روش عددی: در این روش پس از انفصال معادلات دیفرانسیل حاکم، مجموعه ای از معادلات جبری حاصل می‌شود که پس از حل آنها، نتایج بصورت منفصل بدست می آید:

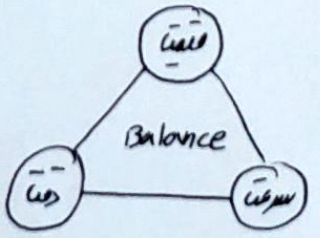
محاسن این روش عبارتست از:

- عدم محدود شدن به مسائل خطی
- قابل اعمال به هندسه های پیچیده

ومعایب آن عبارتست از:

- خطاهای محاسباتی (خطاهای گرد کردن معادلات و خطای قطع)
- اعمال شرایط مرزی مشکل
- قیمت محاسبات

انتخاب روش: سرعت، قیمت و دقت سه عامل مهم در انتخاب یک روش می باشند:



از روش عددی نمی‌توان منحصرا از آنها بعنوان یک ابزار مستقل استفاده نمود. جهت تائید نتایج حاصل از روش های عددی، بکارگیری روش های تجربی (آزمایشگاهی) مورد نیاز است.

روش های عددی حل معادلات حاکم بر جریان سیال، دینامیک سیالات محاسباتی یا Computational Fluid Daynamics (CFD) نامیده می‌شود.

معادله دیفرانسیلی شامل متغیرهای مستقل، وابسته و مشتقات بین متغیرهای وابسته به متغیرهای مستقل باشد یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای (PDF) نامیده می‌شود.

$$F(\underbrace{x, y, \dots}_{\text{مستقل}}, \underbrace{u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}}_{\text{وابسته}})$$

بعنوان مثال معادله دیفرانسیل جزئی بصورت

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

توابعی به فرم $u(x,y) = \sin(x+y)$ در معادله صدق کرده و جواب‌های آن محسوب می‌شوند.

درجه PDE :

بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله دیفرانسیل، درجه آن معادله نامیده می‌شود.

در معادله‌ی آن بالاترین مرتبه مشتق ۲ هست ولذا با معادلات دیفرانسیل درجه ۲ سروکار داریم.

معادلات دیفرانسیل خطی یا غیرخطی و شبه خطی است.

* خطی: اگر ضرایب عبارات بکار رفته در آنها تنها تابع متغیرهای مستقل باشد.

* درصورتیکه ضرایب مذکور علاوه بر اینکه تابع متغیرهای مستقل باشند. تابع متغیرهای وابسته یا مشتقات آن نیز باشند معادله دیفرانسیل غیرخطی نامیده می‌شود.

* درصورتیکه معادله دیفرانسیل نسبت به بالاترین مشتق موجود در آن خطی باشد، شبه خطی است.

بعنوان مثال:

$u u_x + u_{xx} = 0 \longrightarrow$ معادله غیرخطی

$x u_x + u_{xx} = 0 \longrightarrow$ معادله خطی

$(x^2+y^2) u_{xy} + u_{xx} + u = 0 \longrightarrow$ معادله خطی

$(u^2 + x^2 u) = 0 \longrightarrow$ معادله غیرخطی

در حالت کلی:

PDE مرتبه ۲ $\quad a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{xy} + d\phi_x + e\phi_x + f\phi = g(x,y)$

از حل این PDE هدف بدست آوردن ϕ تابعی از x و y خواهد $(\phi(x,y))$

ضرایب a تا f تنها تابعی از متغیرهای مستقل x و y باشند معادله خطی و اگر این ضرایب تابعی از x و y و ϕ و ... باشند معادله غیرخطی است. همچنین تابعی از x، y و ϕ، ϕ_x، ϕ_y باشند معادله شبه خطی است (با بالاترین مشتق خطی باشد)

معادله همگن و ناهمگن :

اگر تابع به صورت $g(x,y)=0$ باشد معادله همگن و در غیر اینصورت معادله ناهمگن می باشد

non_Homo Homogeneous

$u_{xx}+2xyu_{xy}+xyu_{y}=e^{xy}$ ⟵ درجه دو، خطی و غیر همگن $\boxed{g(x,y)=e^{xy}}$

$u_{xxy}+x[u_{xy}+(Lnx)u]=0$ ⟵ درجه سه، خطی و همگن

$u_{x}u_{xx}+xuu_{x}=\sin(x)\cos(x)$ ⟵ درجه ۲، غیرخطی و غیرهمگن

دسته بندی معادلات دیفرانسیل جزئی :

۱. فیزیکی

۲. ریاضی

دسته بندی فیزیکی : الف) معادلات حاکم بر مسائل تعادلی (Equilibrium) (انتقال حرارت در اتاق ② مخزن ① در دریا ، مسئله آلاینده)

مثال

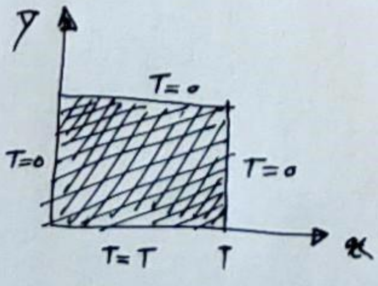
ب) معادلات حاکم بر مسائل پیماشی (marching)

الف) مسائل تعادلی مسائلی هستند که حل معادلات دیفرانسیل مربوط به آنها در یک ناحیه بسته که روی مرزهای آن شرایط مرزی مشخص وجود دارد اعمال می شود . این مسائل به مسائل مقادیر مرزی نیز معروف هستند

<<Boundary value problem>> (معادلات بیضوی)

مثال : توزیع درجه حرارت در یک محیط با وجود هدایت حرارتی ثابت در حالت دائمی از حل معادله لاپلاس زیر بدست می آید :

$$\nabla^2 T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$



ب) معادلات پیمایشی (marching) (انتشار دارند)

این دسته از مسائل که گذرا یا شبه گذرا بوده و حل معادله PDE مربوطه آنها در یک ناحیه باز نگه‌داشته باشد

مجموعه‌ای از شرایط اولیه و مرزی قرار داده اعمال می‌شود. به این نوع مسائل، مسائل مقدار اولیه نیز گفته می‌شود.

«یعنی وابسته به زمان می‌باشند»

به عنوان مثال: در مراحل اولیه آب‌گیری یک سد خاکی

هدایت حرارتی غیر دائم یک بعدی در محیطی با ضریب نفوذ حرارتی ثابت α و دمای اولیه صفر که به طور ناگهانی یک مرز (مرز سمت راست) تحت تأثیر دمای T_0 قرار می‌گیرد در نظر بگیرید.

فرم عمومی PDE مرتبه ۲

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu+G=0$$

$B^2-4AC>0 \longrightarrow$ (Hyperbolic) معادله هذلولوی
$B^2-4AC=0 \longrightarrow$ (Parabolic) معادله سهموی
در گروه فیزیکی marching حل وابسته به زمان است

$B^2-4AC<0 \longrightarrow$ (elliptic) معادله بیضوی
$\rightarrow$ equilibrium تعادلی

مثال: معادله لاپلاس به فرم عمومی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \quad \text{یا} \quad \phi_{xx}+\phi_{yy}=0$$

$$A=1.0,\ B=0,\ C=1.0 \longrightarrow B^2-4AC=0-4\times1\times1=-4<0$$

لذا معادله فوق، از گروه معادلات هذلولوی یا معادله تعادلی قرار می‌گیرد.

مثال: معادله موج wave eq

$$a^2 u_{xx} - u_{yy} = 0$$

$$A = a^2 \text{ و } B = 0 \text{ و } C = -1 \longrightarrow B^2 - 4AC = 0 - 4a^2(-1) = 4a^2 > 0$$

لذا معادلات موج در گروه معادلات هذلولوی یا marching قرار می گیرند.

در این درس ما ۳ گروه از معادلات هذلولوی، بیضوی و سهموی را جداگانه مورد بررسی قرار خواهیم داد.

بخش اول درس به حل عددی معادلات سهموی، سپس حل عددی معادلات بیضوی و نهایتا حل عددی معادلات هذلولوی مد نظر قرار خواهد گرفت.

* نمونه معادلات سهموی:

۱) نشت غیر دائمی درون (داخل) بدنه سد خاکی

۲) تعیین سطح آب زیرزمینی در حالت برداشت غیر دائمی

۳) پمپاژ غیر دائمی

$\boxed{\text{(marching)}}$

* نمونه معادلات بیضوی:

equilibrium یا تعادلی

۱) شبکه جریان در یک سد خاکی یا بتنی

۲) پخش دائمی آلودگی در مخزن یک سد

* نمونه معادلات هذلولوی:

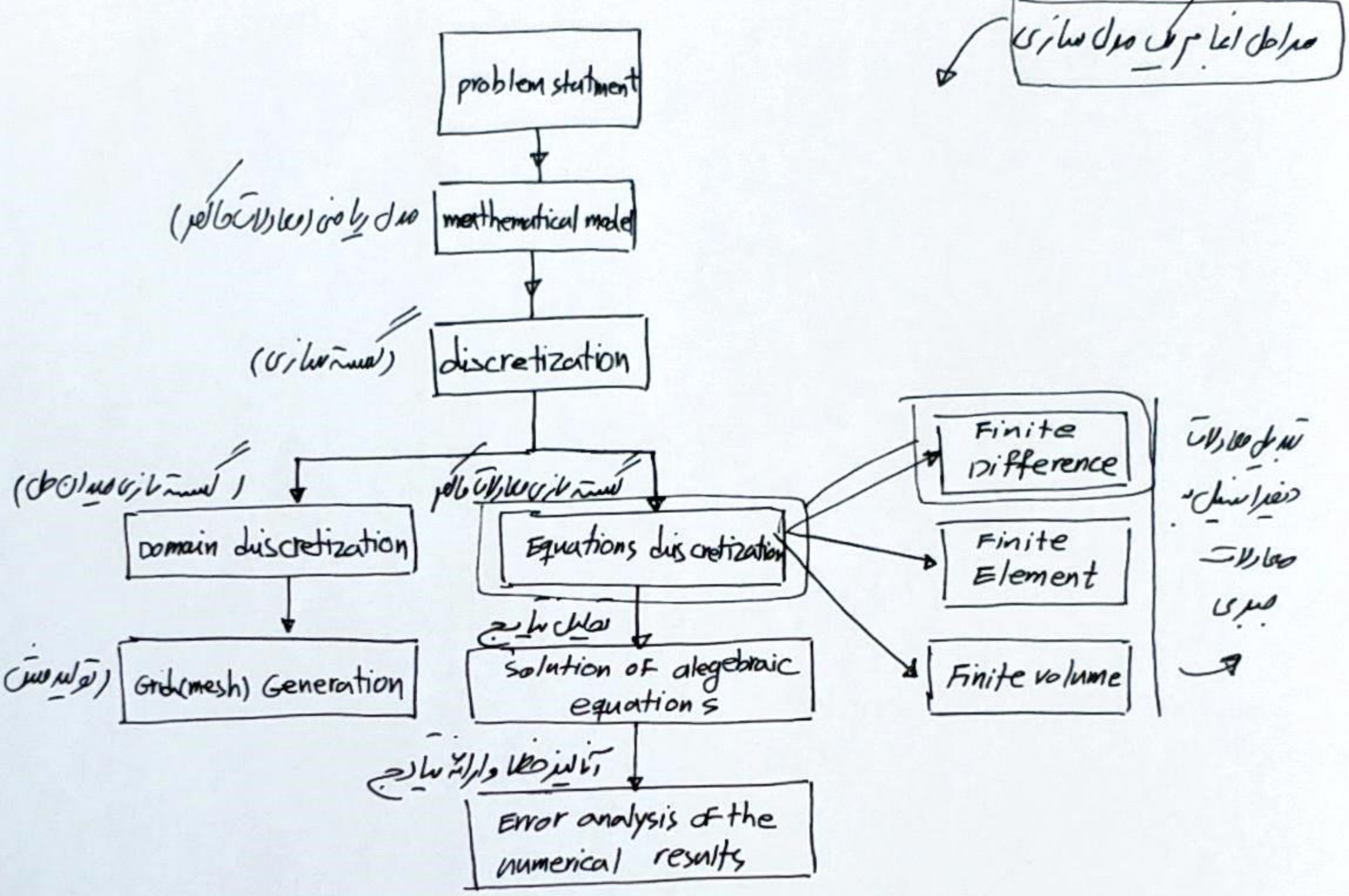
۱) حرکت موج ناشی از پدیده شکست سد

۲) موج ناشی از روندیابی سیلاب

۳) معادلات saint_venant برای روندیابی سیلاب در رودخانه

۴) موج ناشی از ضربه قوچ

در CFD هدف یافتن حل معادلات حاکم بر جریان سیال می باشد. جواب عددی یک معادله دیفرانسیل عبارتست از یک سری اعداد در نقاط گسسته ای از میدان حل، که از کنار گذاشتن آنها توزیع متغیرهای وابسته بدست می آید.



<< بخش عمده ای از درس در مورد مبحث Equations discretization و Finite Difference می باشد >>

با توجه به فلوچارت بالا اولین قدم پس از تعیین معادلات حاکم بر فیزیک مسئله مورد نظر، انفصال معادلات و میدان حل می باشد.

۳ روش عمده جهت گسسته سازی معادلات در حل عددی وجود دارد:

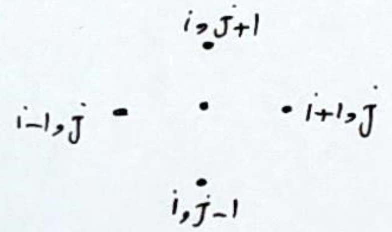
۱) اختلاف محدود FD (Finite Differeree)

۲) اجزای محدود FE (Finite Element)

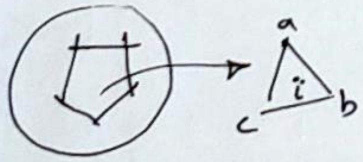
۳) حجم های محدود FV (Finite volume)

در روش FD ، مشتقات جزئی در معادلات دیفرانسیل با رابطه‌ای یا عبارات جبری اختلافی تقریب زده می‌شوند. در این روش ناحیه حل ، به تعدادی نقطه منفصل شده و سپس روی هر کدام از این نقاط ، مشتقات جزئی موجود در معادله دیفرانسیل بصورت عبارات جبری تقریب زده می‌شوند. بعنوان مثال مشتق جزئی $\frac{\partial u}{\partial x}$ در نقطه (i,j) را چنین بیان می‌کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$



در روش FE ، ابتدا میدان حل به نواحی کوچکتری تقسیم می‌کنیم سپس در هر زیر ناحیه یک حل تقریبی برای معادله دیفرانسیل حدس زده شده و شرایط مجهول در حل تقریبی با مینیمم (minimum) کردن خطای آن محاسبه می‌شود. به هر یک از زیر ناحیه‌ها ، یک المان گفته می‌شود.



« FE از پایه و اساس با FD متفاوت است »

روش FV از جهت اینکه شکل انتگرالی دارد ، بسیار شبیه روش FD است در بعضی مراجع آن را بعنوان مجموعه‌ای از روش FE می‌شناسند

« استفاده از قانون بقا در میدان جریان که به تعدادی زیر ناحیه تقسیم شده است »

abbas2hoseyni@gmail.com