

ب) حالتی که تعداد نمونه کمتر از ۳۰ باشد، منبع ارائه شده صفحه ۴۰ مراجعه شود.

در مسایل آماری ما ابتدا با یک جمعیت آماری مواجه هستیم لذا ابتدا عاشق باید یک جمعیت آماری را بررسی کنیم انواع و اقسام جمعیت آماری داریم، جمعیت نرمال، لاک نرمال، پیرسون، لاک پیرسون، گامبل و غیره. این جمعیت ها (توزیع) با پارامترهایی تعیین می شوند دارای دو ضریب هستند که عبارتند از: میانگین و انحراف معیار.

انحراف معیار نشان دهنده این است که اعضای این جمعیت چقدر از هم دور یا نزدیک است یا از هم دورند.





به عنوان مثال اگر در یک آزمایش ۵۰ محور افقی را برحسب متر هدایت هیدرولیکی و محور عمودی را براساس تعداد مشاهدات مدرج کنیم

کمیت توزیع لاگ نرمال خواهد شد.

K	0.568	0.786	1.5	.....	0.41
f	4	7	9		2

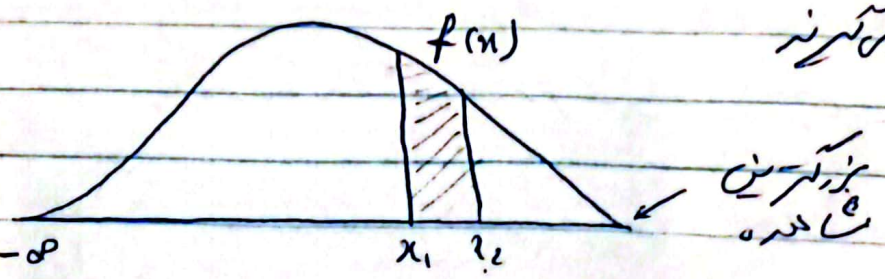
معمولاً در خاک بیشتر توزیع نرمال و لاگ نرمال مدنظر قرار می‌گیرد. در سایل هیدرولوژی چون هدف تخمین extern می‌باشد لذا نیاز به لاگ پیرسون و غیره می‌باشد ولی در مسایل فیزیک خاک بیشتر از توزیع نرمال و لاگ نرمال استفاده می‌شود و توزیعی که مسایل را پیچیده‌تر می‌کند. مقدار آب در خاک (رطوبت) از توزیع نرمال و حدایت هیدرولیکی اغلب از توزیع لاگ نرمال تبعیت می‌کند.

تابع توزیع نرمال به شرح زیر است.

$$f(x)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) EXP\left[-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right]$$

μ: میانگین σ: انحراف معیار x: مشاهدات

ویژگی جمعیت نرمال این است که Mean، Median و Mode روی هم قرار می‌گیرند



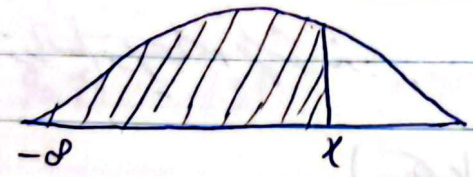
سطح زیر منحنی به انتگرال $f(x)$ است احتمال وقوع مشاهدات را نشان می‌دهد و حتی بزرگتر بین مشاهده را نیز نشان می‌دهد. اگر فرض کنیم که می‌خواهیم احتمال وقوع مشاهده‌ای که بین x_1 و x_2 قرار می‌گیرد را محاسبه کنیم در این حالت سطح انتگرال زیر منحنی ما بین x_1 و x_2 نشان دهنده این احتمال می‌باشد که بوسیله انتگرال آن به دست می‌آید.

$$\text{احتمال} \; P\{x_1 < x < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

اگر احتمال وقوع یک عدد x را بخواهیم به دست آوریم خواهیم داشت

$$P\{X \le x\} = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$F(x)$: احتمال وقوع تجمعی است



در مورد توزیع غیر نرمال یا لاگ نرمال که در بحث آب و خاک زیاد استفاده می‌شود مشاهدات را تبدیل لگاریتمی انجام می‌دهیم یعنی از مشاهدات لگاریتم گرفته و در این صورت توزیع لاگ نرمال تبدیل به نرمال می‌گردد.

در معادله تابع توزیع نرمال بجای x، لگاریتم x ($\ln x$) و بجای μ، μ_{Ln}، بجای σ^2، σ_{Ln}^2 قرار می‌دهیم که در این حالت μ_{Ln}، میانگین لگاریتم مشاهدات و σ_{Ln}^2 انحراف معیار لگاریتم مشاهدات است. به عنوان مثال اگر سرعت واقعی آب در خاک را بررسی کنیم خواهیم داشت:

$$N = \frac{n \cdot \Delta V_0}{V_0 \sigma_{Ln} \sqrt{2\pi}} EXP\left[-(\ln V_0 - \mu_{Ln})^2 / 2\sigma_{Ln}^2\right]$$

N - تعداد مشاهدات در محدوده ΔV_0 است

V_0 - سرعت واقعی آب در خاک

n - تعداد کل مشاهدات

μ_{Ln} - میانگین لگاریتم نپری مشاهدات

در توزیع لاگ نرمال Median، Mode، Mean برروی هم قرار نمی‌گیرند، هر کدام از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$Mean = EXP(\mu_{Ln} + \tfrac{1}{2}\sigma_{Ln}^2)$$

$$Median = EXP(\mu_{Ln})$$

$$Mode = EXP(\mu_{Ln} - \sigma_{Ln}^2)$$

چگونگی تشخیص توزیع نرمال و لاگ نرمال

گرچه در بعضی موارد، توزیع به گونه‌ای است که با دقت چشم می‌توان آن را به عنوان توزیع نرمال یا لاگ نرمال در نظر گرفت اما در بسیاری موارد، قضاوت چشم کافی نیست و باید به وسیله دیگری توزیع را محک زد. برای اینکار از Fractile method استفاده می‌شود. به این ترتیب که بر فرض مثلاً سری پارامترهای از خاک را اطلاعاتش را اندازه‌گیری کردیم و به شرح جدول ذیل می‌باشد

i	$(V_0)_i^*$	$(\ln V_0)_i$	θ_i	$(i-0.5)/n^{**}$	$(x-\mu)/\sigma$
1	0.66	-0.42	0.297	0.025	
2	1.16	0.15	0.310	0.075	
3	1.52	0.42	0.318	0.125	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
20	90.75	4.51	0.404	0.975	

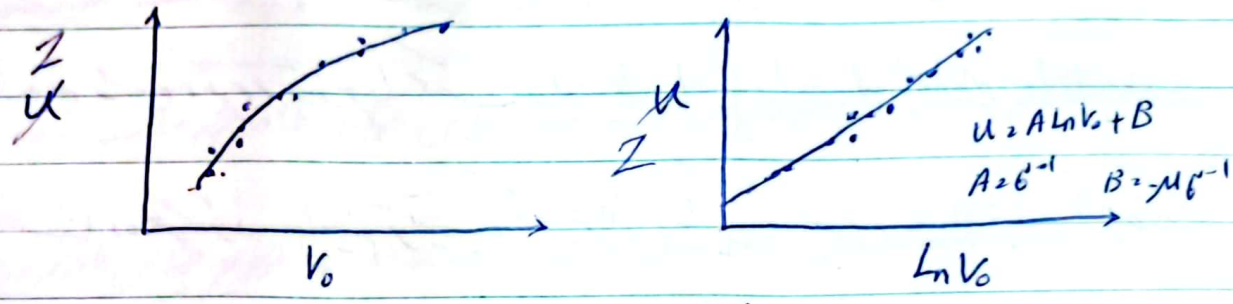
* سرعت واقعی آب در داخل خاک

** یکی از فرمولهای احتمال

همچنین تغییرات $(V_0)_i$ (0.66 تا 90.75) با تغییرات θ_i (0.2 تا 0.404) باهم یکی نیست همینشان می‌دهد که توزیع V_0 با θ یکی نیست

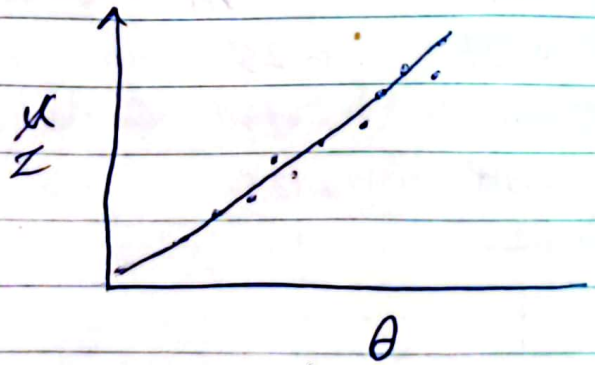
$$Z = \frac{x - M}{\sigma}$$

اگر تغییرات V_0 را در مقابل u / $u = [g(V_0) - M]/\sigma$ رسم کنیم اگر خطی شد توزیع نرمال است و اگر منحنی شد توزیع لاگ نرمال است که اگر $\ln V_0$ در نظر گرفته شود منحنی تبدیل به خط خواهد شد.



توزیع لاگ نرمال

اگر تغییرات θ در مقابل u را رسم کنیم خط راست خواهد شد که نشانگر توزیع نرمال می‌باشد



توزیع نرمال

۱. هر چقدر correlation coefficient یک نزدیک باشد (در شکل a بهتر است) نشانگر این مطلب است تطبیق بهتری با توزیع نرمال دارد.

می‌توان از تست کولموگروف - اسمیرنف نیز برای نرمال بودن داده‌ها استفاده کرد.

CV (coeficient variation): مقدار C.V از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100$$

مقدار CV در بسیاری از پارامترهای فزیک آب و خاک بطور کلی (نه دقیق) نشان دهنده نوع توزیع می‌باشد. مثلاً برای هیدرولیکی ظاهری خاک یا درجه تخلخل خاک CV حدود ۱۰-۶ درصد می‌باشد معمولاً توزیع هیدرولیکی ظاهری خاک و درجه تخلخل خاک دارای توزیع نرمال است.

پارامترهای مثل k_s، D_p، $k(\theta)$ و V_0 و خود عامل مقیاس دارای CV حتی بیش از ۱۰۰ درصد است معمولاً پارامترهای k_s، D_p، $k(\theta)$، V_0 و عامل مقیاس دارای توزیع لاگ نرمال است

CV ذرات خاک متوسط بوده و مابین ۱۰٪ الی ۱۰۰٪ قرار می‌گیرد. توزیع آن بینابینی است و ممکن است به سمت نرمال یا لاگ نرمال تمایل داشته باشد.

انتخاب تعداد نمونه‌ها: براساس این تئوری‌ها سوالی مطرح می‌گردد که جوابش توسط همین تئوری‌ها داده می‌شود. برای اینکه پارامتری را در آب و خاک پیدا کنیم که دارای

وقت کافی باشد چند نمونه باید برداشت کنیم برای حل این مسئله دو فرض داریم

۱- نمونه‌ها مستقل از همدیگر باشند.

۲- تعداد اعضای نمونه به قدری است که قضیه central limit theorm صادق است.

برحسب این اساس باید اقتی را در نظر بگیریم (d).

تفاوت معدل نمونه از معدل واقعی جمعیت d_2

بنابراین ابتدا باید مقدار d را معین کنیم. سپس یک مقدار احتمال نیز در نظر بگیریم

بطوری که با این احتمال محاسبات را انجام دهیم.

$$\text{احتمال } \% = (1-\alpha') \times 100$$

α' عدم احتمال است.

$$N = Z^2_{\alpha} \cdot \sigma^2 / d^2 \qquad N = Z^2 \cdot \sigma^2 / d$$

N تعداد اعضای نمونه است و σ^2 واریانس جمعیت می‌باشد.

$$Z_{\alpha} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \qquad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

می‌خواهیم تعداد نمونه را محاسبه کنیم که دارای عدم احتمال α' باشد به عنوان

مثال اگر عدم احتمال را 0.05 در نظر بگیریم احتمال تجمعی خواهد بود

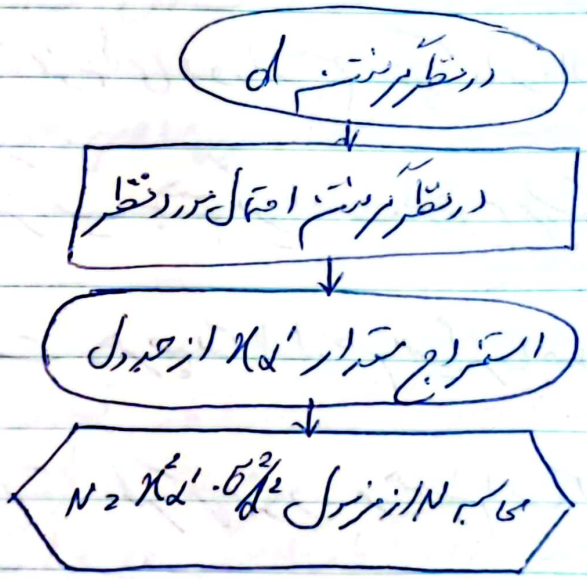
$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}\alpha' = 1 - 0.025 = 0.975$$ احتمال تجمعی

با احتمال تجمعی مقدار $\frac{x-\mu}{\sigma}$ را در جدول پیدا می‌کنیم. به عنوان مثال با

احتمال تجمعی 0.975 مقدار $\frac{x-\mu}{\sigma}$ از جدول 1.96 خواهد شد.

$F(x)$	0.75	0.80	0.90	0.95	0.975	0.9875	0.995	0.9975	0.9995
α'	0.5	0.4	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
$x_{\alpha'}$	0.425	0.842	1.282	1.645	1.96	2.241	2.576	2.807	3.291

بنابراین فلوچارت زیر را برای تعیین تعداد نمونه‌ها می‌توان در نظر گرفت



مبحثی که دنبال کردیم براساس آمار کلاسیک (آمار نمونه‌ای) است یعنی آن شرط

ذکر شده، صادق می‌باشد. در برخی مسایل ممکن است فرضیات ذکر شده صادق نباشد

در مطالعات انجام گرفته مداخله شده، برای تغییر می‌کند (مثلاً این تغییرات چه در فاصله

چه در عمق متفاوت می‌باشد (مانند رطوبت) این تغییرات وابسته به حجم است

به عبارت تغییرات در عمق وابسته بهم اند و نمونه‌ها در فاصله نزدیکتر به هم شباهت

زیادی به هم دارند تا نمونه‌های دورتر از هم. در آمار کلاسیک به عنوان مثال خواص

خاک در نقاط نزدیک به هم یکسان فرض می‌شود (چون تغییرات نقاط

نزدیک هم کم است) و هرچه نقاط از هم بیشتر فاصله می‌گیرد تغییرات نقاط

بیشتر شده و شباهت‌ها کم می‌شود. بر همین اساس در طرح آزمایشات

یک ویژگی فرض می‌شود خاک یکسان است و برای اینکه این فرض صادق

باشد سعی می‌شود پلات‌ها کوچکتر در نظر گرفته شود. اما در مبحث آمار این بحث

را نمی‌پردازد و وابستگی نمونه‌ها را نسبت به هم عقیده دارد و در مبحث آمار

این نمونه‌ها به هم وابسته‌اند. در اینجا اصطلاحات Temperal varibility و

Spatiall varibilty مطرح می‌شود. بحث زمین آمار این وابستگی‌ها را

را به صورت کلی مطرح و به راست می‌کرد. در آمار کلاسیک اگر متغیر مورد نظر اندازه‌گیری شده باشد از مباحث آمار برداشته شده، استنباط می‌کرد به معنی روشی که اندازه‌گیری انجام گرفته مباحث نقاط دیگر را اثر می‌دهد. در حالی آمار کلاسیک را مجازی دانند چون این نمونه‌ها ممکن است در فواصل و نقاط مختلف برداشته شده است بنابراین نقاطی که اندازه‌گیری شده، باید از نقاط اطراف آن استنباط کرد (چون آنها به هم وابسته‌اند). در این حالت روش مدل‌گیری خاصی وجود دارد که این روش تخمین‌گیری را آمار بیزین می‌گویند.

تفاوت آمار کلاسیک (غیربیزی) با زمینه آمار: تفاوت اصلی آمار کلاسیک و زمینه آمار در این است که در آمار کلاسیک، نمونه‌هایی که از جامعه گرفته می‌شود معمولاً به حالت تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. به بیان دیگر فرض بر آن است که نمونه‌ها مستقل از یکدیگرند و بنابراین وجود یک نمونه، هیچ اطلاعی درباره نمونه بعدی به دست نمی‌دهد. اما در زمینه آمار، نمونه‌ها به حالت مستقل از یکدیگر در نظر گرفته نمی‌شوند بلکه براساس این نظریه، نمونه‌های مجاور تا فاصله معینی بطور فضایی (spatial) به هم وابستگی دارند. همچنین فرض می‌شود

تغییرات که این وابستگی بین نمونه‌ها را می‌توان به صورت مدل ریاضی تحت

عنوان تغییرنما (Variogram) ارایه کرد.

در طرح آزمایشات مطابق شکل (8.3) برای انجام آزمایش قطعه‌ای از

زمین را در نظر می‌گیرند و آزمایشات انجام گرفته روی این قطعات را مطابق

مزرعه در نظر می‌گیرند در این حالت برای اینکه بحث کلی‌تر باشد از بودن همارق

تمرد قطعات از یک دیگر در نظر می‌گیرند که در این حالت شکل آتی پیش می‌آید و آن

این است که این قطعات ممکن است تنها با تأثیر کل مزرعه باشد برای رفع این نقص

در جاهای مختلف مزرعه آزمایش را تکرار می‌کنند که در این حالت هزینه طرح

افزایش زیادی می‌کند

در آمار کلاسیک (طرح آزمایشات)

مشکل دیگر این است که بر طرف مطابق شکل (8.3) می‌خواهیم اثر کود بر روی عملکرد

را بررسی کنیم به عنوان مثال برای پلات I 75 کیلو، II 100 و III 125 و IV 150

کیلوگرم در هکتار کرده‌ایم بر طرف آزمایش را انجام داده‌ایم دیدیم پلات III بهترین

عملکرد را دارد می‌توانیم بگوییم که 125 کیلوگرم در هکتار بهترین عملکرد را می‌دهد

چون این اعداد پیوسته نیستند ممکن است مقدار ۱۱۵ کیلوگرم در هیچکدام
کدها اضافه می‌کردیم عملکرد بهینه‌تر می‌شد که برای رفع این مشکل در آمار کلاسیک
از آکریسیون استفاده می‌شود در این حالت بهینه مقدار کدها و عملکرد
آکریسیون بسته می‌شود و سپس از روی آکریسیون، از روی تحلیل اقتصادی مقدار بهینه را
توصیه می‌کنیم که مسلماً در این حالت بعضی از تغییرات ممکن در نظر گرفته می‌شود.
در این حالت ممکن است بهترین تیمار کدها نبوده ولی از نظر تحلیل اقتصادی
به تیمار ۱۰۰ رسیدیم.

مبحث

موضوعات مورد کاربرد در مبحث آمار: در مبحث آمار این موضوعات مورد بحث
قرار می‌گیرد.

تخمین نقاط که نمونه برداری شده است: در این حالت با استفاده از تخمین-
گری (estimator) که پیچیده از روی نقاط نمونه برداری شده، نقطه که
اطلاعات آن اندازه‌گیری شده است به دست می‌آید.

- تخمین اندازه نمونه‌ها: بحث در مورد این که باید چه نظر قرار گیرد اندازه نمونه‌ها می‌باشد
به عنوان مثال می‌خواهیم با سلیقه‌ای نمونه برداری، ۲۵ را اندازه‌گیری کنیم. هر قدر

اندازه سلول‌های بزرگتر باشد k_s مقدار k_s بیشتر می‌شود و نمونه‌ها به واقعیت

نزدیکتر می‌گردد. در زمینه آمار در بحث Volume sepport و بحث

Represetatini Elementry Volume(REV) اندازه نمونه‌ها مورد توجه قرار

می‌گیرد و بهترین اندازه پیشنهاد می‌شود.

- فاصله نمونه‌ها از هم: بحث دیگری است که فاصله نمونه‌ها از هم چقدر باشد

یعنی در موقع نمونه برداری، فاصله بین دو نمونه از هم چقدر باشد. مثلاً در

تهیه نقشه‌های خاکشناسی، از پروفیل استفاده می‌شود یا حفر پروفیل در

نقاط مختلف زمین و به دست آوردن نوع خاک روی نقشه محدوده‌بندی

می‌کنند و نوع خاک هر محدوده را مشخص می‌کنند. موضوع قابل توجه این است

که فاصله پروفیل‌ها از هم چقدر باشد. اگر فاصله پروفیل‌ها کم باشد هزینه

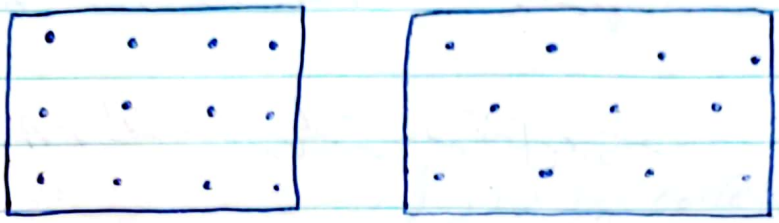
بالا خواهد رفت و در صورتی که فاصله پروفیل‌ها زیاد باشد احتمال دقت نقشه‌ها

کاهش خواهد یافت. با استفاده از زمینه آمار، فاصله بین نمونه‌ها مشخص

می‌گردد و بر اساس آن نقشه‌ها کشیده می‌شود.

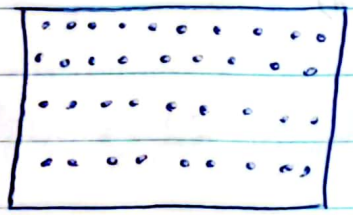
- الگوی نمونه برداری: مسئله دیگر در نمونه برداری، الگوی نمونه برداری است.

در موقع نمونه برداری، الگوی نمونه برداری چگونه باشد؟ منظور از الگو، شکل فاصله بین نمونه‌ها و حجم نمونه است. برای روشن شدن مطلب به شکل‌های زیر توجه کنید.



الگوهای مختلف نمونه برداری

نوع الگو را بعد از مشخص کردن متغیرهای آماری می‌توان تعیین کرد. مثلاً اگر دانشجویان روی این موضوع کار کنند برای این موضوع مثلاً از خصوصیات خاک یا نزدیک بهم اندازه‌گیری کرد.



سپس تعداد نمونه‌ها را در نظر گرفت و براساس الگوهای مختلف داده‌ها را کد دوسپس بررسی کرد که کدام الگو جواب بهتری می‌دهد. یا آقای دکتر تهرانی در رساله دکتری خود روی این موضوع کار کرده‌اند که آیا موقعیت شبکه‌های باران سنجی درست است. آیا نمی‌خواهیم شبکه آماری اصلاح کرد و در چه موقعیتی باید باشد.

بعد از ذکر مقدمات فوق، وارد جزئیات بحث نمونه‌گیری آماری می‌شویم. یکی از

این جریانات یک Auto correlogram است.

Auto correlogram: در شکل (۸.۱) در فاصله‌های یکسان از هم در نقاط A_1، A_2، A_3، A_4، ... که پارامتری از خاک می‌باشد اندازه‌گیری شده است (A می‌تواند هر چیزی باشد مانند تخلخل، K_s و ...) بین این مشاهدات در فاصله h از همدیگر می‌توان correlation برقرار کرد. مقدار $\gamma(h)$ را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد.

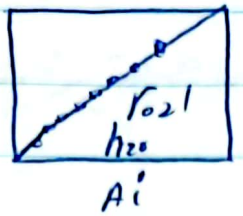
$$\gamma(h) = \frac{cov[A(x), A(x+h)]}{\sqrt{var[A(x)]}\sqrt{var[A(x+h)]}}$$

$\gamma(h)$: correlation

اگر h_{20} باشد در این صورت مخرج کسر واریانس خواهد شد و صورت کسر نیز از کوواریانس تبدیل به واریانس می‌شود در این حالت $\gamma(h)$ ۱ خواهد شد. بنابراین γ_{20} ۱ خواهد شد.

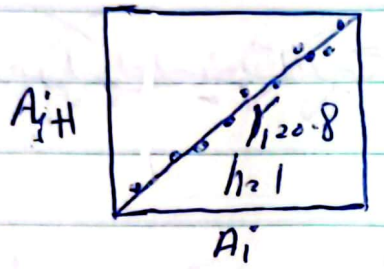
به عنوان مثال همانطور که در شکل ۸.۱ ملاحظه می‌کنید نمونه‌هایی مانند A از خاک (A می‌تواند هر نمونه‌ای از خاک باشد) در نقاط x_1، x_2، x_3، ... x_{n-1}

اندازه‌گیری میزان correlation برای هر نمونه با خودش Ai



در این حالت چون Ai با خودش مقایسه شده (h_{20}) و $r_{0,1}$ خواهد شد.

آیا Ai با A_{i+1} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با یک گام (LAG) از هم فاصله دارند ($h_{0,1}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,1}$ خواهد شد.

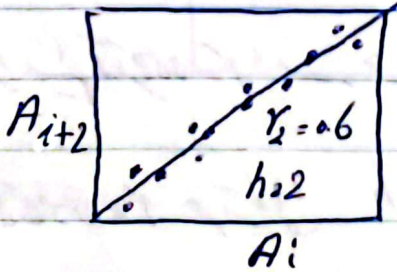


$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

آیا A_i با A_{i+2} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با یک گام از هم فاصله دارند ($h_{0,1}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,1}$ خواهد شد.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

آیا A_i با A_{i+2} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با دو گام از هم فاصله دارند ($h_{0,2}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,2}$ خواهد شد.



$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+3} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,3}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,3}$ خواهد شد.

آیا A_i با A_{i+4} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهار گام از هم فاصله دارند ($h_{0,4}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,4}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+5} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنج گام از هم فاصله دارند ($h_{0,5}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,5}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+6} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شش گام از هم فاصله دارند ($h_{0,6}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,6}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+7} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,7}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,7}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+8} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هشت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,8}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,8}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+9} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با نه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,9}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,9}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+10} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با ده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,10}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,10}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+11} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با یازده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,11}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,11}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+12} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با دوازده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,12}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,12}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+13} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سیزده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,13}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,13}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+14} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهارده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,14}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,14}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+15} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پانزده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,15}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,15}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+16} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شانزده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,16}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,16}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+17} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,17}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,17}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+18} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هجده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,18}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,18}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+19} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با نوزده گام از هم فاصله دارند ($h_{0,19}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,19}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+20} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست گام از هم فاصله دارند ($h_{0,20}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,20}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+21} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و یک گام از هم فاصله دارند ($h_{0,21}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,21}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+22} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و دو گام از هم فاصله دارند ($h_{0,22}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,22}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+23} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و سه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,23}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,23}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+24} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و چهار گام از هم فاصله دارند ($h_{0,24}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,24}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+25} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و پنج گام از هم فاصله دارند ($h_{0,25}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,25}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+26} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و شش گام از هم فاصله دارند ($h_{0,26}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,26}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+27} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و هفت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,27}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,27}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+28} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و هشت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,28}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,28}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+29} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با بیست و نه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,29}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,29}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+30} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی گام از هم فاصله دارند ($h_{0,30}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,30}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+31} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و یک گام از هم فاصله دارند ($h_{0,31}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,31}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+32} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و دو گام از هم فاصله دارند ($h_{0,32}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,32}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+33} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و سه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,33}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,33}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+34} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و چهار گام از هم فاصله دارند ($h_{0,34}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,34}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+35} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و پنج گام از هم فاصله دارند ($h_{0,35}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,35}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+36} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و شش گام از هم فاصله دارند ($h_{0,36}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,36}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+37} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و هفت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,37}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,37}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+38} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و هشت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,38}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,38}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+39} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با سی و نه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,39}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,39}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+40} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل گام از هم فاصله دارند ($h_{0,40}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,40}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+41} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و یک گام از هم فاصله دارند ($h_{0,41}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,41}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+42} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و دو گام از هم فاصله دارند ($h_{0,42}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,42}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+43} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و سه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,43}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,43}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+44} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و چهار گام از هم فاصله دارند ($h_{0,44}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,44}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+45} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و پنج گام از هم فاصله دارند ($h_{0,45}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,45}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+46} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و شش گام از هم فاصله دارند ($h_{0,46}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,46}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+47} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و هفت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,47}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,47}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+48} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و هشت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,48}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,48}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+49} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با چهل و نه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,49}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,49}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+50} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,50}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,50}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+51} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و یک گام از هم فاصله دارند ($h_{0,51}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,51}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+52} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و دو گام از هم فاصله دارند ($h_{0,52}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,52}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+53} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و سه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,53}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,53}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+54} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و چهار گام از هم فاصله دارند ($h_{0,54}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,54}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+55} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و پنج گام از هم فاصله دارند ($h_{0,55}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,55}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+56} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و شش گام از هم فاصله دارند ($h_{0,56}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,56}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+57} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و هفت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,57}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,57}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+58} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و هشت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,58}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,58}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+59} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با پنجاه و نه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,59}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,59}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+60} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,60}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,60}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+61} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و یک گام از هم فاصله دارند ($h_{0,61}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,61}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+62} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و دو گام از هم فاصله دارند ($h_{0,62}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,62}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+63} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و سه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,63}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,63}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+64} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و چهار گام از هم فاصله دارند ($h_{0,64}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,64}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+65} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و پنج گام از هم فاصله دارند ($h_{0,65}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,65}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+66} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و شش گام از هم فاصله دارند ($h_{0,66}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,66}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+67} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و هفت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,67}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,67}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+68} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و هشت گام از هم فاصله دارند ($h_{0,68}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,68}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+69} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با شصت و نه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,69}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,69}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+70} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفتاد گام از هم فاصله دارند ($h_{0,70}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,70}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+71} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفتاد و یک گام از هم فاصله دارند ($h_{0,71}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,71}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+72} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفتاد و دو گام از هم فاصله دارند ($h_{0,72}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,72}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+73} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفتاد و سه گام از هم فاصله دارند ($h_{0,73}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,73}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+74} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفتاد و چهار گام از هم فاصله دارند ($h_{0,74}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,74}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+75} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفتاد و پنج گام از هم فاصله دارند ($h_{0,75}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,75}$ خواهد شد.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+76} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفتاد و شش گام از هم فاصله دارند ($h_{0,76}$) لذا correlation آن کوچکتر از $r_{0,76}$ خواهد شد.

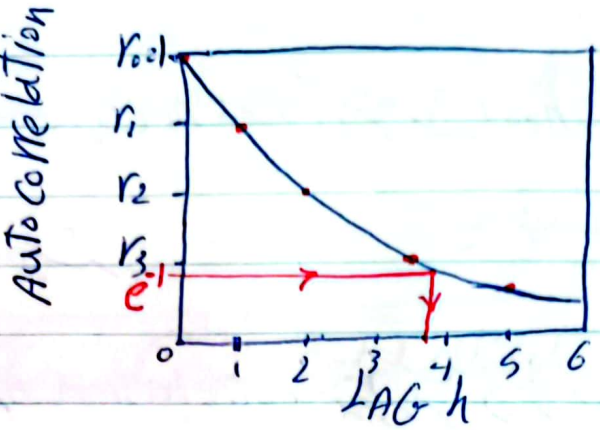
و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر.

$A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \dots A_{i+n}$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$

آیا A_i با A_{i+77} correlation برقرار می‌کند و در این حالت چون دو نقطه با هفتاد و هفت گام از هم فاصله دارند ($h_{0

شکل زیر به دست خواهد آمد.



از روی شکل فوق می‌توان بهترین فاصله را بین نقاط به دست آورد. به عبارت دیگر فاصله‌ای که این نقاط به هم وابسته است از روی شکل می‌توان به دست آورد.

$$r_h = r_0 \exp(-h/\lambda)$$

~~رابطه~~ λ: رابطه است که فاصله نمونه‌ها اگر بیشتر از این مقدار باشد نمونه‌ها به هم وابسته نیستند و اگر فاصله نمونه‌ها کمتر از λ باشد نمونه‌ها به هم وابسته‌اند.

اگر h برابر λ شود در این صورت نمونه‌ها به هم وابسته نیستند.

$$h = \lambda \Rightarrow r_1 \exp(-\frac{\lambda}{\lambda}) \Rightarrow r = e^{-1} \Rightarrow \boxed{r = 0.368}$$

بنابراین اگر $r = 0.368$ باشد نمونه‌ها به همدیگر وابسته نیستند لذا از روی شکل با بالا داشتن $r = 0.368$ می‌توان h را محاسبه کرد که به ازای h به دست آمده نمونه‌ها به هم وابسته نیستند. (فاصله بین نمونه‌ها را LAG گوییم)

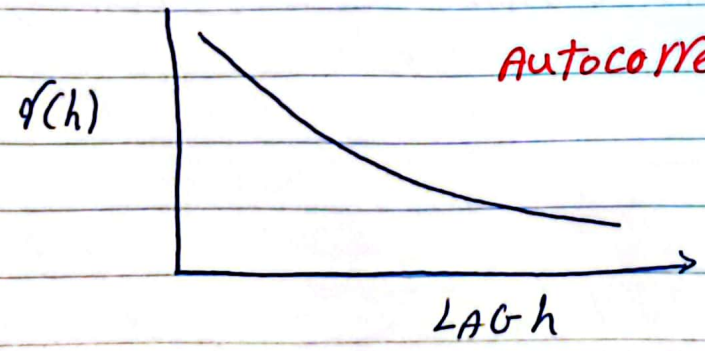
از این اندازه گیری، موارد زیر را می‌توان پیش‌بینی و تخمین نمود.

۱- رابطه بین γ و h با حجم نمونه بستگی دارد هرچقدر حجم نمونه بزرگتر باشد γ بزرگتر به دست می‌آید.

۲- Volume support را می‌توان از اینجا به دست آورد (بطور کلی ..... ناقص)

۳- مطلب دیگر فاصله‌ای که باید نمونه‌ها را باید از هم جدا کرد به دست می‌آید.

۴- بعضی آنالیزهایی می‌خواهیم پیدا کنیم اندازه‌گیری رطوبت و ... هر دو را از روی نمونه برداری از خاک باید به دست آوریم فاصله نمونه‌ها را چقدر بگیریم بعد از اینکه θ و ... که هر دو کمی نیست باید ...



(شکل gram)

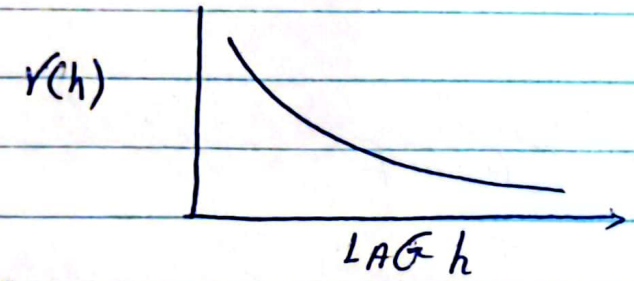
در Autocorrelogram گیری شرط لازم است که سری strong stationary باشد برای تمام متغیرها، مقدار $E(Z(t))$ یعنی میانگین ها ثابت باشد.

شرط دوم اینکه کوواریانس ها تابع واحدی از فاصله باشد. برای مثال اگر ۱۰ نفر را اندازه گیری کردیم اگر فاصله نقاط را تغییر کنند کوواریانس ها تغییر نکند.

اگر این دو شرط برقرار باشد Autocorrelogram صادق است.

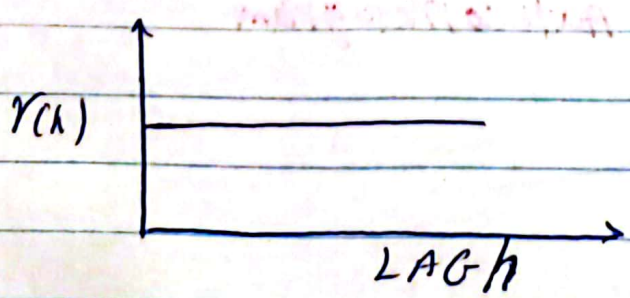
اشکال مختلف Autocorrelogram:

شکل معمول Autocorrelogram به صورت زیر می باشد



در بعضی مواقع Autocorrelogram به صورت خط راست در می آید

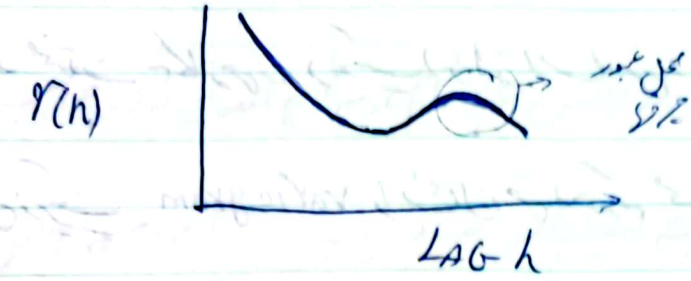
منظور این مطلب است که Autocorrelogram به فاصله بستگی ندارد

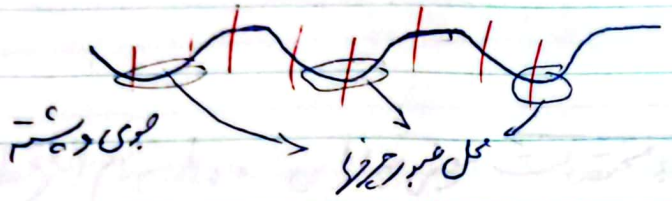


شکل Autocorrelogram ممکن است تناوبی باشد که در این حالت کاهش و افزایش مرتب دارد. یکی از علتهای این امر وقت دار تر اکثر در مزرعه

می‌باشد. ممکن است برای تراکم خاک Auto correlogram را رسم نمی‌کنیم

حالتی پیش آید





نحوه محاسبه Autocorrelogram: برای محاسبه Autocorrelogram از رابطه‌ای زیر استفاده می‌کنند.

کوواریانس $c(h) = \left[\frac{1}{n(h)-1}\right] \sum_{i=1}^{n(h)} [Z(x_i)-\bar{Z}][Z(x_i+h)-\bar{Z}]$

$ch = \frac{(n-k)\sum z_i z_{i+k} - \sum z_i \cdot \sum z_{i+k}}{(n-k)(n-k-1)}$

$n(h)$: تعداد جفت مشاهده

$\bar{Z}$: میانگین

$c(h)$: کوواریانس

$Z(x_i)$: مشاهدات در نقطه x_i

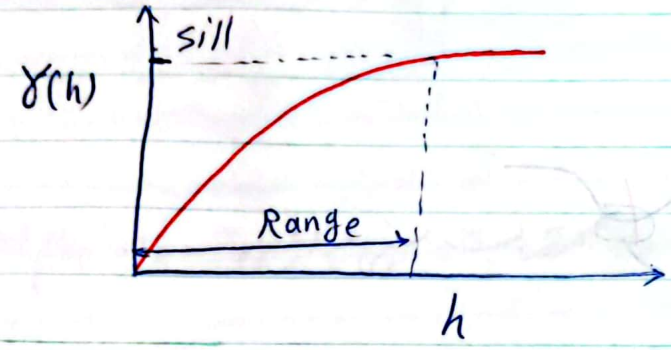
$Z(x_i+h)$: مشاهدات در نقطه x_i+h (یعنی یک گام جلوتر)

$$\gamma(h) = \frac{c(h)}{S^2}$$

تغیرنما ↓

تغیرنما variogram: تغیرنما برای تشریح ارتباط فضایی بین دو مشخصه در نقاط مختلف به کار می رود و یک ابزار اساسی در زمین آمار است.

شکل زیر یک variogram را نشان می دهد که محور طولها، فاصله h و محور عرضها $\gamma(h)$ است.



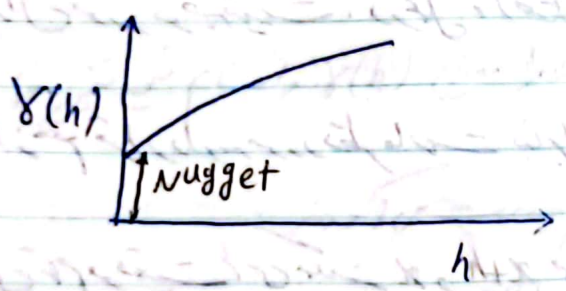
با افزایش h مقدار variogram ($\gamma(h)$) نیز اضافه می شود و این وضعیت تا فاصله معینی ادامه دارد و در این فاصله مشخص، به حد معینی می رسد که از آن پس مقدار variogram عملاً ثابت می شود. این امر نشانگر آن است که نمونه ها تا فاصله معینی شبیه هم هستند و به هم وابستگی دارند و در خارج از این فاصله، دیگر به هم وابسته نیستند.

فاصله ای که طی آن تغیرنما به حد ثابتی می رسد و به حالت خط افقی نزدیک می شود شعاع تاثیر یا دامنه (range) خوانده می شود. این امر به معنی آن است که در خارج از دامنه، نمونه ها دیگر به هم وابسته نیستند و مستقل از هم هستند.

مقدار تغییرنما پس از آنکه به حد ثابتی رسید به نام آستانه (sill) خوانده می‌شود.

مقدار sill در حالت کلی برابر واریانس کلی تمام نمونه‌ها می‌است که در محاسبه variogram به کار رفته است. البته این امر همیشه صادق نیست زیرا محاسبه ماتریس محدود اختلاف مقادیر در فاصله‌ای که به فاصله h از هم قرار دارند حتی روش محاسبه واریانس در آمار کلاسیک است.

مقدار تغییرنما (variogram) در مبدأ مختصات یعنی به ازای $h=0$ به نام اثر قطعه‌ای (Nugget effect) نامیده می‌شود.



در حالت ایده‌آل باید Nugget صفر باشد زیرا دو نمونه که از نقطه واحدی گرفته شده‌اند ($h=0$) باید یکسان باشند. از سوی دیگر وجود اثر قطعه‌ای (Nugget effect) مثبت، ممکن است معنی فیزیکی مشخص داشته باشد (مثلاً تغییرات شدید یا اثر میدان از یکدیگر در نقاط نزدیک به هم) و یا ممکن است ناشی از خطای نمونه‌گیری و یا خطای تجزیه نمونه‌ها باشد. در حالت کلی، اگر مشکلات مربوط به نمونه‌گیری و تجزیه نمونه‌ها وجود

نداشته باشد Nugget یا یک کیک باشد.

طبیعی ترین راه برای مقایسه دو مقدار $Z(x)$ و $Z(x+h)$ (که می‌توانند هر دو یا برتری از خاک باشند) در دو نقطه یکی به مختصات x و دیگری $x+h$ که به فاصله h از x قرار دارد، آن است که اختلاف آن‌ها را بررسی کنیم. واضح است که علامت این اختلاف برای ما مهم نیست بلکه مهم قدر مطلق آن است. لذا برای تجزیه و تحلیل این اختلاف می‌توان عبارت $|Z(x)-Z(x+h)|$ را بررسی کرد. این اختلاف که بیانگر تفاوت دو نقطه است چندان مورد توجه نیست. در عمل، اختلاف متوسط بین مقادیر دو نقطه‌ای که به فاصله h از هم قرار دارند مورد نظر ماست بنابراین باید مقدار متوسط $|Z(x)-Z(x+h)|$ را برای تمام موقعیت‌های ممکن x و $x+h$ محاسبه کنیم و در نظر گیریم. از آنجا که متوسط این کمیت صفر یا نزدیک به صفر است در عمل، مجذور اختلاف را در نظر می‌گیریم.

$$2\gamma(h) = AVE\left[Z(x_i)-Z(x_i+h)\right]^2$$

$$2\gamma(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Z(x_i)-Z(x_i+h)\right]^2$$

عبارت $2\gamma(h)$ را variogram گوییم. فرض می‌کنیم که جمع تعداد $n(h)$ زوج نمونه که به فاصله بردار h از یکدیگر واقع‌اند در دست باشد. براساس این اطلاعات

variogram عبارت خواهد بود از:

$$2\gamma(h) = \frac{1}{n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [Z(x_i) - Z(x_i+h)]^2$$

در حالت ساده، فرض می‌کنیم که نمونه‌ها بطور منظم در طول خطی مانند شکل زیر توزیع شده باشند

بطوری که فواصل تمام n نمونه که به فاصله h قرار دارند در دست است بنابراین از تعداد $n-1$ زوج نمونه برای محاسبه $\gamma(h)$ و تعداد $n-2$ برای $\gamma(2h)$ می‌توان استفاده کرد. در عمل نصف حاصل عبارت بالا را یعنی $\gamma(h)$ را به نام نیمه تغییر نما semivariogram می‌خوانند و آنرا از رابطه زیر به دست می‌آورند:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [Z(x_i) - Z(x_i+h)]^2$$

* تبصره: فرضهای لازم که تاکنون برای variogram ذکر شد در مواردی صادق است که تمام نقاط نمونه‌برداری بر یک راستای مستقیم و با فاصله مساوی قرار گرفته باشند. در عمل، در بسیاری موارد، شبکه نمونه‌گیری بطور دقیق منظم نیست یعنی نمونه‌ها دقیقاً در امتداد خط مستقیم قرار نداشته و فاصله آنها نیز مساوی نیست. در چنین مواردی باید معادلات

ذکر شده را باید اصلاح کرد تا براساس آن بتوان بجای یک متغیر ثابت برای

موقعیت متغیر از یک فاصله استفاده کرد. متغیر اصلاح شده semivariogram به شرح زیر است

$$\gamma(h) = \frac{\sum_{j=1}^{n} (h_j)[f(x_j) - f(x_j + h_j)]^2}{2\sum_{j=1}^{n} (h_j)}$$

اگر شرط b برقرار نباشد و در این حالت از strong stationary

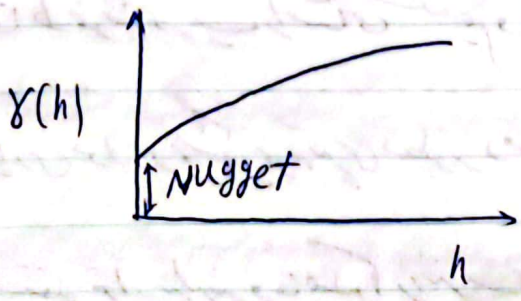
variogram یا semivariogram استفاده می‌شود و متغیر نیز تغییر نام

می‌دهد (semivariogram) به شرح زیر است:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n} [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2$$

A به جای Z ذکر شده یا متغیر مورد اندازه‌گیری است مانند رطوبت، حاصلخیزی و

غیره.



در موضوعی باعث می‌شود که Nugget صفر نشود.

۱- دقت اندازه‌گیری است برای مثال k را اندازه‌گیری می‌کنیم اگر دقت اندازه‌گیری دقت کمتر

باشد Nugget بیشتر می‌شود.

۲- فاصله نمونه برداری نیز در Nugget تاثیرگذار است برای مثال اگر k از فاصله فیزیکی

۰.۵ متری برداشت شود و فیزیکی از فاصله ۱۰ متر k برداشت شود در دومی Nugget

بزرگتر خواهد شد.

(بعضی موارد دیگر در صفحات قبلی ذکر شده است)

همچنین دامنه نیز به فاصله نمونه برداری بستگی دارد، اگر فاصله نمونه برداری

زیاد باشد دامنه زیاد خواهد شد.

دامنه	فاصله نمونه‌ها (m)	PH
۱.۵	۰.۲	
۱۷	۲	
۲۶۰	۲۰	

فاصله نمونه‌ها را چقدر انتخاب کنیم به وسعت منطقه بستگی دارد. می‌خواهیم به عنوان

مثال در منطقه‌ای به وسعت ۱۰۰۰ هکتاری که دارای شکل شوری است ببینیم کجا

شیار کاشته شود چون منطقه وسیع است اگر فاصله نمونه برداری کوچک باشد تمام

منطقه را پوشش نمی دهد، با بدِ فاصله نمونه برداری را افزایش داد تا تمام منطقه را پوشش

دهد.

نکته مهم: در رسم semivariogram در محور افقی بیشتر از 2/3 طول ناقص

در شکل 8.6 سه نوع semivariogram نشان داده شده است.

شکل 8.7 نمونه ای از semivariogram برای ESP در سودان برای کشت

نیشکر نشان می دهد:

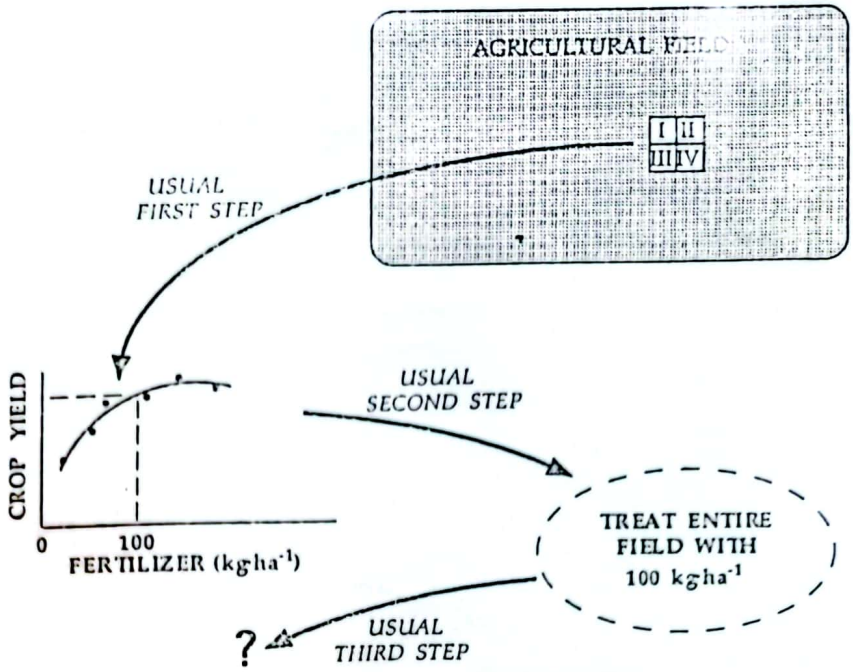


Figure 8.3. Small, replicated plot scheme typical of agricultural research.

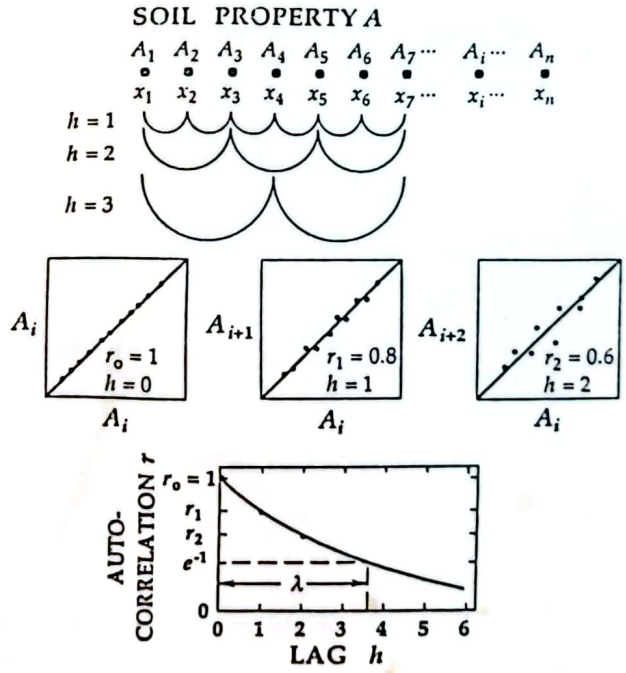


Figure 8.4. Derivation of the autocorrelogram with equidistant sampling along a transect.

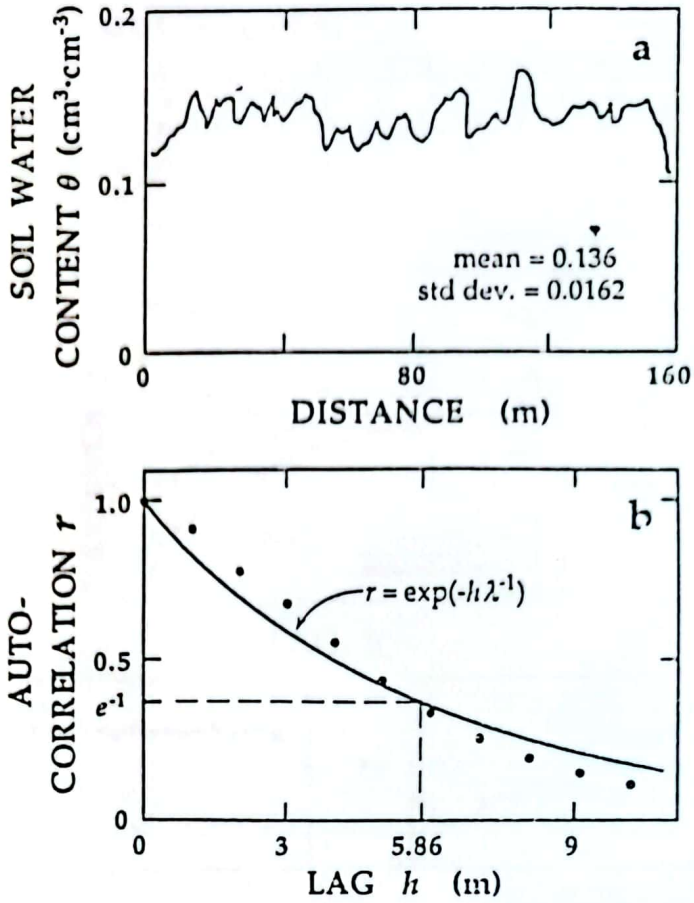


Figure 8.5. a. Values of soil water content θ measured with a neutron probe along a 160-m transect at 1-m intervals. b. Autocorrelogram of θ illustrating a correlation length λ of 5.86 m.

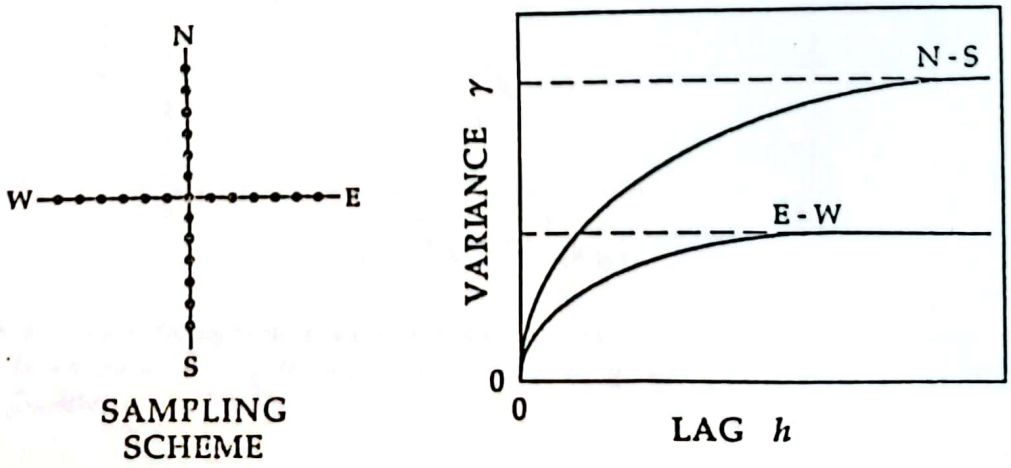


Figure 8.8. Semivariograms of two perpendicular transects of a non-isotropic domain.

CamScanner

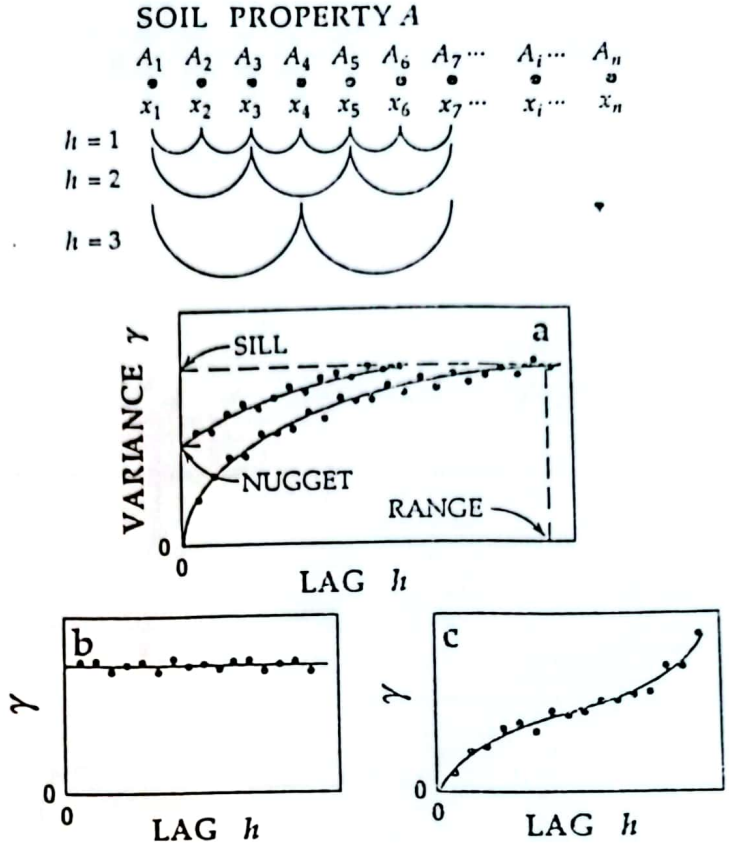


Figure 8.6. Derivation of the semivariogram with equidistant sampling along a transect: a. spatially dependent with and without a nugget, b. spatially independent and c. spatially changing domain.

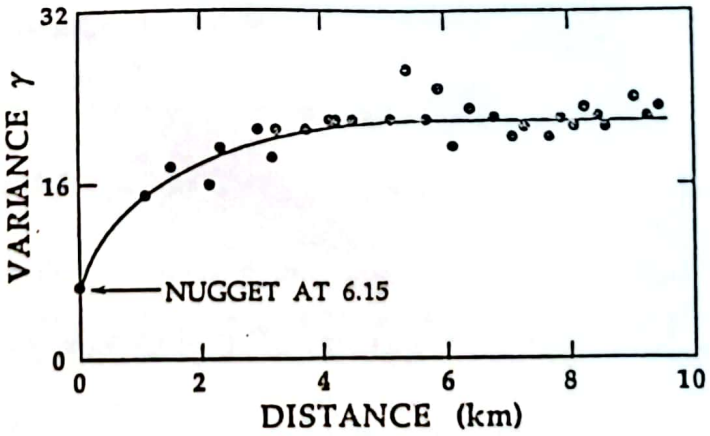
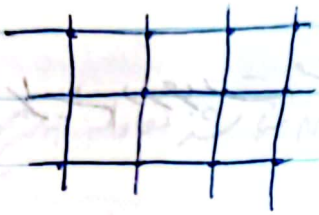


Figure 8.7. Semivariogram of exchangeable sodium percentage from samples taken on a 1-km grid over a 400-km² area of a mapping unit in Sudan (Uehara et al., 1985).

ویژگی دیگر semivariogram این است که اگر در جهات مختلف رسم شوند یکسان

است یا همگن یکسان نباشد. در مطالب گذشته، نمونه برداری یک بعدی مد نظر بود ولی

ممکن است در سطوح گسترده نمونه‌ها در یک چهارخانه برداشت شود (Gird Point)



در این حالت semivariogram را می‌توان در جهت افق رسم کرد (البته از تمام داده‌ها

استفاده می‌شود) یا در جهت عمودی و یا در جهت دو قطر می‌توان محاسبات را

انجام داد. اگر در جهت عمودی محاسبات انجام گیرد زاویه ۹۰ درجه خواهد شد. اگر

محاسبات در جهت افق انجام گیرد زاویه صفر درجه خواهد شد. محاسبات در جهت قطر

باشد (↗) زاویه 45° و یا (↖) 135° خواهد شد.

اگر در تمام جهات semivariogram یکسان درآمد در این حالت همسانگرد است

(Isotropic) و اگر در تمام جهات محاسبات semivariogram یکسان نشد از

نظر Geostatistics غیر همسانگرد است.

اگر حالتی پیش آمد که semivariogram در تمام جهات یکسان نشد در این حالت

در روش کریجینگ از نقاط اطراف نیاز استفاده کنیم یکی از پارامترهایی که در محاسبات

نیاز داریم semivariogram است. آن نقاطی که در اطراف نقاط مجهول

قرار گرفته اند فاصله متفاوت دارند و ممکن است semivariogram در جهات مختلف

یکسان نباشد بنابراین در جهات مختلف از semivariogram آن جهت باید

استفاده کرد.

در شرایط strang stationnary رابطه بین correlogram و semivariogram

به صورت زیر است:

$$\gamma(h) = \sigma^2[1 - \rho(h)]$$

نمونه ای مختلف معادلات semivariogram: در عمل، تابع $\gamma(h)$ معلوم نیست و باید

~~① معادله خطی دارای آستانه (sill)~~ به ازای مقادیر مختلف h، مقادیری برای $\gamma^*(h)$

به دست می آید. بهترین ترتیب، با یکی مدلی را با این مقادیر تجربی وفق داد.

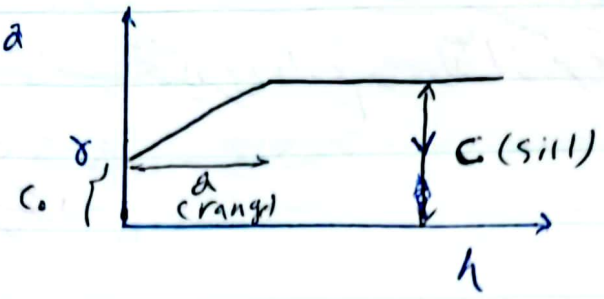
این مدلها توسط معادلاتی به شرح زیر بیان می شوند

① معادله خطی دارای آستانه (sill): اگر semivariogram دارای Nugget

باشد معادله آن به شرح زیر خواهد شد.

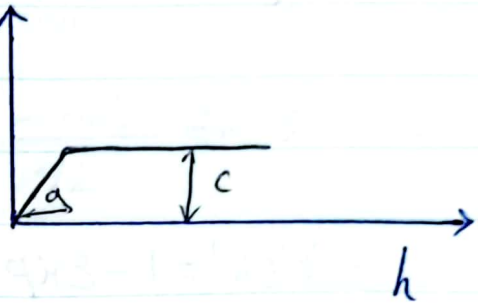
$$\begin{cases} \gamma(h) = C_0 + C\left(\frac{h}{a}\right) & \text{if } h < a \\ \gamma(h) = C_0 + C & \text{if } h \geq a \end{cases}$$

a دامنه است
C_0 آستانه است



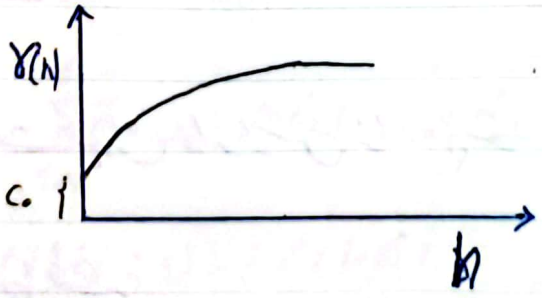
آمر semivariogram دارای Nugget شد معادله به شکل زیر خواهد شد.

$$\begin{cases} \gamma(h) = C\left(\frac{h}{a}\right) & \text{if } h < a \\ \gamma(h) = C & \text{if } h \geq a \end{cases}$$



② معادله دایره‌ای:

$$\begin{cases} \gamma(h) = C_0 + C\left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{h}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right] & \text{if } 0 < h < a \\ \gamma(h) = C_0 + C & h \geq a \end{cases}$$



③ معادله خطی روند دار: در شرایط خاصی وجود می‌آید در این حالت شرایط ثبات قوی وجود ندارد (strang stationnary وجود ندارد)

برای این حالت چون variogram نمی‌توان رسم کرد زیرا مقدار آستانه sill ندارد

در این حالت یک محدودیت در انتخاب تخمینگری داریم و معمولاً از کریجینگ سینوسی (universal kridying) استفاده می‌شود.

④ معادله نمایی نیمه‌گذاری (Exponetioal):

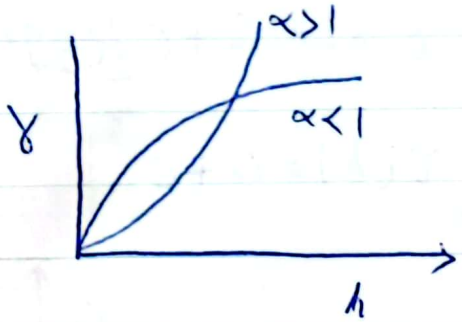
$$\gamma(h) = 1 - \exp(-h/a)$$

⑤ معادله گوسی (gaussian):

$$\gamma(h) = 1 - \exp(-h^2/a^2)$$

⑥ معادله توانی:

$$\gamma(h) = h^{\alpha} \qquad 0 < \alpha < 2$$

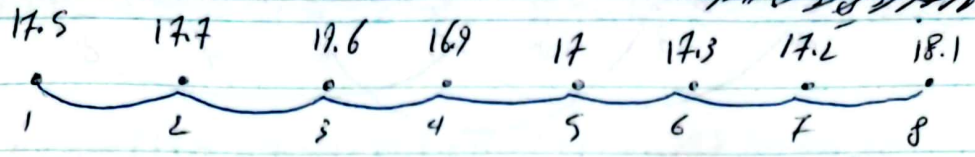


$\alpha > 1$: در این حالت چون واریانس زیاد می‌شود به یک حد ثابتی نمی‌رسد لذا مانند حالت سوم می‌باشد.

⑦ معادله لگاریتمی

$$\gamma(h) = \log h$$

$\sigma = 0.873$



$$c(k,\Delta h) = \frac{(n-k)\sum Z_i Z_{i+k} - \sum Z_i \sum Z_{i+k}}{(n-k)(n-k-1)}$$

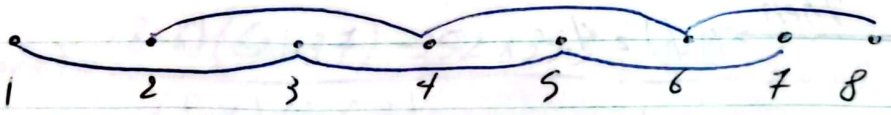
if $k=1$ Then $\Rightarrow n(h) = 7$

$(17.5+17.7+19.6+16.9+17+17.3+17.2)$
$(17.7+19.6+16.9+17+17.3+17.2+18.1)$

$\sum_{i=1}^{7} Z_i = 123.2$ $\quad \sum_{i=1}^{7} Z_{i+k} = 123.8$ $\quad \sum_{i=1}^{7} Z_i Z_{i+k} = 2178.19$

$$c(1,20) = \frac{(8-1)(2178.19) - 123.8 \times 123.2}{(8-1)(8-1-1)} = \frac{-4.83}{42} = 0.115$$

$$r(h) = \frac{-0.115}{0.873^2} = -0.151$$

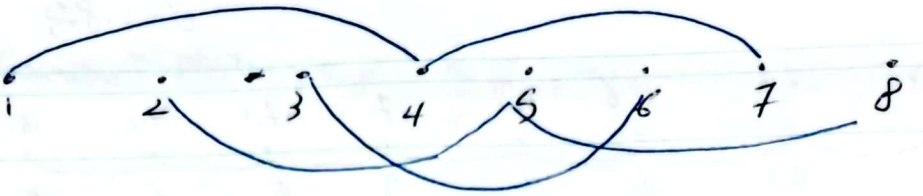


if $k=2$ Then $\Rightarrow n(h) = 6$

$\sum_{i=1}^{6} Z_i = 106$ $\quad \sum_{i=1}^{6} Z_{i+k} = 106.1$ $\quad \sum_{i=1}^{6} Z_i Z_{i+k} = 1873.23$

$$c(2,20) = \frac{(8-2)(1873.23) - 106 \times 106.1}{(8-2)(8-2-1)} = \frac{-7.22}{30} = -0.241$$

$$r(h) = \frac{-0.241}{0.873^2} = -0.316$$

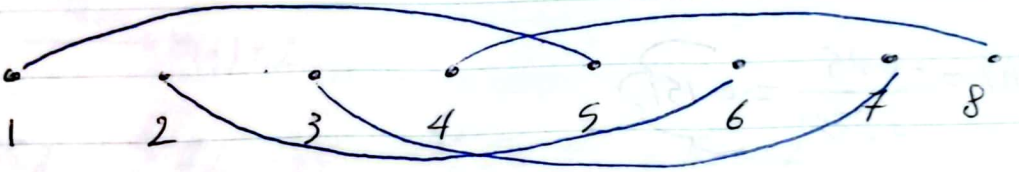


if $k=3$ $\xrightarrow{\text{Then}}$ $n(h)=5$

$\sum_{i=1}^{5} Z_i = 88.7$ $\quad \sum_{i=1}^{5} Z_{i+k} = 86.5$ $\quad \sum_{i=1}^{5} Z_i Z_{i+k} = 1534.11$

$$C(3,20) = \frac{(8-3)(1534.11) - 86.5 \times 88.7}{(8-3)(8-3-1)} = \frac{-2}{20} = -0.1$$

$$r(h) = \frac{-0.1}{0.873^2} = -0.131$$

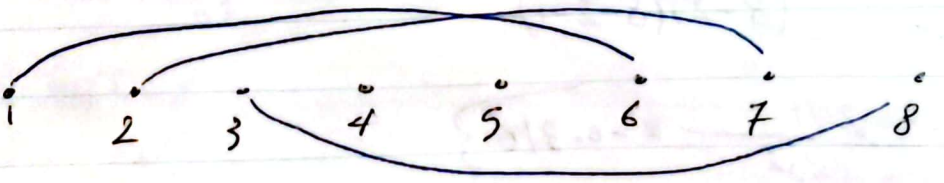


if $k=4$ $\xrightarrow{\text{Then}}$ $n(h)=4$

$\sum_{i=1}^{4} Z_i = 71.7$ $\quad \sum_{i=1}^{4} Z_{i+k} = 69.6$ $\quad \sum_{i=1}^{4} Z_i Z_{i+k} = 1246.72$

$$C(4,20) = \frac{(8-4)(1246.72) - 69.6 \times 71.7}{(8-4)(8-4-1)} = \frac{-3.44}{12} = -0.287$$

$$r(h) = \frac{-0.287}{0.873^2} = -0.376$$



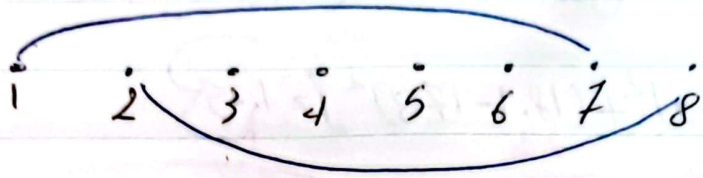
if $k=5$ $\xrightarrow{\text{Then}}$ $n(h)=3$

$\sum_{i=1}^{3} Z_i = 17.5 + 17.7 + 19.6 = 54.8$ $\quad \sum_{i=1}^{3} Z_{i+k} = 17.3 + 17.2 + 18.1 = 52.6$

$\sum_{i=1}^{3} Z_i Z_{i+k} = (17.5 \times 17.3) + (17.7 \times 17.2) + (19.6 \times 18.1) = 961.95$

$$C(5,20) = \frac{(8-5)(961.95) - 54.8 \times 52.6}{(8-5)(8-5-1)} = \frac{3.37}{6} = 0.562$$

$r(h) = 0.737$



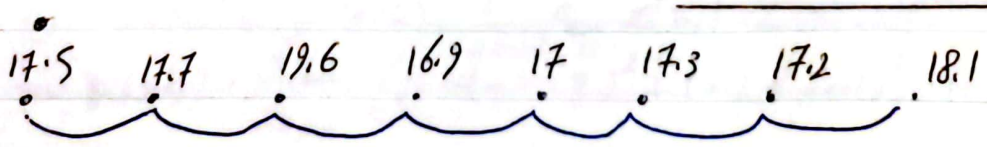
If $k=6$ $\xrightarrow{\text{Then}}$ $n(h) = 2$

$\sum_{i=1}^{2} Z_i = 35.2$ $\quad \sum_{i=1}^{2} Z_{i+k} = 35.3$ $\quad \sum_{i=1}^{2} Z_i Z_{i+k} = 621.37$

$$C(6,20) = \frac{(8-6)(621.37) - 35.2 \times 35.3}{(8-6)(8-6-1)} = \frac{0.18}{2} = 0.09$$

$$r(h) = \frac{0.09}{0.873^2} = 0.118$$

semivariogram



$k=1 \longrightarrow n(h) = 7$

$$\gamma = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [A(x_i+h) - A(x_i)]^2$$

$$\gamma^{*}_{(20)} = \frac{1}{2\times 7}\Big[(17.7-17.5)^2+(19.6-17.7)^2+(16.9-19.6)^2+$$

$$(17-16.9)^2+(17.3-17)^2+(17.2-17.3)^2+(18.1-17.2)^2\Big]=0.85$$

17.5 17.7 19.6 16.9 17 17.3 17.2 18.1

$k=2 \longrightarrow n(h)=6$

$$\gamma^{*}_{(40)} = \frac{1}{12}\Big[(19.6-17.5)^2+(17-19.6)^2+(17.2-17)^2+(16.9-17.7)^2$$

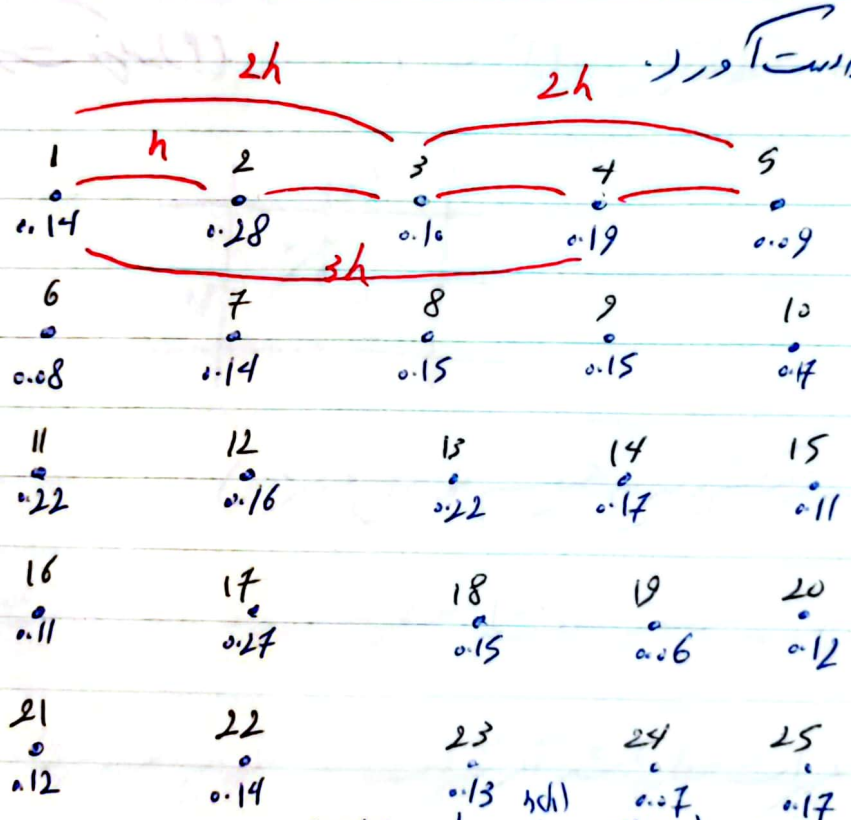
$$+(17.3-16.9)^2+(18.1-17.3)^2\Big]=1.05$$

به همین ترتیب ادامه دارد.

مثال) در شکل زیر، اندازه‌گیری رطوبت انجام گرفته است. semivariogram را برای آن محاسبه کنید. اندازه‌گیری در روی یک شبکه تقریباً منظم 25 متری جمع‌آوری شده است. فرض شود شبکه کاملاً منظم می‌باشد. (ص ۱۳۶ از سیستم کارشناسی)

برای تشریح چگونگی محاسبه semivariogram، مقادیر آن را در امتداد شرقی - غربی محاسبه می‌کنیم از آنجا که فواصل را تقریباً 25 متر در نظر داریم می‌توان از واحد آن صرف نظر کرد.

semivariogram را بدست آورید.



$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [Z(x_i) - Z(x_i+h)]^2$$

$$h=1 \Rightarrow \gamma(25) = \frac{1}{2\times 20}\left[(0.14-0.28)^2 + (0.28-0.1)^2 + (0.1-0.19)^2 + \dots + (0.7-0.17)^2\right] = 0.0038$$

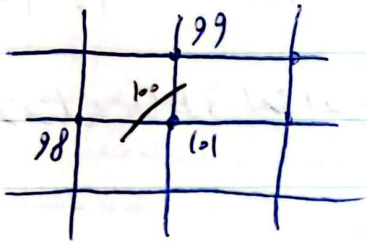
$$h=2 \Rightarrow \gamma(50) = \frac{1}{2\times 15}\left[(0.14-0.1)^2 + (0.28-0.19)^2 + \dots + (0.13-0.17)^2\right]$$

$\gamma(s_0) = 0.00267$

به طور شهودی می‌توان مقدار تغییرنما را به ازای فواصل $h=75$ و $h=100$ و ... محاسبه کرد. واضح است که با افزایش h، تعداد زوج نمونه‌ها که در محاسبه شرکت می‌کنند کمتر می‌شود و بنابراین اعتبار semivariogram به ازای فواصل بزرگتر h کاهش می‌یابد. همچنین باید توجه کرد که به ازای $h=125$ متر یا بیشتر، هیچ زوج نمونه‌ای در محاسبه شرکت نمی‌کند!)

بحث تخمینگری kridying

برعرض رقوم ارتفاعی نقاطی را برداشت کردیم برای کشیدن خطوط تراز، می‌توان از رقوم فوق استفاده کرد. برای این منظور زمین را شبکه‌بندی می‌کنند و با فرض تغییرات خطی با استفاده از میان یابی، خطوط تراز را به راحتی می‌توان رسم کرد. به عنوان مثال اگر بخواهیم خطوط تراز ۱۰۰ را رسم کنیم با میان یابی بین دو نقطه ۹۹ و ۱۰۱ و همچنین ۱۰۱ و ۹۸ می‌توان خطوط تراز ۱۰۰ را رسم کرد.



(برای رسم kridying نیز به همین نحو عمل می‌شود)

ممکن است تغییرات بین دو نقطه خطی نباشد در این حالت زمین کار تولید نیاز نیست تغییرات خطی باشد اگر تغییرات غیر خطی نیز باشد می‌توان تخمین زد.

در kridying برای تخمین نقاطی که اندازه‌گیری نکردیم چون مقادیر با استفاده از نظر فاصله بهم وابسته هستند لذا می‌توانیم فقط اندازه‌گیری شده را تخمین بزنیم، بطوریکه واریانس حداقل و تخمین نااریب باشد. این عمل به تخمین‌گری kridying

است. آمار اندازه‌گیری‌ها در نقاط مختلف مصورت Z باشد.

$$Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

با داشتن semivariogram مقدار یا اثر مورد نظر را در نقطه x_0 ($Z^*(x_0)$) مقدار تخمین زده می‌شود.

مقدار تخمین ← $Z_v^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_{v_i}$ ← مقدار تخمین زده شده

مقدار تخمین زده شده

~~$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i)$~~

$\frac{\sum Z(x_i)}{n} = \sum n^{-1} Z(x_i)$ → λ_i

در میان یابی خطی رابطه است با این شرط که λ ها مساوی گرفته می‌شود ولی در kridging λ ها فرق می‌کند و وزن نقاط در امتیازات یکسان نیست.

$$E[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = 0$$

$$\text{var}[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = \min$$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ برای اینکه تخمین نااریب (unbaised) باشد.

برای اینکه حداقل شدن واریانس از لاگرانژ استفاده می‌کنند.

$$\text{var}[Z^*(x_0) - Z(x_0) - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1\right)] \to \min \quad (1)$$

$$\text{var}[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij} + 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_{0j} \quad (2)$$

اطمینان آن تخمین را محاسبه کرد. در حالیکه در روشهای کلاسیک معمولاً چنین نخواهد بود.

۲ـ معادلات کریجینگ

همانطور که گفته شد کریجینگ یک میانگین متحرک وزن‌دار است. این تخمینگر بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_{v_i} \qquad (۱-۶)$$

که در آن Z_V^* عیار تخمینی، λ_i وزن یا اهمیت کمیت وابسته به نمونهٔ iام و Z_{Vi} عیار نمونهٔ iام است. این نوع کریجینگ را کریجینگ خطی می‌نامند زیرا ترکیب خطی از n داده است. شرط استفاده از این تخمینگر آن است که متغیر Z توزیع نرمال داشته باشد. در صورتیکه متغیر مورد نظر توزیع نرمال نداشته باشد، باید از کریجینگ غیرخطی استفاده کرد و یا می‌توان ابتدا تبدیلی پیدا کرد که توزیع متغیر مورد نظر را به نرمال تبدیل کند و آنگاه روی داده‌های تبدیل یافته کریجینگ خطی انجام داد.

تخمینگر کریجینگ بهترین تخمینگر نااریب است. لذا باید اوّلاً عاری از خطای سیستماتیک باشد و ثانیاً واریانس تخمین آن حداقل باشد. جهت برقراری شرط اول باید میانگین خطای تخمین صفر باشد.

$$E\,[Z_V - Z_V^*] = 0$$

که در آن Z_V مقدار عیار واقعی در نقطه‌ای با مختصات معلوم و Z_V^* مقدار عیار تخمینی در همان نقطه است. رابطهٔ فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$E\left[Z_v - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_{Vi}\right] = 0$$

پس می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$E[Z_v] - E\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_{Vi}\right] = 0 \qquad (۲-۶)$$

و یا

$$E[Z_v] - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E[Z_{vi}] = 0$$

از طرفی $E[Z_V] = m$ لذا می‌توان نوشت:

$$m - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m = 0$$

چون $m \neq 0$ است، لذا باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad (۳-۶)$$

بنابراین شرط اول یعنی ناااریب بودن کریجینگ این محدودیت را که مجموع ضرایب کریجینگ باید معادل واحد باشد، دیکته می‌کند. برای بررسی شرط دوم باید واریانس تخمین را محاسبه کرد و سپس تابع حاصل را به حداقل (می‌نیمم) رساند:

$$E\left[(Z_V - Z_V^*)^2\right] = E\left[Z_V^2\right] - 2E\left[Z_V Z_V^*\right] + E\left[Z_V^{*2}\right] \qquad (۴-۶)$$

از طرفی می دانیم:

$$E[Z_v^2] = \frac{1}{v^2}\int_v dx \int_v E[Z(x)Z(x')]dx' = \bar{C}(v,v) + m^2$$

و همچنین

$$E\left[Z_v Z_v^*\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{1}{vv_i}\int_v dx \int_{v_i} E[Z(x)Z(x')]dx' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{C}(v,v_i) + m^2$$

و بالاخره

$$E\left[Z_v^{*2}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \frac{1}{v_i v_j}\int_{v_i} dx \int_{v_j} E[Z(x)Z(x')]dx' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \bar{C}(v_i,v_j) + m^2$$

با جایگزینی مقادیر فوق در رابطهٔ ۶-۴ خواهیم داشت:

$$E\left[\left(Z_v - Z_v^*\right)^2\right] = \bar{C}(v,v) - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{C}(v,v_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \bar{C}(v_i,v_j) \qquad (۵-۶)$$

با جایگزین کردن مقدار واریوگرام بجای کوواریوگرام، معادلهٔ فوق بصورت زیر

بازنویسی می‌شود:

$$\sigma_E^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{\gamma}(v_i,v) - \bar{\gamma}(v,v) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\,\bar{\gamma}(V_i,V_j) \qquad (۶-۶)$$

که در آن σ_E^2 واریانس تخمین، $\bar{\gamma}(V_i,V)$ میانگین واریوگرام در حالتی است که یک سر بردار h در نمونه iام و سردیگر آن در بلوکی که می‌خواهیم تخمین بزنیم قرار گیرد. $\bar{\gamma}(V,V)$ میانگین واریوگرام در حالتی است که یک سر بردار h در نمونه V_i و سر دیگر آن در نمونه V_j باشد.

بدین ترتیب برای آنکه واریانس تخمین کریجینگ می‌نیمم شود لازم است تابع σ_E^2 بر حسب ضرایب کریجینگ (λ_i) می‌نیمم شود. این امر باید با رعایت شرط پیش فرض $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ صورت گیرد. بنابراین برقراری شرط دوم منجر به حل مسأله بهینه‌سازی محدود زیر می‌شود:

$$\begin{cases} \text{Min} \quad \sigma_E^2 = \bar{C}(v,v) - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(v,v_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\,\bar{C}(v_i,v_j) \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1 \end{cases} \qquad (۷-۶)$$

این مسأله بهینه‌سازی را می‌توان با استفاده از ضرایب لاگرانژ حل کرد. با در نظر گرفتن ضریب لاگرانژ μ باید n مشتق جزیی زیر برابر صفر باشند:

$$\frac{\partial\left[\sigma_E^2 - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - 1\right)\right]}{\partial\lambda_i} = 0 \qquad i = 1,2,3,\ldots,n \qquad (۸-۶)$$

رابطهٔ ۶-۸ در حقیقت یک دستگاه معادلات خطی با $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول (n مجهول λ_iها و یک مجهول μ ضرایب لاگرانژ) می‌باشد. ضریب لاگرانژ در اینجا بجای μ برابر 2μ در نظر گرفته شده است. زیرا در σ_E^2 هم ضریب ۲ وجود دارد، لذا به این ترتیب معادلات ساده‌تر می‌شوند. با محاسبهٔ مشتقات معادلات کریجینگ

بصورت زیر درمی آیند:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \bar{C}(v_i, v_j) - \mu = \bar{C}(v_j, v) & j = 1,2,\ldots,n \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \end{cases} \qquad (۹-۶)$$

بسط داده این معادلات بصورت زیر می باشد:

$$\lambda_1 \bar{C}(V_1,V_1) + \lambda_2 \bar{C}(V_1,V_2) + \lambda_3 \bar{C}(V_1,V_3) + \ldots + \lambda_n \bar{C}(V_1,V_n) - \mu = \bar{C}(V_1,V)$$
$$\lambda_1 \bar{C}(V_2,V_1) + \lambda_2 \bar{C}(V_2,V_2) + \lambda_3 \bar{C}(V_2,V_3) + \ldots + \lambda_n \bar{C}(V_2,V_n) - \mu = \bar{C}(V_2,V) \qquad (۱۰-۶)$$
$$\lambda_1 \bar{C}(V_n,V_1) + \lambda_2 \bar{C}(V_n,V_2) + \lambda_3 \bar{C}(V_n,V_3) + \ldots + \lambda_n \bar{C}(V_n,V_n) - \mu = \bar{C}(v_n,v)$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = 1$$

مقادیر $\bar{C}(V_i,V_j)$ همگی ضرایبی هستند که با استفاده از توابع کمکی قابل محاسبه‌اند. از طرف دیگر همواره می‌توان یک دستگاه معادله خطی را بصورت حاصل ضرب ماتریسی نوشته و از روشهای ماتریسی، دستگاه معادلات را حل کرد. برای این منظور معادلات فوق بصورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} C_{1v} \\ C_{2v} \\ \vdots \\ C_{nv} \\ 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{bmatrix}$$

بر طبق رابطه ۶-۱۰ می‌توان نوشت:

$$AX = B \qquad (۱۱-۶)$$

و یا

$$X = A^{-1}B$$

که در آن برای سادگی مقادیر $\bar{C}(V_i,V_j)$ بصورت C_{ij} (که درایه‌های یک ماتریس

را نشان می دهند) و $\bar{C}(V_i,V)$ بصورت C_{iv} نوشته شده‌اند.

معادلات فوق را بر حسب واریوگرام نیز می‌توان نوشت. در این حالت ماتریسها بصورت زیر درمی آیند:

$$A=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} & 1\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}\gamma_{1v}\\ \gamma_{2v}\\ \vdots\\ \gamma_{nv}\\ 1\end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\\ -\mu\end{bmatrix}$$

$$AX = B \qquad (۱۲-۶)$$

و یا

$$X = A^{-1}B$$

در عمل ترجیح داده می‌شود معادلات کریجینگ، به لحاظ سادگی بر حسب کرواریوگرام نوشته شوند. در مواقعی که کرواریوم تعریف نشده باشد می‌توان یک شبه کرواریوم تعریف کرد بطوریکه داشته باشیم $C(h) = A - \gamma(h)$. مقدار A یک عدد مثبت و بزرگتر از بزرگترین مقدار در سیستم معادلات کریجینگ است.

باید توجه داشت که ماتریس A چه در حالت استفاده از واریوگرام و چه در حالت استفاده از کرواریوگرام یک ماتریس متقارن است، یعنی

$$C_{ij} = C_{ji}$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

دستگاه معادلات خطی ۶-۱۰ را در نظر بگیرید. اگر هر کدام از معادلات فوق را در یک λ_i ضرب کرده و همهٔ معادلات را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\bar{C}(v_i,v_j) - \mu\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_j\bar{C}(v,v_i) \qquad (۱۳-۶)$$

از آنجاکه $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$ است لذا معادلهٔ فوق بصورت زیر درمی آید:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\bar{C}(v_i,v_j)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(v,v_i)+\mu \qquad (۱۴-۶)$$

با جایگزینی این مقدار در رابطهٔ ۶-۵ خواهیم داشت:

$$\sigma_E^2=\bar{C}(v,v)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(v,v_i)+\mu \qquad (۱۵-۶)$$

با در نظر گرفتن شکل ماتریسی معادلات کریجینگ، می‌توان واریانس تخمین را نیز به شکل ماتریس درآورد.

$$\sigma_E^2=\bar{C}(V,V)\cdot X^T.B \qquad (۱۶-۶)$$

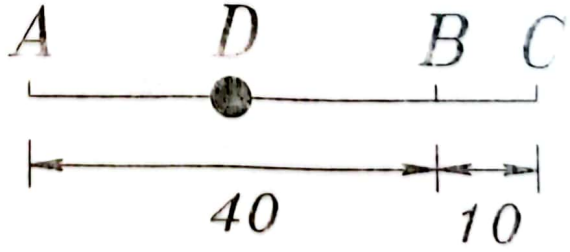
که در آن X و B همان ماتریسهای رابطه ۶-۱۱ می‌باشند و X^T، ترانهادهٔ ماتریس X است.

۳ـ مقایسهٔ کریجینگ با سایر روشهای تخمین

به منظور مقایسهٔ تخمینگر کریجینگ با سایر روشهای تخمین کلاسیک در این قسمت به ذکر مثالی می‌پردازیم.

فرض کنید از محیطی سه نمونه A و B و C مطابق شکل ۶-۱ گرفته شده باشد و بخواهیم عیار را در نقطهٔ D بزنیم. همچنین فرض کنید که واریوگرام کمیت مورد نظر در این محیط مدل کروی با مشخصات زیر داشته باشد:

$C=۳۰\ (٪^۲)$ و $C_0=۳\ (٪^۲)$ و $a=۱۰۰m$



شکل ۶-۱

$$\gamma(h)=C_0+C\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right]$$

$$\gamma(h)=3+0.45h-15\left(\frac{h}{100}\right)^3$$

در این صورت معادلات کریجینگ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} \lambda_1 \bar{\gamma}(AA) + \lambda_2 \bar{\gamma}(AB) + \lambda_3 \bar{\gamma}(AC) + \mu = \bar{\gamma}(AD) \\ \lambda_1 \bar{\gamma}(BA) + \lambda_2 \bar{\gamma}(BB) + \lambda_3 \bar{\gamma}(BC) + \mu = \bar{\gamma}(BD) \\ \lambda_1 \bar{\gamma}(CA) + \lambda_2 \bar{\gamma}(CB) + \lambda_3 \bar{\gamma}(CC) + \mu = \bar{\gamma}(CD) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

در این حالت چون تخمین نقطه‌ای است، میانگین واریوگرام برای هر فاصله برابر مقدار واریوگرام در آن فاصله است پس:

$$\gamma(AA) = \gamma(BB) = \gamma(CC) = \gamma(0) = ۳$$
$$\gamma(AB) = \gamma(BA) = \gamma(۴۰) = ۲۰/۴$$
$$\gamma(AC) = \gamma(CA) = \gamma(۵۰) = ۲۳/۶۲$$
$$\gamma(BC) = \gamma(CB) = \gamma(AD) = \gamma(BD) = \gamma(۲۰) = ۱۱/۸۸$$
$$\gamma(CD) = \gamma(۳۰) = ۱۶/۰۹۵$$

بنابراین معادلات فوق بصورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲۰/۴ & ۲۳/۶۲ & ۱ \\ ۲۰/۴ & ۳ & ۱۱/۸۸ & ۱ \\ ۲۳/۶۲ & ۱۱/۸۸ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱/۸۸ \\ ۱۱/۸۸ \\ ۱۶/۰۹۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\lambda_1 = ۰/۴۸۲۲ \qquad \lambda_2 = ۰/۴۰۸۸ \qquad \lambda_3 = ۰/۱۰۹۰ \qquad \mu = -۰/۴۷۹۲$$

جالب توجه آنکه در تخمین کمیت مورد نظر در نقطه D وزن نمونه A یعنی اثر و اهمیت آن در تخمین کمیت در نقطه D بیشتر از وزن نمونه B است، در حالی که هر دو به یک فاصله از D قرار دارند. علت این امر آن است که در سمت راست نقطهٔ D دو نمونه وجود دارد در حالی که در سمت چپ نقطهٔ D فقط یک نمونه وجود دارد. در حقیقت

وجود دارد در حالی که در سمت چپ نقطهٔ D فقط یک نمونه وجود دارد. در حقیقت نمونه‌های B و C، اطلاعات مربوط به منطقهٔ مشابهی را ارائه می‌دهند. بنابراین تخمینگر کریجینگ اختلالات ناشی از تمرکز زیاد نقاط اندازه‌گیری را بطور خودکار رفع می‌کند. پس عیار در نقطهٔ D بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$Z_D = ۰/۴۸۲۲\, Z_A + ۰/۴۰۸۸\, Z_B + ۰/۱۰۹۰\, Z_C$$

چنانکه ملاحظه می‌شود وزن (اثر یا اهمیت) هر یک از نقاط معلوم در تخمین نقطه مجهول D متفاوت است. یکی از روشهای تخمین کلاسیک، روش میانگین حسابی است. در مثال فوق عیار Z_D براساس روش میانگین حسابی به قرار زیر محاسبه می‌شود:

$$Z_D = \frac{۱}{۳} Z_A + \frac{۱}{۳} Z_B + \frac{۱}{۳} Z_C$$

چنانکه ملاحظه می‌شود در این روش موقعیت نقاط در نظر گرفته نمی‌شود و به نحوهٔ پراکندگی نقاط حول نقطهٔ مورد تخمین بهایی داده نمی‌شود.

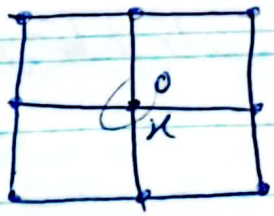
از روشهای دیگر تخمین کلاسیک، روش عکس فاصله است که در آن وزن یا اهمیت نقاط معلوم در تخمین نقطه مجهول، به نسبت فاصله آنها در مقایسه با مجموع فواصل همهٔ نقاط که در تخمین شرکت می‌کنند می‌باشد. پس برای مثال مورد بررسی خواهیم داشت:

$$Z_D = \frac{۱}{۷} Z_A + \frac{۲}{۷} Z_B + \frac{۴}{۷} Z_C$$

در این روش موقعیت هر نقطه بطور منفرد در نظر گرفته می‌شود ولی موقعیت نسبی نقاط در آن لحاظ نمی‌شود و بدین علّت وزن نقطه A و B که به فاصله یکسان از D قرار دارند، یکسان درنظر گرفته می‌شود. در واقع در این روش نحوهٔ پراکندگی نقاط حول نقطهٔ تخمین در نظر گرفته نمی‌شود.

بطورکلی در تمام روشهای تخمین کلاسیک وضع به همین صورت است زیرا این روشها نمی‌توانند ساختار فضایی را در نظر گیرند. از طرفی برای هر تخمینی به روش کریجینگ، واریانس تخمین قابل محاسبه است. واریانس تخمین نشانگر گسترش توزیع خطای تخمین حول میانگین است. بنابراین می‌توان آن را به تعبیری بازده تخمین به حساب آورد. اگر توزیع خطاهای تخمین را از نوع نرمال فرض کنیم می‌توان حدود

تعریف $\gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j)$



با جایگزینی کردن معادله ② در معادله ① و شتق گیری کردن (برای اینکه حداقل باشد)

خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_{ij} + \mu = \gamma_{i0}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$A \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = b \Longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = A^{-1} b$$

$$A_2 \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{n1} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{n2} & 1 \\ \vdots & & & & \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$b^T = [\gamma_{10}\ \gamma_{20}\ \cdots\ \gamma_{n0}\ 1]$

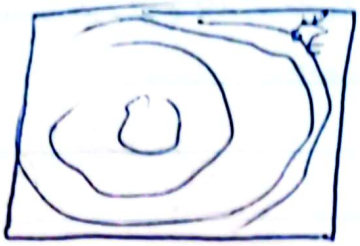
خطای تخمین $\sigma_E^2 = b^T \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$

هرچقدر تعداد نقاط بیشتر باشد دقت بالاتر است ولی ماتریس بزرگتر شده و حل آن مشکل تر می شود تا 25 نقطه نیز در نظر گرفته شود.

* آرمیک: ماتریس را معکوس کنیم (بعد فرض برای 25 نقطه) دیگر نیاز به معکوس گیری نباشد و آن نیز باشد چون ماتریس فوق الذکر براساس فاصله ها به دست آمده، دستخوش تغییر نمی شود.

برای بررسی دقت تخمین از C_{α}^{2} استفاده می‌شود یعنی خطوط تراز C_{α}^{2} را رسم می‌کنند را

در هر ناحیه که C_{α}^{2} بزرگ باشد دقت تخمین کمتر است.



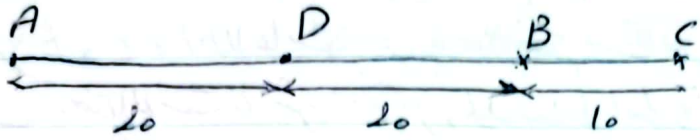
(در مورد ایستگاه باران سنجی (اسناد رکتر قهرمان) جاهایی که C_{α}^{2} زیاد باشد باید ایستگاه باران سنجی احداث کنیم)

* نحوه تخمین بهتر آنکو نیز با استفاده از C_{α}^{2} می‌باشد برای این منظور ابتدا تعدادی از نمونه‌های اندازه‌گیری را حذف می‌کنند و براساس این حذف آنکوی جدیدی را به دست می‌آورند با حذف نقاط گوناگون آنکوهای جدیدی به دست می‌آید و کدام آنکو که دارای C_{α}^{2} کمتر است آنکوی مناسب‌تری است.

* تخمین‌گری مورد بحث Point kridging می‌باشد.

مثال) فرض کنید از محیطی سه نمونه A و B و C مطابق شکل زیر گرفته شده باشد و بخواهیم میزان
نقطه D تخمین بزنیم. همچنین فرض کنید واریانس تغییرنما کمیت مورد نظر در راستای محیط مدل کروی
است و مشخصات آن به شرح زیر است (از سیمین آمار حسنی یک ص ۱۸۲)

$C=30 \qquad C_0=30 \qquad a=100\ m$



$$\gamma(h)=C_0+C\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right]$$

$$\gamma(h)=3+0.45h-15\left(\frac{h}{100}\right)^3$$

$h=20 \longrightarrow \gamma(20)=11.88$ $\qquad$ $h=0 \longrightarrow \gamma(0)=3$

$h=40 \longrightarrow \gamma(40)=20.04$

$h=50 \longrightarrow \gamma(50)=23.62$

$h=10 \longrightarrow \gamma(10)=7.48$

$h=30 \longrightarrow \gamma(30)=16.10$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 1 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v \\ \lambda_2 v \\ \lambda_3 v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 20.04 & 23.62 & 1 \\ 20.04 & 3 & 7.48 & 1 \\ 23.62 & 7.48 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.8 \\ 11.8 \\ 16.1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(50) ۴۲

$\lambda_1 = 0.4822 \quad \lambda_2 = 0.4088 \quad \lambda_3 = 0.109 \quad \mu = -0.4792$

(ممکن است جوابها غلط باشد)

جالب توجه آنکه در تخمین سهمیت مورد نظر در نقطه D وزن نمونه A، یعنی از لحاظ اهمیت آن در تخمین سهمیت در نقطه D بیشتر از وزن نمونه B است. در جایی که جرم در یک فاصله از D قرار دارند. علت این امر آن است که در سمت راست نقطه D دو نمونه وجود دارد در جایی که در سمت چپ نقطه D فقط یک نمونه وجود دارد. در حقیقت نمونه‌های B و C، اطلاعات مربوط به منطقه مشابهی را ارائه می‌دهند. بنابراین تخمینگر کریجینگ اطلاعات ناشی از نزدیکترین نقاط اندازه‌گیری را بطور خودکار رفع می‌کند.

$$Z_D = 0.4822 Z_A + 0.4088 Z_B + 0.109 Z_C$$

** برای تخمین به روش کریجینگ، واریانس تخمین قابل محاسبه است. واریانس تخمین نشانگر گستره توزیع خطای تخمین حول میانگین است. بنابراین می‌توان آن را به تعبیری بازه تخمین به حساب آورد. اگر توزیع خطاهای تخمین را از نوع نرمال فرض کنیم می‌توان حدود اطمینان را برای هر تخمین با روش کریجینگ محاسبه کرد.

مثال)

18.9 18.3 18.9 19.9 ? 17.8 20.4 18.5

عددی را که نداریم می خواهیم با توجه به دو همسایه مجاور آن تخمین بزنیم (فاصله بین نقاط 20cm است)

$\gamma(0) = 1.5 \quad \gamma(20) = 1.6 \quad \gamma(40) = 1.7$

با استفاده از مدل semivariogram مربوطه مقادیر فوق را به دست آورید. چون با استفاده از دو همسایه مجاور می باشد لذا به مقدار $\gamma(0)$ نیازی نیست

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = A^{-1} b$$

$$A = \begin{vmatrix} 1.5 & 1.7 & 1 \\ 1.7 & 1.5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{vmatrix} -2.5 & 2.5 & 0.5 \\ 2.5 & -2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.6 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2.5 & 2.5 & 0.5 \\ 2.5 & -2.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0.5 \quad \lambda_2 = 0.5 \quad \mu = 0 \quad \sum \lambda = 1$

در این حالت مترجم مربوطه اگر دو نقطه را در خلسه مورد نظر همسایگی بگیرد داریم:

$$Z^* = 0.5 \times 19.9 + 0.5 \times 17.8 = 18.8$$

$$\sigma_E^2 = \mu + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \lambda_{i0} = 1.6$$

مثال دوم: مثال قبل را با استفاده از جمع ریسطم حل کنید؟

18.9 19.9 ? 17.8 20.4

با توجه به مدل semivariogram به دست آمده → $\gamma(0)=1.5$, $\gamma(20)=1.6$, $\gamma(40)=1.7$, $\gamma(60)=1.8$, $\gamma(80)=1.9$

$\gamma_{11}=\gamma(0)=1.5$ $\gamma_{12}=\gamma(20)=1.6$ $\gamma_{13}=\gamma(60)=1.8$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & 1 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & 1 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{20} \\ \lambda_{30} \\ \lambda_{40} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 1.6 & 1.8 & 1.9 & 1 \\ 1.6 & 1.5 & 1.7 & 1.8 & 1 \\ 1.8 & 1.7 & 1.5 & 1.6 & 1 \\ 1.9 & 1.8 & 1.6 & 1.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 1.6 \\ 1.6 \\ 1.7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -2.0833 & 0.4167 & -0.4167 & 2.0833 & 0.25 \\ 0.4167 & -0.4167 & 2.0833 & -2.0833 & 0.25 \\ -0.4167 & 2.0833 & -2.0833 & 0.4167 & 0.25 \\ 2.0833 & -2.0833 & 0.4167 & -0.4167 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & -1.75 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.25 \\ +0.0833 \\ 0.25 \\ 0.4167 \\ -0.05 \end{vmatrix}$$

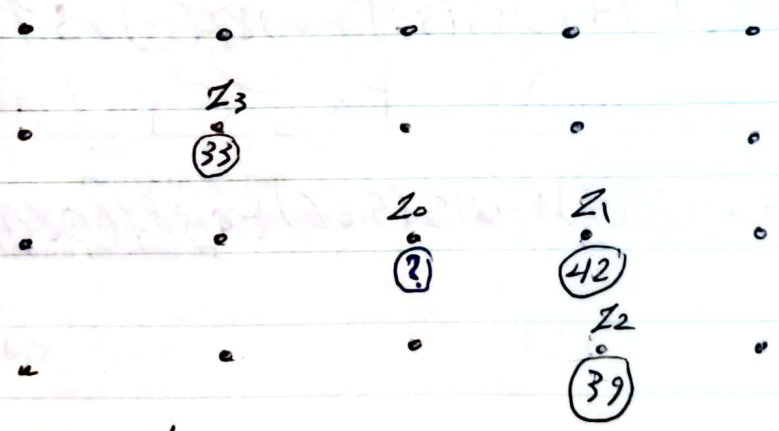
$$Z_0^* = 0.25(18.9) + 0.0833(19.9) + 0.25(17.8) + 0.4167(20.4)$$

$$Z_0^* = 19.33$$

$$\sigma_E^2 = \mu + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \lambda_{i0} = -0.05 + 0.25(1.7) + 0.0833(1.6) +$$

$$0.25(1.6) + 0.4167(1.7) = 1.61667$$

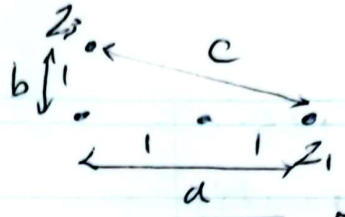
مثال سوم:



$h=1$ برای سه نمونه داده‌شده، semivariogram را $\gamma(h) = 4h$ فرض کنید.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 1 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{20} \\ \lambda_{30} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\gamma_{11}=0 \quad \gamma_{12}=4 \quad \gamma_{13}=$ →



$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$

$\gamma(\sqrt{5})=4\sqrt{5}$

$\gamma_{13}=4\sqrt{5} \quad \gamma_{21}=4 \quad \gamma_{22}=0$

$\gamma_{13}=8.9$

$\gamma_{23}=4\sqrt{8}=8\sqrt{2}$ همسایه‌ی دورتر

$\gamma_{31}=4\sqrt{5} \quad \gamma_{32}=8\sqrt{2} \quad \gamma_{33}=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8.9 & 1 \\ 4 & 0 & 11.3 & 1 \\ 8.9 & 11.3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5.66 \\ 5.66 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\gamma(\sqrt{2})=4\sqrt{2}=5.66$

$\lambda_1=0.398 \quad \lambda_2=0.215 \quad \lambda_3=0.387 \quad \mu=0.308$

$\sum\lambda=1 \Rightarrow 0.398+0.215+0.387=1$ ok

$Z_0^*=0.398(42)+0.215(39)+0.387(33)=37.87$

$\sigma_E^2=0.308+0.398(4)+0.215(5.66)+0.387(5.66)=4.69$

$\gamma(h) = 0.3 + 0.6\left[1.5\left(\frac{h}{160}\right) - \right.$

دامنه $\gamma \leq 160$ m

$\gamma(h) = 0.9$

$C_0 = 0.3$

Sill $= 0.9$

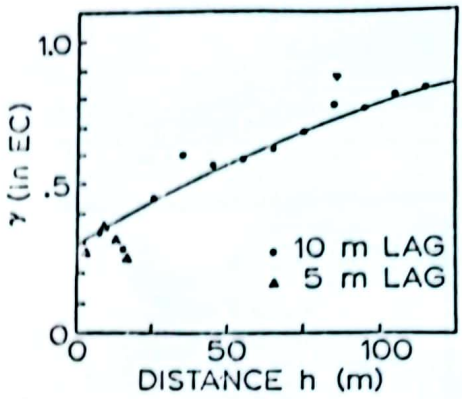


Fig. 3–4. Variogram for EC measurements. Solid line is spherical model with nugget, range, and sill as 0.3, 160, and 0.9, respectively. (Data from Al-Sanabi, 1982.)

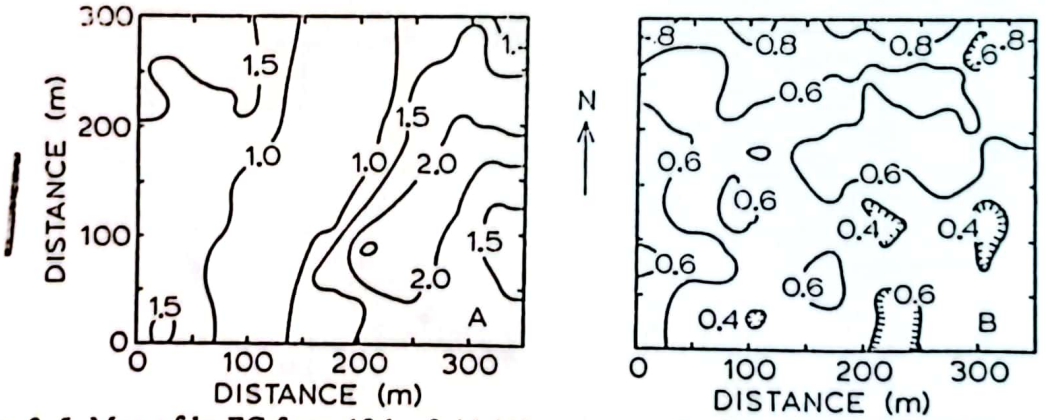
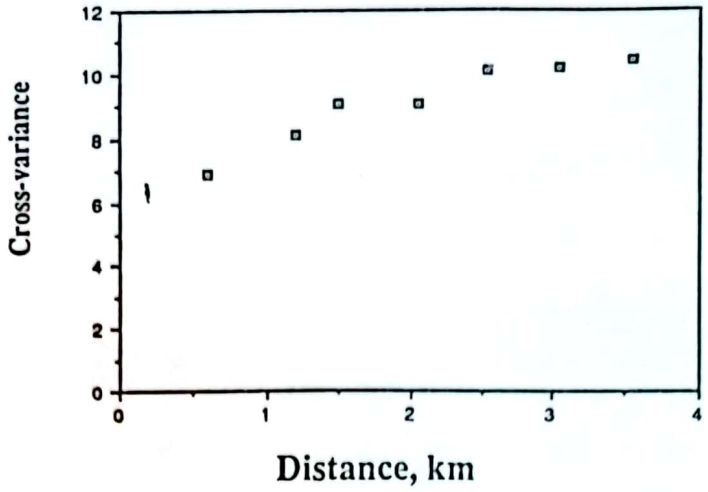


Fig. 3–5. Map of ln EC for a 10-ha field (A) and the kriged "variance" (B). Hatched line indicates interior depression.



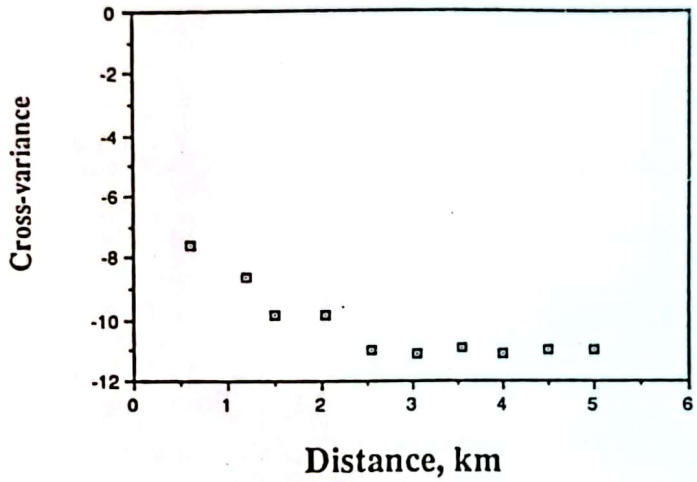


Fig. 4: *a) Cross-variogram of ln(K) versus sand content, b) cross-variogram of ln(K) versus clay content.*

clay - $\ln k \rightarrow$ $\begin{cases} \gamma^{12}(h) = -5_{xx} - 6.1\left[1.5\frac{h}{3} - 0.5\left(\frac{h}{3}\right)^3\right] & h \leq 3 \text{ tm} \\ \gamma^{12}(h) = -11.1 & h > 3 \end{cases}$

sand - $\ln k \rightarrow$ $\begin{cases} \gamma^{12}(h) = 5 + 5.5\left(1.5\left(\frac{h}{3}\right) - 0.5\left(\frac{h}{3}\right)^3\right) & h \leq 3 \end{cases}$

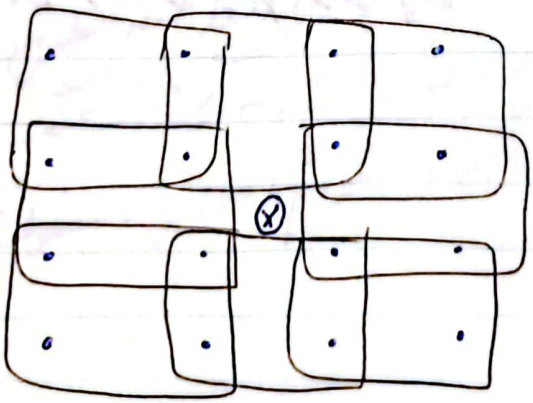
انواع عدنه برداری:
الف) نمونه برداری منظم (مانند مثال قبل)
ب) نمونه برداری نامنظم (در نامنظم باید مختصات را داشته باشیم)

در تخمین آماری کریجینگ جمعیت، جمعیت نرمال باید باشد. اگر جمعیت آلاب نرمال باشد ابتدا باید جمعیت تبدیل به جمعیت نرمال شود. بعد از تبدیل کردن جمعیت به جمعیت نرمال آنگاه عملیات تخمینگری را انجام می دهیم.

آلمر مشخصات تبدیل به جمعیت نرمال نگرد semivariogram چیز خوبی در زمین کاوی

روش کریجینگ مجموعه ای (Block kriging)

در این روش بجای استفاده از نقطه های مجاور از مجموعه نقطه های مجاور استفاده می شود که این عمل دقت کار را افزایش می دهد.



مانند این مجموعه را در نظر می گیریم

$$\bar{Z}(x_0) = \frac{1}{V_0}\int_{V_0} Z(u)\,du$$

$$Z^*_{(x_0)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i)$$

شرط $\sum \lambda_i = 1$

$$A|\hat{\lambda}| = S$$

$$S^T = [\bar{\gamma}(x_1, v_0), \bar{\gamma}(x_2, v_0), \dots, \bar{\gamma}(x_n, v_0)]$$

$$\bar{\gamma}(x_i, v_0) = \frac{1}{v_0} \int_{v_0} \gamma(x_i, x)\, dx$$

$$\sigma_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, v_0) + \mu - \left(\frac{1}{v_0}\right) \int_{v_0} \bar{\gamma}(x, v_0)\, dx$$

تنها تفاوت کریجینگ واریانس تخمین در Block kriging با PointTkrging است

به طوری که از رابطه واریانس تخمین مشاهده می‌گردد به اندازه $\frac{1}{v_0}\int_{v_0}\bar{\gamma}(x,v)dx$ در

واریانس تخمین Blockkriging کمتر از Pointkriging می‌باشد.

انواع کریجینگ بر حسب مجهول ها

- کریجینگ نقطه ای

در صورتی که مقادیر اندازه گیری شده و مقادیر مورد تخمین به وسیله کریجینگ به نقطه نسبت داده شوند کریجینگ را نقطه ای گویند. در حالت کلی برداشت نمونه به صورت نقطه ای امکان پذیر نیست و حتی نمونه های خیلی کوچک نیز دارای حجم هستند. اگر در صورتی که ابعاد نمونه ها در مقابل دامنه تاثیر نیم تغییرنما کوچک باشد می توان آن را با تقریب نقطه ای فرض کرد. در این نوع کریجینگ از همه نیم تغییرنمای نقطه ای استفاده می شود. در این حالت، تمامی مقادیر ماتریکس نیم تغییرنما که در معادلات کریجینگ باید جایگزین شوند به مقدار مقادیر تغییرنما به ازای فاصله مشخص تبدیل می شوند. بیشترین کاربرد کریجینگ نقطه ای در ترسیم نقشه هاست. به این ترتیب که بر اساس نقاط واقع در شبکه نمونه برداری، ابتدا شبکه منظمی از نقاط تعریف شده با مختصات معلوم روی نقشه به روش کریجینگ نقطه ای مورد تخمین قرار می گیرد و سپس با یک اکوئیدیستانس انتخابی، خطوط هم تراز مانند آنچه رسم می شود.

کریجینگ بلوکی (Block kriging)

اگر در منطقه‌ای هنگامی که از کریجینگ نقطه‌ای استفاده می‌کنیم ناپیوستگی در خصوصیات مورد بررسی داشته باشیم به جای در نظر گرفتن یک نقطه x_0، مقدار متوسط ناحیه‌ای به مساحت H_v و مرکز x_0 را به دست می‌آوریم. اگر در این حالت از کریجینگ نقطه‌ای استفاده کنیم نقشه‌های خطوط تراز دارای واریانس بالا و دقت کم خواهد شد.

علاوه بر آن موقع نمونه برداری، حجمی از نمونه برداشت می‌شود یعنی نمونه‌ها دارای حجم و سطح مشخص هستند مگر این که این حجم و سطح نمونه‌ها در مقایسه با دامنه تغییرات اندک باشد تا بتوان از کریجینگ نقطه‌ای استفاده کرد.

در کریجینگ بلوکی به جای استفاده از نقاط اطراف از مجموعه نقاط مجاور (بلوک) استفاده می‌شود. در این حالت متوسط بلوک به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{Z}(x_0) = \frac{1}{v_0}\int_{v_0} Z(x)\,dx$$

در این حالت v_0 بلوکی است با مساحت یا حجم مشخص.

کریجینگ بلوک به شرح معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{Z}^*(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_0)$$

برای برآورد نااریب بودن آن از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\sum \lambda_i = 1$$

حداقل واریانس به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$Var[\bar{Z}^*(x_0) - \bar{Z}(x_0)]$$

در اینجا حالت، واریانس تخمینی از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\gamma}(x_0, x_i) + \mu - \frac{1}{v_0} \int \bar{\gamma}(x_i, x_i) dx$$

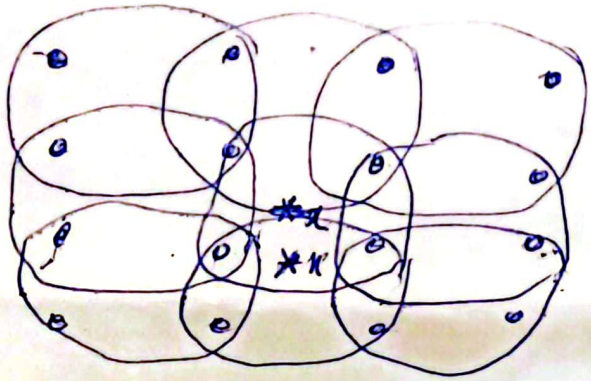
تا میانگین‌های نوع تغییر نما بلوک v_0 بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{\gamma}(x_i, v_0) = \frac{1}{v_0} \int_{v_0} \gamma(x_i, x_i) dx$$

بطور عمومی واریانس تخمینی کریجینگ بلوکی کمتر از کریجینگ نقطه‌ای است. با مقایسه معادله واریانس تخمینی در کریجینگ بلوکی و کریجینگ نقطه‌ای ملاحظه می‌گردد مقدار واریانس تخمینی در کریجینگ بلوکی به اندازه رابطه زیر کمتر از کریجینگ نقطه‌ای است.

$$\frac{1}{v_0} \int \bar{\gamma}(x_i, v_0) dx$$

به عبارت دیگر، در اینجا روش نیز مانند سمت چپ معادلات مانند حالت کریجینگ نقطه‌ای است ولی در سمت راست آن از انتگرال نوع تغییر نما روی بلوک $\left(\frac{1}{v_0} \int \bar{\gamma}(x_i, x_i) dx\right)$ استفاده شده است



کریجینگ شرطی یا کریجینگ ناپیوسته — Disjunctive kriging

کریجینگ ناپیوسته یا شرطی یک روش برآورد غیرخطی است که نسبت به کریجینگ ساده اطلاعات بیشتری به دست می‌دهد. در کریجینگ ناپیوسته همانند دیگر کریجینگ‌ها که در آن‌ها به داده‌های مختلف وزن‌های آماری متفاوتی داده می‌شوند در این حالت نیز داده‌ها وزن آماری متمایزی دارند که ترکیب مجموعه آن‌ها سیستم معادلات غیرخطی را تشکیل می‌دهند. در کریجینگ شرطی علاوه بر تخمین، توزیع احتمال یک تخمین نیز تعیین می‌شود.

برای تشریح مطلب فرض می‌کنیم که بخواهیم مشخصات نقطه‌ای را بر اساس مشخصات اندازه‌گیری شده نقاط دیگر برآورد کنیم. به عبارتی منظور نقطه مورد نظر را Z_0 و مشخصات نقاط معلوم اندازه‌گیری شده، Z_1، Z_2، ... و Z_n در نظر می‌گیریم.

Z_0، Z_1، ... Z_n همگی متغیرهای تصادفی هستند. بنابراین مسئله آن است که تابعی مانند $f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ را بیابیم که تخمینگری نااریب و با واریانس کمینه از Z_0 باشد.

در حالت کلی، اگر تابع n متغیر را T بنامیم به عنوان احتمال شرطی Z_0 بر اساس n متغیر موجود به دست آورد.

$$f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = E[Z_0 / Z_1, Z_2, \dots, Z_n]$$

اگر مقدار تخمین Z_0 را با Z_0^* نشان دهیم در اینصورت خواهیم داشت:

$$Z_0^* = f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = E[Z_0 / Z_1, Z_2, \dots Z_n]$$

در اینصورت حالت Z_0^* بهترین تخمینگر است.

در کریجینگ ساده، Z^* به صورت ترکیبی خطی از داده‌های Z_i به دست می‌آید:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_i$$

اما در کریجینگ شرطی، رابطه به شکل زیر می‌باشد:

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{n} f_i(Z_i)$$

f_i ضریب ثابت نیست بلکه خود ممکن است یک تابع و یا بخشی از یک تابع باشد. بنابراین تخمینگر حاصل Z_0^*، تخمینگر غیرخطی است.

کریجینگ نااریبیست با شرط دارای دو ویژگی مهم به شرح زیر است:

الف) هریک از عبارت‌ها، تنها به متغیرهای $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ بستگی دارد. بنابراین‌ها همانگونه که از اسم این روش پیداست در مورد هریک به طور جداگانه می‌توان کریجینگ را انجام داد

ب) اگر ضرایب f_i به گونه‌ای انتخاب شوند که تخمینگر حاصل نااریب باشد، در اینصورت میانگین مجذور خطا را می‌توان با استفاده از کوواریانس بیان کرد.

اگر ضرایب f_i طوری انتخاب شوند که میانگین مجذور خطا کمینه شود در اینصورت می‌توان ثابت کرد که باید مجموعه معادلات زیر صادق باشند:

$$E[z_0 | z_1] = \sum_{i=1}^{n} E[f_i(z_i) | z_1]$$

$$E[z_0 | z_2] = \sum_{i=1}^{n} E[f_i(z_i) | z_2]$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$E[z_0 | z_n] = \sum_{i=1}^{n} E[f_i(z_i) | z_n]$$

در حالت عمومی، ضرایب f_i در روابط بالا مجهول هستند. برای محاسبه این ضرایب، فقط باید توزیع‌های دو متغیره زیر مشخص باشند:

$f_{oi}(z_0, z_i)$ $\quad i = 1, 2, \dots, n$

$f_{ij}(z_i, z_j)$ $\quad i \neq j, \; i = 1, 2, \dots, n$

در واقع جوهر اصلی این روش محاسبه f_i با استفاده از توزیع دو متغیره می‌باشد.

فقط شروع کار پیچیده نابیوسته، ارائه مدلی برای تشریح توزیع‌ها می‌باشد مدلی که معمولاً به کار می‌رود، توزیع طبیعی استاندارد (توزیع نرمال استاندارد) شده با میانگین صفر و واریانس واحد است. این توزیع از آن جهت

انتخاب مدل بر اساس آن، ارائه یک مدل دو متغیره که در عملیات معدن مورد نیاز است، بسیار ساده می‌شود. روابط مابین کوواریانس $(c(h))$ و اتوکورلیشن (Autocorrelation) $(f(h))$ با در نظر گرفتن متغیر $Z(x)$ و واریانس (σ^2) به شرح زیر وجود دارد:

$$c(h) = E[\{Z(x) - \mu\}\{Z(x+h) - \mu\}]$$

$$C(0) = E[\{Z(x) - \mu\}^2] = \sigma^2$$

$$f(h) = c(h)/c(0)$$

$$c(h) = C(0) - \gamma(h)$$

$\gamma(h)$ نیم تغییرنما است.

همانطور که اشاره شد در کریجینگ نایپوسته، مدل معمولاً به کار گرفته می‌شود که دارای توزیع نرمال استاندارد شده با میانگین صفر و واریانس واحد باشد.

بنابراین ϕ تابعی است که نمونه‌های $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ را با مجموعه‌ای از مقادیر $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ که به طور نرمال توزیع شده‌اند مرتبط سازد.

این تبدیل به شرح زیر است:

$$Z(x_i) = \phi\{Y(x_i)\}$$

تابع ϕ ترکیب خطی از چند جمله‌ای‌های هرمیت (Hermite Polynomials) به شرح زیر است:

$$\phi\{Y(x_i)\} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k H\{Y(x_i)\}$$

H_k چند جمله‌ای هرمیت است و از فرمول Rodrigues's Formula

به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$H_k(y) = (-1)^k \exp(y^2/2) \frac{d^k}{dy^k} \{\exp(-y^2/2)\}$$

ضریب Q_k از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$Q_k = \frac{1}{k!\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) H_k(y) \exp(-y^2/2)\, dy \right]$$

تابع $\phi(y)$ توسط سری نامحدود جمله‌ای هرمیت که برای هر نمونه تخمین زده می‌شود به دست می‌آید.

تابع ϕ_k حل تحلیلی ندارد و برای آن باید از روش‌های عددی کمک گرفته می‌شود.

برای محاسبه احتمال شرطی با داشتن حد (Threshold) z_c که مرتبط با y_c است می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P(x_0) = Prob\{Z(x_0) \geq z_c \mid Z(x_1), Z(x_2), \ldots, Z(x_n)\}$$

$$= Prob\{Y(x_0) \geq y_c \mid Y(x_1), Y(x_2), \ldots, Y(x_n)\}$$

ماترون (۱۹۷۱) $P(x_0)$ را تابع تبدیل نقطه نامیده و نشان داد که چگونه آن به روش کریجینگ نااریبیت محاسبه می‌شود. ایده ان تابع معرف $\Omega[Z(x_0) \geq z_c]$ را در نقطه x_0 برای حد z_c تعریف کرد که مقدار آن برابر با $Z(x_0) \geq z_c$ برابر یک و در غیر اینصورت صفر است

سطح حرمت به شکل زیر است:

$$\Omega[Z(x_0)\geq Z_c] = \Omega[Y(x_0)\geq Y_c] = 1 - G(Y_c) - g(Y_c)\sum_{k=1}^{K} H_{k-1}(Y_c) H_k[Y(x_i)]/k_0$$

$G(Y_c)$ انتگرال احتمال توزیع نرمال و $g(Y_c)$ مشتق آن است. بقیه پارامترها در معادلات قبل تعریف شده است. معادلات بالا برای نقطه اعمال می‌شوند برای بلوک B می‌توان معادله زیر را به کار برد.

$$\bar{P}(B) = \frac{1}{B}\int_B \text{prob}\{Y(x_0) \geq Y_c \mid Y(x_1), Y(x_2), \ldots, Y(x_n)\}$$

کریجینگ عمومی universal kriging

به مقدار کمیت‌های مرتبط با پدیده‌ها و فرآیندهای محیط اطراف می‌توان از دو زاویه قطعیت پذیر و احتمال پذیر نگریست. بسیاری از علوم تجربی در محدوده‌های مورد بررسی خود با عدم قطعیت مواجه هستند. لذا آمار و احتمال در اکثر علوم نقش کلیدی پیدا کرده است.

یک متغیر ناحیه‌ای از دو مولفه تشکیل شده است. یک مولفه آن قطعیت پذیر و مولفه Determinesti's دیگر تصادفی stochastic می‌باشد.

$$Z(x) = m(x) + \xi(x)$$

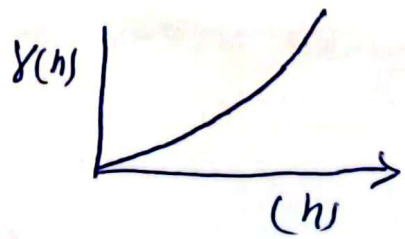
مولفه $m(x)$ قطعیت پذیر بوده و می‌تواند تابعی از مختصات باشد در صورتی که $\xi(x)$ یک متغیر تصادفی (احتمال پذیر) است که در صورت دارا بودن خاصیت پیوستگی و مقادیر h می‌توانند ساختار فضایی متغیر ناحیه‌ای باشد. در کریجینگ‌های نقطه‌ای و بلوکی و شرط تغییرات مولفه قطعیت پذیر ناحیه‌ای ناچیز است. بر اساس سه روش یاد شده بر اساس اصل استوار است که تغییرات مولفه قطعیت پذیر صفر یا ناچیز است و فرض می‌شد شرایط ایستایی در مورد تابع $Z(x)$ صادق است. اما ممکن است در عمل حالت‌هایی به وجود آید که

تغییرات مولفه قطعیت پذیر قابل در نظر گرفتن نباشد. در این شرایط اصطلاحاً گفته می‌شود در منطقه روند وجود دارد. در این حالت برای تخمین گر از آربیتیک عمومی استفاده می‌شود. این گر یک ناریب از مرتبه k خوانده می‌شود.

اگر تغییرات $m(x)$ ناچیز نباشد در این شرایط گفته می‌شود در منطقه روند وجود دارد. شکل زیر بیانگر روند است

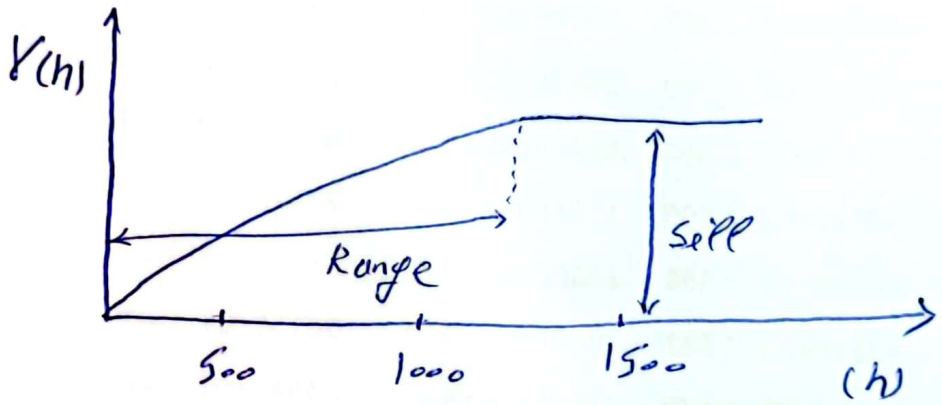
برای روش تشخیص روند می‌توان از نیم تغییرنما استفاده کرد. نیم تغییرنماهایی که در محدوده مورد نظر به سقف ثابتی نمی‌رسند دارای روند هستند. روندها انواع مختلفی دارد که در ذیل به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌شود.

الف) نیم تغییرنماهایی که در محدوده نمونه برداری و بطالبه دارای آستانه (sill) نمی‌باشند. در این نیم تغییرنماها آستانه ثابت و معینی وجود ندارد.



ب) نیم تغییرنماهایی که دارای آستانه معینی و ثابت هستند ولی دامنه (Range) آن از بزرگتر از محدوده مورد نمونه برداری و مطالعه می باشد.

به عنوان مثال در یک منطقه محدوده مورد نمونه برداری و مطالعه دارای طول ۱۰۰۰ متر است، چنانچه نیم تغییرنما دارای دامنه بیش از ۱۰۰۰ متر باشد در این حالت رونه وجود دارد.

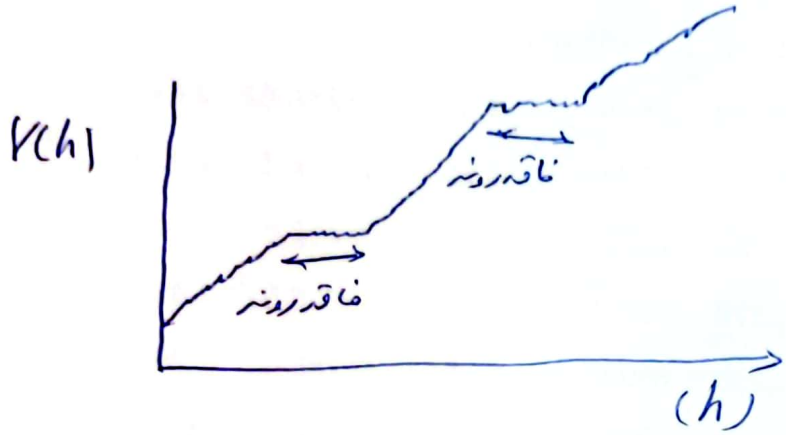


با توجه به شکل بالا نیم تغییرنما دارای آستانه ثابت است ولی چون در محدوده مورد مطالعه به آستانه ثابت نرسیده است لذا وجود رونه در نظر گرفته می شود. شایان ذکر است

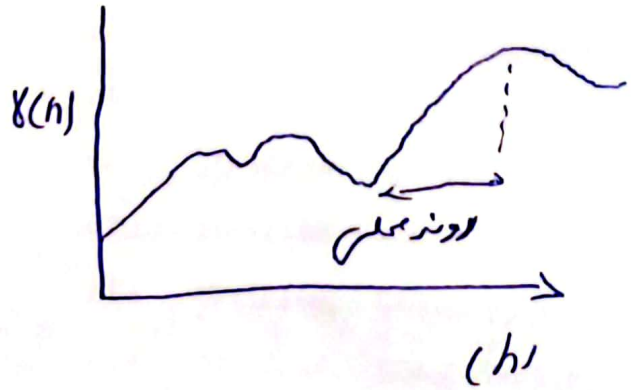
ممکن است رونه در یک مقیاس ظاهر شود و در مقیاس دیگر ظاهر نشود. به طوری که در شکل بالا ملاحظه می شود در مقیاس بزرگتر از ۱۵۰۰ متر رونه وجود ندارد. در حالی که در مقیاس کمتر از ۱۰۰۰ متر رونه را باید در مدل سازی منظور کرد.

ج - در منطقه ای ممکن است در کل دارای رونه نباشد ولی

به معنی وجود ناصیه‌ای فاقد روند باشد. در شکل زیر در تمام منطقه یک روند وجود دارد اما در آن هر توان استاتیک محلی را نمی‌توان یک معیار محلی وجود دارد که دارای استاتیک بوده و فاقد روند هستند



ب) در منطقه ای ممکن است در کل فاقد روند بوده و استاتیک کلی وجود داشته باشد اما در عین حال روند محلی و موضعی نیز دیده شود. در موضع‌های A و محل محل B روند وجود داشته باشد



معادله‌ای که معمولاً برای $m(x)$ به کار می‌رود یک چند جمله‌ای است که به صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

$$m(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j P_j(x)$$

در اینجا معادله $P_j(x)$ را توابع بنیادی می‌نامند که بر حسب ماهیت روند تعیین می‌شوند. در صورت وجود روند درجه دوم در جهت x معادله زیر نوشته می‌شود:

$$m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

در صورت وجود روند درجه دوم در جهت‌های x و y معادله $m(x)$ به شکل زیر خواهد شد:

$$m(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy$$

در حالتی که روند درجه دوم در سه جهت x و y و z وجود داشته باشد معادله فوق به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 z^2 + a_7 xy + a_8 xz + a_9 yz$$

در سیل رودخانه برای تخمین گر از کریجینگ عمومی استفاده می‌شود. در اینجا نوع کریجینگ ابتدا روند مدل سازی می‌شود و سپس معادلات

همانند معادلات بالا به روند برازش داده می‌شود. پس از آنکه معادله‌ای به روند برازش داده شد در هر نقطه به کم کردن روند از مقدار ازانه از سری مشاهده مقدار پس مانده می‌رسد. اگر مدل مناسبی برای روند انتخاب شده باشد پس مانده‌ها روندی را از خود نخواهند داشت. در این حالت پس مانده نقطه مجهول را با استفاده از یکی از تکنیک تخمین زده و سپس آن را به مقدار روند در نقطه تخمین افزود.

کوکریجینگ cokriging

در کوکریجینگ از یک متغیر علاوه بر متغیر اولیه، از متغیر ثانویه نیز استفاده می‌شود. حالتی را در نظر بگیرید که تنها یک متغیر ثانویه برای بهبود تخمین مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید Z_1 متغیر اولیه است که در n نقطه و Z_2 متغیر ثانویه است که در m نقطه اندازه‌گیری شده‌اند:

$$Z_1 = [Z_1(S_1), Z_1(S_2), \ldots, Z_1(S_n)]$$

$$Z_2 = [Z_2(V_1), Z_2(V_2), \ldots, Z_2(V_m)]$$

که در این معادلات S و V بیانگر موقعیت نمونه‌ها است. در این حالت تخمین‌گر کوکریجینگ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_1^*(S_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_1(S_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Z_2(V_j)$$

که در این معادله $Z_1^*(S_0)$ تخمین متغیر Z_1 در نقطه S_0 و λ_i و λ_j وزن‌های آماری مربوط به متغیر اولیه و ثانویه می‌باشند. به منظور نااریب بودن تخمین فوق باید دو محدودیت زیر برقرار باشد

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 0$$

برای بهینه سازی تخمین تحت دو محدودیت متفاوت به عبارت
دیگر برای حداقل نمودن واریانس تخمین از روش ضرایب لاگرانژ
استفاده میگردد که نتیجه آن