



دانشگاه خوارزمی

دانشکده فنی و مهندسی

گروه مهندسی مکانیک

عنوان پایان نامه:

تحلیل دینامیک غیر خطی شفت‌های کامپوزیتی

استاد راهنما:

دکتر سید علی اصغر حسینی

استاد مشاور:

دکتر مهدی زمانیان

گرد آورنده:

حسین شعبانعلی نژاد

تابستان ۹۴

الحمد لله

چکیده

در این رساله، دینامیک غیرخطی یک شفت نامیزان کامپوزیت چرخان مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حرکت محوری-خمشی-خمشی-پیچشی از طریق روابط اصلی سه بعدی در مواد کامپوزیت و بکارگیری اصل همیلتون بدست آمده‌اند. اثر ژيروسکوپي، اینرسی چرخشی و کوپلینگ ناشی از ناهمسانگردی مواد لحاظ شده است در حالی که از تغییر شکل برشی صرف نظر شده است. برای تحلیل رفتار دینامیکی روتور، فرم کامل معادلات بدون هیچ گونه ساده سازی (بطور مثال اثر کشیدگی یا کوتاه شدگی) استفاده شده است. روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات گسسته شده اعمال شده است. یک رابطه تحلیلی که تابعی از پارامترهای سیستم می‌باشد و توصیف کننده ارتعاشات اجباری شفت کامپوزیت چرخان در همسایگی ارتعاشات اصلی است بدست می‌آید. گسسته سازی توسط یک مود و دو مود انجام شده است و نتایج با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نشان داده شده است که اگرچه تحریک در همسایگی مود اول تنظیم شده است ولی گسسته سازی توسط یک مود کافی نیست و پاسخ غیر دقیق می‌دهد. نشان داده شد که به علت وجود کوپلینگ در معادلات حداقل دو مود برای گسسته سازی لازم است. اثر میرایی خارجی، خارج از مرکزیت و زاویه الیاف بروی دامنه ارتعاشات بررسی شده است. علاوه بر این اثر کوپلینگ محوری-پیچشی بروی منحنی پاسخ فرکانسی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. در نهایت برای اعتبار سنجی به نتایج حاصل از تئوری اغتشاشات از شبیه سازی عددی استفاده شده است.

کلمات کلیدی: شفت چرخان، شفت کامپوزیت، ارتعاشات اجباری، روش مقیاس‌های چندگانه

تقدیر

با سپاس فراوان از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر سید علی اصغر حسینی که در تمامی این راه پر فراز و نشیب همواره مرا یاری کردند و با راهنمایی‌های روشن‌گرانه خودشان همچون چراغ راهی مسیر را برای من روشن می‌ساختند. باشد که این کار علمی پاسخ کوچکی باشد به خیل زحمات ایشان.

از جناب آقای دکتر مهدی زمانیان که قبول زحمت فرمودند و به عنوان استاد مشاور، از کمک‌های بی دریغانه وی بهره جستم تا این راه به پایان برسد کمال تشکر را دارم.

فهرست مطالب

فصل ۱: مقدمه.....	۱
فصل ۲: مقدمه‌ای بر دینامیک شفت‌ها.....	۸
۱-۲ دینامیک شفت.....	۹
۲-۲ دینامیک روتور خطی.....	۱۷
۱-۲-۲ معادله حرکت.....	۱۸
۲-۲-۲ سیستم‌های دوار.....	۱۸
۳-۲-۲ ارتعاش آزاد.....	۲۰
۳-۲ سرعت بحرانی.....	۲۴
۴-۲ زمینه‌های ناپایداری.....	۳۱
۵-۲ پاسخ ارتعاشات اجباری.....	۳۳
۱-۵-۲ پاسخ نابالانسی.....	۳۳
۲-۵-۲ حرکت پلی هارمونیک.....	۳۵
۶-۲ دینامیک غیرخطی روتورها.....	۳۷
۷-۲ دینامیک روتور با سرعت متغیر.....	۳۹
۸-۲ بازه زمانی در برابر بازه فرکانسی.....	۳۹
فصل ۳: معادلات حرکت.....	۴۱
۳- معادله حرکت.....	۴۲

۳-۱	مواد کامپوزیت	۴۲
۳-۲	انرژی پتانسیل و جنبشی	۴۵
۳-۳	استخراج معادلات حرکت	۵۱
فصل ۴:	روش مقیاس‌های چندگانه	۵۵
۴-۱	روش مقیاس‌های چندگانه	۵۶
۴-۱	تشدید اصلی با گسسته سازی توسط یک مود	۵۶
۴-۲	تشدید اصلی با گسسته سازی توسط دو مود	۶۶
فصل ۵:	مثال‌های عددی	۷۷
۵-	مثال‌های عددی	۷۸
۹۲	نتیجه گیری و جمع بندی	۹۲
۹۳	پیشنهادات برای ادامه کار	۹۳
۹۴	پیوست‌ها	۹۴
۹۷	مراجع مآخذ	۹۷

فهرست اشکال

۹ شکل ۱-۲- مدل تحلیلی رنکین و شکل جسم آزاد آن
۲۱ شکل ۲-۲- نمودار کمپل چهار ربعی از یک روتور انعطاف پذیر (روتور یک توربوجت کوچک)
۲۲ شکل ۲-۳- نمودار کمپل استاندارد (فقط ربع اول نشان داده شده است) و منحنی نرخ تلاشی یک روتور انعطاف پذیر
۲۳ شکل ۲-۴- مکان ریشه یک روتور انعطاف پذیر به عنوان تابعی از سرعت چرخش
۲۴ شکل ۲-۵- نمودار کمپل مربوط به همان روتور انعطاف پذیر منحنی‌های قبلی، ولی برای لرزش رو به جلو از مقادیر مثبت ω و لرزش معکوس از مقادیر منفی ω استفاده شده
۲۵ شکل ۲-۶- مکان ریشه‌ها که در آن لرزش رو به جلو و معکوس با مثبت و منفی ω نشان داده شده است
۲۶ شکل ۲-۷- پاسخ فرکانسی روتور (روی یاتاقان‌های فعال مغناطیسی) در حالت ایستا
۲۷ شکل ۲-۸- پاسخ فرکانسی روتور (روی یاتاقان‌های فعال مغناطیسی) با سرعت ۳۳۰۰ دور در دقیقه
۲۸ شکل ۲-۹- تقاطع‌ها در نمودار کمپل برای یافتن سرعت بحرانی
۲۸ شکل ۲-۱۰- (a) طرح یک شفت تحت لرزش دایروی همگام (b) موقعیت در صفحه xy . مناطق هاشور خورده تحت تنش کششی هستند
۳۰ شکل ۱۱-۲- سرعت بحرانی روتوری که نمودار کمپل آن صاف است
۳۴ شکل ۲-۱۲- دامنه پاسخ نابالانسی یک روتور میرا شده‌ی متقارن محوری
۳۵ شکل ۲-۱۳- لوله چرخش. (a) نمای سه بعدی لوله (b) تصویر در صفحه xy ، (c) ، (d) تصویر در صفحه $x\Omega$ و صفحه $y\Omega$
۳۷ شکل ۲-۱۴- شکل آبشیب یک روتور
۴۳ شکل ۳-۱- محورهای دستگاه مختصات اصلی بروی یک لایه دلخواه از کامپوزیت
۴۶ شکل ۳-۲- نمای یک شفت تغییر شکل داده و دستگاه مختصات چرخان $x-y-z$
۴۸ شکل ۳-۳- جابجایی یک سطح مقطع دلخواه از شفت و نقطه P ناشی از تغییر تغییر شکل
۴۹ شکل ۳-۴- تعریف زوایای اویلر
۵۱ شکل ۳-۵- دستگاه مختصات استفاده شده (الف) تعریف اجزای تنش (ب)، (ج)
۷۸ شکل ۵-۱- منحنی پاسخ فرکانسی برای خارج از مرکزیت‌های مختلف و گسسته سازی تک مود
۷۹ شکل ۵-۲- منحنی پاسخ فرکانسی برای خارج از مرکزیت‌های مختلف و گسسته سازی دو مود
۷۹ شکل ۵-۳- مقایسه ای بین منحنی پاسخ فرکانسی برای گسسته سازی تک مود و دو مود
۸۰ شکل ۵-۴- دامنه بر حسب خارج از مرکزیت کلی برای گسسته سازی تک مود
۸۱ شکل ۵-۵- دامنه بر حسب خارج از مرکزیت کلی برای گسسته سازی دو مود
۸۲ شکل ۵-۶- مقایسه بین منحنی‌های دامنه-خارج از مرکزیت برای گسسته سازی تک مود و دو مود
۸۲ شکل ۵-۷- دامنه بر حسب میرایی خارجی برای گسسته سازی تک مود
۸۳ شکل ۵-۸- دامنه بر حسب میرایی خارجی برای گسسته سازی دو مود
۸۴ شکل ۵-۹- مقایسه بین منحنی دامنه-میرایی برای گسسته سازی یک مود و دو مود
۸۴ شکل ۵-۱۰- $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب ضریب میرایی برای گسسته سازی یک مود
۸۵ شکل ۵-۱۱- $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب ضریب میرایی برای گسسته سازی دو مود
۸۵ شکل ۵-۱۲- مقایسه ای بین نمودار $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب میرایی برای گسسته سازی تک مود و دو مود

- شکل ۵-۱۳- $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب خراج از مرکزیت کلی؛ گسسته سازی تک مود ۸۶
- شکل ۵-۱۴- $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب خراج از مرکزیت کلی؛ گسسته سازی دو مود ۸۷
- شکل ۵-۱۵- مقایسه ای بین گسسته سازی یک مود و دو مود برای منحنی $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب خراج از مرکزیت کلی ۸۷
- شکل ۵-۱۶- منحنی پاسخ فرکانسی برای مقادیر مختلف زاویه الیاف؛ $e_1=e_2=0.0003$ ۸۸
- شکل ۵-۱۷- منحنی پاسخ فرکانسی بدست آمده با وجود کوپلینگ محوری-پیچشی و بدون آن برای گسسته سازی یک مود ۸۸
- شکل ۵-۱۸- منحنی پاسخ فرکانسی بدست آمده با وجود کوپلینگ محوری-پیچشی و بدون آن برای گسسته سازی یک مود ۸۹
- شکل ۵-۱۹- مقایسه ای بین منحنی پاسخ فرکانسی برای گسسته سازی توسط یک مود با کوپلینگ و بدون آن ۹۰

فصل ۱

مقدمه

بدون شک شفت‌های چرخان یکی از اجزای مهم در سیستم‌های مکانیکی از جمله اتومبیل‌ها و هلیکوپترها هستند. اهمیت نیاز به این نوع اجزا همواره باعث شده تا مطالعات گوناگونی در مورد آنها انجام شود. شفت‌های کامپوزیتی هم از این قاعده مستثنی نبوده و به عنوان یک گزینه مناسب جایگزین برای شفت‌های فلزی همواره مورد توجه قرار گرفته است. شفت‌های کامپوزیتی دارای نسبت مقاومت به وزن بالایی بوده و در عین حال سطح ارتعاش کمتر و دوره سرویس طولانی تری دارند که همین مزایا سبب افزایش روزافزون استفاده از این شفت‌ها در زمینه های مختلف صنعتی شده است. در نتیجه تا به امروز مطالعات مختلفی بر روی آنها صورت گرفته و مدل‌های ریاضی متفاوتی برای توصیف رفتار دینامیکی این گونه از شفت‌ها ارائه شده است.

به عنوان مثال سایموند^۱ و زینبرگ^۲ [۱] از تئوری تیر معادل^۳ (EMBT) استفاده کردند تا سرعت بحرانی یک شفت کامپوزیتی را محاسبه کنند و نتایج را با آزمایشات خودشان مقایسه کردند. داس ریس^۴ [۲] و همکارانش از تئوری تیر تیموشنکو به همراه تئوری پوسته‌های نازک دانل^۵ استفاده کردند تا ماتریس سختی را استخراج کنند. آنها روش المان محدود تقریبی راهل^۶ و بوکر^۷ [۳] را بکار گرفتند تا معادلات حرکت شفت را بدست آورند و در نهایت سرعت بحرانی را محاسبه کنند. بعداً در سال ۱۹۹۲ برت^۸ [۴] از تئوری تیر اوپلر-برنولی استفاده کرد تا مدلی را ارائه دهد که اثر ژيروسکوپي را همراه با کوپلینگ خمش-پیچش^۹ را شامل شود. کیم^{۱۰} و برت [۵] از تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه اول استفاده کردند تا معادلات حرکت را بدست آورند. آنها با استفاده از این مدل سرعت بحرانی را محاسبه کردند. برت و کیم [۶] تئوری تیر برس-تیموشنکو را بکار گرفتند تا معادلات حاکم را بدست آورند. آنها نشان دادند که اثر تغییر شکل برشی عرضی در محاسبه سرعت بحرانی شفت‌های کوتاه مهم است. سینگ^{۱۱} و گوپتا^{۱۲} [۷] با استفاده از تئوری EMBT و تئوری تیر لایه‌ای دو مدل ارائه کردند. مدل شامل اثرات تغییر شکل خمشی و کشیدگی بود. نشان داده

^۱ Symonds

^۲ Zinberg

^۳ Equivalent module beam theory

^۴ Dos Reis

^۵ Donnel

^۶ Ruhl

^۷ Booker

^۸ Bert

^۹ Flexural-torsional coupling

^{۱۰} Kim

^{۱۱} Sing

^{۱۲} Gupta

شد که در حالت لایه چینی نامتقارن نتایج حاصل برای سرعت بحرانی از هر کدام از مدل‌ها متفاوت است. چن^۱ و پنگ^۲ [۸] با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو معادلات حرکت را بدست آوردند. آنها با استفاده از روش المان محدود شرایط پایداری یک شفت کامپوزیتی تحت بار محوری فشاری نوسانی را مطالعه کردند. بعداً در سال ۲۰۰۱ سانگ^۳ و همکارانش [۹] مدلی را بر پایه تیر جدار نازک برای شفت‌های کامپوزیتی جدار نازک ارائه کردند. از مدل برای محاسبه فرکانس طبیعی و پایداری در حالت بارهای محوری جانبی و تغییرات زاویه لایه چینی استفاده شد. چنگ^۴ و همکارانش [۱۰] مدلی را بر پایه تیر تیموشنکو مرتبه اول ارائه کردند و با استفاده از روش المان محدود معادلات حاکم را بدست آوردند. از مدل برای محاسبه سرعت بحرانی، فرکانس طبیعی، شکل مودها و پاسخ گذرای ناشی از نیروی نابالانسی استفاده شد. چی-یونگ چانگ^۵ و همکارانش [۱۱] ارتعاشات یک شفت کامپوزیتی شامل تقویت کننده‌های^۶ با زاویه‌ی اتفاقی را بررسی کردند. آنها از تئوری میدان-متوسط-موری-تاناکا^۷ استفاده کردند تا برهمکنش موجود در نواحی تمرکزهای محدود تقویت کننده‌ها در مواد کامپوزیت را لحاظ کنند. از روش المان محدود برای محاسبه فرکانس طبیعی شفت در حالت یکنواخت^۸ به همراه سرعت‌های لرزش^۹ و بحرانی شفت دوار استفاده شد. بانرجی^{۱۰} و سو^{۱۱} [۱۲] ماتریس سختی دینامیکی یک تیر چرخان کامپوزیت را توسعه دادند تا ارتعاشات آزاد یک شفت کامپوزیت را تحلیل کنند. از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حاکم استفاده شد. آنها الگوریتم ویتریک-ویلیام^{۱۲} را به ماتریس سختی دینامیکی حاصل اعمال کردند تا فرکانس طبیعی را بدست آورند. مدل همچنین شامل اثر کوپلینگ خمشی-پیچشی بود سینو^{۱۳} و همکارانش [۱۳] یک تئوری تیر یکنواخت ساده شده (SHBT) را برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و آستانه ناپایداری معرفی کردند. بادی^{۱۴}

Chen^۱

Peng^۲

Song^۳

Cheng^۴

Chih-Yung Chang^۵

Reinforcement^۶

Mori-Tanaka-mean-field^۷

Stationary^۸

Whirling speed^۹

Banerjee^{۱۰}

Su^{۱۱}

Wittrick-Williams^{۱۲}

Sino^{۱۳}

Badi^{۱۴}

و همکاری‌اش [۱۴] از تحلیل المان محدود (FEA)^۱ استفاده کردند تا اثر زاویه الیاف و لایه چینی بروی سختی پیچشی، فرکانس طبیعی، خستگی مقاومت خمشی، حالات شکست و دوام تیوپ‌های کامپوزیت را بررسی کنند. آزمایشات تجربی برای اعتبار سنجی به مدل FEA بر روی شفت‌های کامپوزیت انجام شد. مانتنیر^۲ و هوچارد^۳ [۱۵] از مدل تیر تیموشنکو استفاده کردند تا به یک فرمولاسیون برای ارتعاشات عرضی شفت کامپوزیت نصب شده بروی تکیه‌گاه ویسکوالاستیک برسند. آنها با استفاده از الگوریتم ژنتیک بر روی بهینه سازی مطالعه کردند. مانتنیر و هوچارد [۱۶] بعداً با استفاده از معادلات ریلی-تیموشنکو دینامیک شفت چرخان بر روی تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک در حالت بحرانی را مطالعه کردند تا ناپایداری‌ها را پیش بینی کنند. آنها اثر عوامل متفاوتی را بررسی کردند. از جمله اینرسی چرخشی، نیروهای ژایروسکوپی، برش عرضی و سختی تکیه‌گاه‌ها. آنها همچنین میرایی هیستریک^۴ را در تحلیل‌هایشان لحاظ کردند. برش عرضی و سختی تکیه‌گاه‌ها از موثرترین عوامل بودند. تاثیر لایه چینی کامپوزیت، طول شفت و سختی تکیه‌گاه‌ها روی سرعت آستانه مورد مطالعه قرار گرفتند. یانگ شن^۵ و همکاری‌اش [۱۷] روش تقریبی-متغیری (VAM)^۶ و اصل همیلتون را بکار بردند تا معادلات حرکت شفت کامپوزیتی ساخته شده با سیم‌های آلیاژ حافظه دار (SMA) را بدست آورند. مدل شامل برش عرضی، اینرسی چرخشی و ناهمسانگردی مواد کامپوزیت بود. سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی بررسی شدند. نشان داده شد که کرنش اولیه سیم‌های SMA تاثیر کمی بروی رفتار دینامیکی شفت می‌گذارد بعداً همان مولف [۱۸] فرکانس اصلی یک شفت کامپوزیت غیرخطی را با استفاده از تئوری تیر جدار نازک مورد مطالعه قرار داد. غیرخطی بخاطر اثر ون کارمن^۷ تمام کوپلینگ‌ها حذف شدند و معادلات به حالت ارتعاش خمشی-خمشی ساده شدند.

استفاده از حل دقیق تحلیلی موجب می‌شود بتوان پیش بینی خوبی از رفتار سیستم داشت که از این امر قطعاً می‌توان استفاده کرد تا کارایی شفت‌های ساخته شده از کامپوزیت را بهبود بخشید. همچنین موجب درک بهتر مفاهیم فیزیک و برهمکنش‌های بسیار پیچیده موجود در سیستم در ارتعاشات غیرخطی می‌شود. هر چند روش معمول در تحلیل ارتعاشات شفت در حالات غیرخطی بصورت عددی است ولی معمولاً وقتی که مسئله بصورت تحلیلی حل شود مدل را خطی در نظر می‌گیرند. بعضی از مطالعات هم بصورت تحلیلی

^۱ Finite element analysis

^۲ Montagnier

^۳ Hochard

^۴ Hysteric

^۵ Yongshen

^۶ Variational-asymptotic method

^۷ Von Karman

و غیر خطی بروی شفت‌های فلزی صورت گرفته است. به عنوان مثال حسینی و خادم [۱۹] با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه^۱ ارتعاشات آزاد شفت دوار با غیرخطی در انحنا و اینرسی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها به این نتیجه رسیدند که هر دو فرکانس خطی طبیعی پیش گشت^۲ و پس گشت^۳ تحریک می‌شوند. یک رابطه تحلیلی برای ارتعاشات عرضی در دو صفحه بدست آمد. بعداً همان مولفان [۲۰] تشدید ترکیبی در یک شفت چرخان را بررسی کردند. آنها از روش بالانس هارمونیک^۴ استفاده کردند تا سیستم را تحلیل کنند و نمودار پاسخ فرکانسی را بدست آورند. اثر اینرسی جرمی، خارج از مرکزیت و میرایی خارجی در کنار مکان هندسه نقاط شاخه‌ای شدن سدل مورد بررسی^۵ قرار گرفتند. خادم و همکارانش [۲۱] روش مقیاس‌های چندگانه را بکار گرفتند تا ارتعاشات اصلی یک شفت دوار غیر کشایی^۶ با دامنه بزرگ را بدست آورند. اثر اینرسی جرمی قطری، خارج از مرکزیت و میرایی خارجی به همراه نقاط شاخه‌ای شدن مورد بررسی قرار گرفتند. حسینی و زمانیان [۲۲] ارتعاشات آزاد یک شفت دوار با تکیه‌گاه ساده و غیر خطی کشیدگی^۷ را بررسی کردند. اینرسی چرخشی و اثر ژيروسکوپي لحاظ شدند ولی از تغییر شکل برشی صرف نظر شد. معادلات حرکت به کمک اصل همیلتون استخراج شدند. برای تحلیل ارتعاشات آزاد روش مقیاس‌های چندگانه به صورت مستقیم به فرم مختلط معادلات اعمال شد. یک حل تحلیلی که ارتعاشات غیرخطی در دو صفحه را نشان می‌دهد بدست آمد. باز هم نشان داده شد که هم فرکانس پیش گشت و هم فرکانس پس گشت تحریک شدند. نتایج با شبیه سازی عددی اعتبار سنجی شدند. شاهقلى و خادم [۲۳] تشدید اصلی و پارامتریک یک شفت دوار نامتقارن با اینرسی‌های جرمی و سختی خمشی نابرابر در راستای محورهای اصلی را مورد بررسی قرار دادند. روش‌های مقیاس‌های چندگانه اعمال شد. تاثیر نابرابری اینرسی جرمی و سختی خمشی و نابرابری بین دو خارج از مرکزیت که هر دوری آنها متناظر با محور اصلی شفت بودند نیز بررسی شد. پای^۸ و همکارانش [۲۴] رفتار دینامیکی تیر ریلی چرخان عمودی آویزان شده با شش شرط مرزی مختلف را به هر دو روش خطی و غیرخطی تحلیل کردند. آنها نشان دادند که یک ترم خطی مهم در خیلی از گزارشات ذکر نشده است که بخاطر استفاده متناقض از ترم‌های غیر خطی در استخراج

Multiple scales method^۱

forward^۲

backward^۳

Harmonic balance^۴

Saddle node bifurcation^۵

In-extensional^۶

Stretching^۷

Pai^۸

معادلات بود. اثر اینرسی چرخشی، سرعت چرخش، نیروهای گریز از مرکز و کریولیس، باریکی^۱ و جاذبه بروی سرعت‌های لرزش پیش گشت و پس گشت، شکل موده‌های لرزش و سرعت‌های بحرانی مطالعه شدند. آنها به این نتیجه رسیدند که تعداد نامحدودی سرعت بحرانی پیش گشت و پس گشت برای یک تیر ریلی چرخان وجود دارد. ژو^۲ و چونگ^۳ [۲۵] یک مدل غیرخطی جدید بر پایه تئوری کرنش غیرخطی ون-کارمن و اوایلر برنولی برای تیر چرخان ارائه کردند. کوپلینگ محوری-عرضی در نظر گرفته شده بود. حسینی و همکارانش [۲۶] ارتعاشات آزاد یک تیر چرخان غیر کشایی با شش شرط مرزی عمومی را بررسی کردند. غیرخطی‌ها ناشی از اینرسی و انحنا بود. اینرسی چرخشی و اثرات ژایروسکوپی لحاظ شد در حالی که تغییر شکل برشی حذف شد. روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شد تا یک رابطه تحلیلی برای ارتعاشات عرضی در دو صفحه بدست بیاید.

تمام مدل‌هایی که تا به اینجا اشاره شد، اگرچه دقت قابل قبولی در ارتعاشات با دامنه کوچک دارند ولی هیچکدام از آنها ارتعاشات با دامنه بزرگ را مورد بررسی قرار نداده‌اند بجز شفت های فلزی. بیشتر محققان برای بررسی غیرخطی شفت‌های کامپوزیت از روش عددی استفاده کردند. در این رساله یک دسته جدید از معادلات غیرخطی برای یک شفت چرخان کامپوزیت بر پایه تئوری تیر اوایلر-برنولی بدست آمده است. برخلاف [۱۸] این تحقیق هم در مورد شفت‌های جدار نازک کاربرد دارد و هم جدار ضخیم و تمامی کوپلینگ‌ها لحاظ شده است. از نقاط قوت این تحقیق این است که معادلات ارتعاشات محوری-خمشی-خمشی-پیچشی یک شفت چرخان با غیرخطی‌های هندسی را توصیف می‌کنند و کوپلینگ خطی ناشی از ناهمسانگردی مواد هم لحاظ شده است. بدون هیچ فرض ساده سازی (فرض کوتاه شدگی^۴ یا کشیدگی)، این معادلات برای بررسی رفتار دینامیک غیرخطی با استفاده از تئوری اغتشاشات^۵ استفاده شدند. باید به این نکته توجه داشت که در مطالعات قبلی [۱۸-۲۳] بخاطر وجود این فرضیات، معادلات به حالت ارتعاش خمشی-خمشی کاهش می‌یافتند ولی در این تحقیق بعلت وجود کوپلینگ معادلات کامل استفاده می‌شوند. معادلات شامل اثرات ژایروسکوپی به همراه اثرات کوپلینگ محوری-خمشی-پیچشی است. تغییر شکل برشی بعلت باریک بودن شفت در نظر گرفته نشده است. معادلات با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند. برای مطالعه ارتعاشات اجباری یک شفت کامپوزیتی چرخان فرض شده است که یک نیروی نابالانسی ناشی از نقص در هندسه شفت وجود دارد و تکیه گاه شفت در دو طرف ساده است. معادلات به وسیله روش

^۱ Slenderness

^۲ Zhu

^۳ Chung

^۴ Shortening

^۵ Perturbation theory

گلرکین^۱ گسسته شدند و سپس روش مقیاس‌های چندگانه برای تحلیل ارتعاشات اصلی استفاده شده است. اگرچه سرعت چرخش در حوالی مود اول تنظیم شده است ولی گسسته سازی با استفاده از یک مود به علت وجود غیر خطی‌های مرتبه دو کافی نیست. گسسته سازی با استفاده از هر دو حالت یک و دو مود صورت گرفته است و نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شده‌اند که نشان دهنده اختلاف بین دامنه‌ها در همسایگی ارتعاش اصلی بود. این نتیجه مهمی است که نشان می‌دهد همیشه گسسته سازی با استفاده از یک مود دقیق نخواهد بود. یک مقایسه بین تغییرات دامنه برای این دو حالت انجام گرفته است. هیچ فرضی برای لایه چینی در نظر گرفته نشده است و این بدین معنی است که لایه چینی می‌تواند متقارن و یا نامتقارن باشد. اثر میرایی خارجی، خارج از مرکزیت و زاویه الیاف بروی دامنه ارتعاشات بررسی شده است. در پایان اثر حذف کوپلینگ محوری-پیچشی هم مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاکی از آن است که در لایه چینی نامتقارن حذف این کوپلینگ موجب انحراف در پاسخ می‌شود. هر یک از نتایج با نتایج حاصل از شبیه سازی عددی مقایسه شده است تا پاسخ اعتبار سنجی شود.

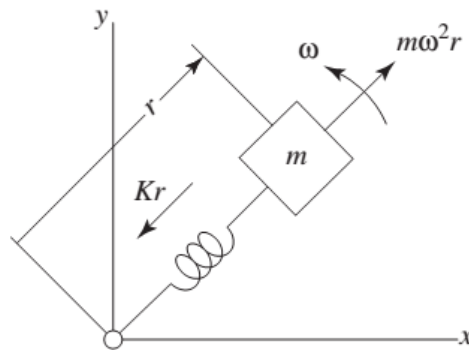
^۱ Galerkin method

فصل ۲

مقدمه‌ای بر دینامیک شفت‌ها

۱-۲- دینامیک شفت‌ها

در سال ۱۸۶۹ اولین مباحث منتشر شده به زبان انگلیسی در زمینه روتوردینامیک توسط رنکین^۱ صورت گرفت، مهندسی که نام او به دلیل کارهایش در زمینه سیکل ترمودینامیکی توربین‌های بخار، شهرت یافت. مدل تحلیلی رنکین در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲- مدل تحلیلی رنکین و شکل جسم آزاد آن

جرم صلب m در شکل بیانگر مرکز جرم گردش روتور در سرعت ω است. فنر نشان داده شده بیانگر سختی شفت است. بر طبق اصل تعادل دینامیکی دالامبر، نیروی ذخیره شده فنر kr در برابر نیروی گریز از مرکز $m\omega^2 r$ قرار دارد. برای اینکه دو نیرو با هم برابر باشند باید $\omega^2 = k/m$. با استفاده از این مدل، رنکین به درستی پیش‌بینی کرد که سرعت بحرانی با واحد rad/sec باید $(k/m)^{1/2}$ باشد. وقتی که سیستم در وضعیت‌های مختلف تعادلی باشد آنگاه روتور می‌تواند در سرعت بحرانی با هر دامنه‌ای شروع به گردش کند. این مفهوم برای تحلیل مقادیر ویژه سیستم‌های خطی بدون میرایی که در آن فرکانس طبیعی همیشه مستقل از دامنه گردش است مناسب می‌باشد.

با این حال رنکین به غلط پیش‌بینی کرد که سرعت‌های بالاتر از سرعت بحرانی باعث ناپایداری سیستم می‌شوند. گانتز^۲ و دیگران نشان دادند که علت این اشتباه به دلیل در نظر نگرفتن نیروی کوریولیس در مدل بود. اشتباه پایه‌ای‌تر رنکین این بود که نیروی گریز از مرکز را به عنوان نیروی واقعی در نظر گرفت. دلیل رنکین این بود که این نیرو با مربع سرعت افزایش می‌یابد در حالی که نیروی ذخیره شده در شفت kr

^۱ Rankine

^۲ Gunter

این گونه نیست. در نتیجه دامنه r باید در سرعت فوق بحرانی بدون کران شود. اما نیروهای واقعی اعمال شده به یک جسم همیشه از این منابع هستند:

۱- تماس با جسم دیگر

۲- فشار سیال بر روی سطح جسم

۳- میدان‌هایی مثل میدان جاذبه یا الکترومغناطیس.

هیچ کدام از این نیروهای واقعی وابسته به حرکت جسم نیستند. نیروی گریز از مرکز نمی تواند کاملاً جزو یکی از این سه دسته باشد. تفسیر صحیح از مدل رنکین در سرعت بحرانی این است که نیروی فنر kr بر روی جرم m عمل می کند تا شتاب مرکز گرای $\omega^2 r$ را تولید کند و نیروی دیگری نیست که اعمال شود. حتی امروزه، دانشجویان روتوردینامیک اغلب دچار سردرگمی می شوند وقتی که نیروی گریز از مرکز یا کوریولیس را به عنوان نیروی واقعی در تحلیل هایشان وارد می کنند.

نتیجه اشتباه رنکین در خصوص غیرممکن بودن کارایی در سرعت های فوق بحرانی، بدون شک بر گروهی از مهندسان تاثیر گذاشت و باعث شد طراحی آنها براساس ماکزیمم سختی خمشی باشد. اما دیگران به طور تجربی کشف کردند که کار در سرعت های فوق بحرانی نه تنها ممکن است بلکه در بعضی موارد می تواند سودمندتر باشد.

در سال ۱۸۹۴ دانکرلی^۱ مقاله ای منتشر کرد که در آن نشان می داد که سرعت های بحرانی شفت چرخان یکنواخت بر روی تکیه گاه های ساده همان فرکانس های طبیعی ارتعاشات عرضی آن می باشد. این نتیجه مهم است، چرا که این دو حرکت کاملاً متفاوت می باشند. دانکرلی پیشنهاد کرد که هر نابالانسی شفت چرخان می تواند باعث تحریک فرکانس های طبیعی سیستم شود که باعث دامنه گردان بزرگ همگام^۲ می گردد. همچنین او یک فرمول ساده برای محاسبه سرعت های بحرانی شفت با چرخ ها یا دیسک های گوناگون که در موقعیت های مختلف روی شفت قرار دارند ارائه کرد. در فرمول او از گشتاورهای ژایروسکوپی صرف نظر شده است، اما همچنان در بعضی از کتاب های طراحی ماشین تا سال ۱۹۶۰ مورد استفاده قرار می گرفت. فرمول دانکرلی برای دو چرخ بدین صورت ارائه شد:

$$\frac{1}{\omega_{cr}^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \quad (1-0)$$

^۱ Dunkerley

^۲ Synchronous

که در آن ω_1 و ω_2 سرعت‌های بحرانی شفت با چرخ‌های ۱ و ۲ به تنهایی هستند و ω_{cr} سرعت بحرانی شفت با تمام چرخ‌های نصب شده است.

در اینجا جالب است که سهم لرد ریلی^۱ در تئوری ارتعاشات مطرح شود، هر چند کار او به صورت ویژه بر روی دینامیک روتورها متمرکز نبود. اولین چاپ کتاب ریلی تحت عنوان تئوری صدا روشی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات بدون میرایی بوسیله محاسبه بیشینه انرژی جنبشی به بیشینه انرژی کرنشی در مدت زمان سیکل ارتعاشی به دست داد، که در آن مجموع انرژی در تمام زمان‌ها، پایستار در نظر گرفته شد.

حرکت هارمونیک $r \sin(\omega t)$ جرم در شکل قبل در خط مستقیم را در نظر بگیرید که در آن ω فرکانس طبیعی است. باید توجه داشت که انرژی جنبشی در زمانی که فنر کرنشی ندارد، بیشینه است و زمانی که انرژی کرنشی فنر بیشینه شود، انرژی جنبشی صفر خواهد بود. جابجایی بیشینه r است و بیشینه سرعت برابر است با $r\omega$. بنابراین معادله $\frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2$ برقرار است که در آن $\omega = \sqrt{k/m}$ اما در مسئله رنکین که در آن حرکت سیستم یک مدار دوار بود، هیچ انتقال انرژی بین کرنش و جنبش صورت نمی‌گرفت.

در دهه ۱۸۸۰ تا ۱۸۸۹، دی لاوال^۲ توربین‌های بخاری ساخت که نیازمند عملکرد در سرعت‌های بالا بود تا سرعت پره‌ها با سرعت نازل بخار منطبق شود. مدل آزمایشگاهی با یک دیسک نابالانس در سرعت بحرانی اول راه‌اندازی شد و به صورت پیوسته و آهسته به سرعت‌های بالاتر برده شد. دی لاوال و فاپل^۳ مدل‌های تحلیلی این مسئله را توسعه دادند. این مدل‌ها دارای یک دیسک نابالانس بر روی یک شفت نرم با تکیه‌گاه‌های ساده بودند، اما میرایی نداشتند بنابراین آنها پیش‌بینی یک تغییر فاز ناگهانی در گذر از سرعت بحرانی را کردند و همچنین نتیجه گرفتند که دامنه گردش در سرعت بحرانی بدون کران است. تئوری کامل گذار از سرعت بحرانی با دامنه گردش کراندار بدون توضیح باقی ماند تا اینکه دو دهه بعد با کار جفکات^۴ که میرایی را نیز داخل مدل کرد این مسئله حل شد.

کتاب کلاسیک در زمینه توربین‌های بخار در سال ۱۹۰۵ توسط اشتودولا^۵ منتشر شد که توصیفی از توربین‌های موفق زمان او ارائه می‌کرد و فصولی داشت که به بررسی روتوردینامیک و مباحثی که دی لاوال و دانکرلی و خودش مطرح کرده بودند، می‌پرداخت. او ظاهراً اولین کسی بود که به درستی تئوری تعادلی دو صفحه برای روتورهای صلب، روش دترمینان و روش تکرار ماتریسی برای محاسبه سرعت‌های بحرانی

^۱ Lord Rayleigh

^۲ De Laval

^۳ Fopple

^۴ Jeffcott

^۵ Stodola

شفته‌ها با چند چرخ و همچنین امکان تداخل دینامیکی بین روتور و تکیه‌گاه را ارائه کرد. اشتودولا نیز پایداری عملکرد در سرعت‌های بحرانی را مورد تحلیل قرار داد اما مهمترین نتایج را از دست داد چرا که او اثر اصطکاک داخلی در چیدمان روتور را در نظر نگرفت.

در سال ۱۹۱۹ بسیاری از توربوماشین‌ها با موفقیت در سرعت‌های فوق بحرانی به کار افتاده بودند، اما شکست‌های مبتنی بر ارتعاشات تا آن اندازه که باعث پیشرفت و توسعه مباحث روتوردینامیک شود اتفاق می‌افتاد. جفکات در همان سال ۱۹۱۹ مقاله‌ای منتشر کرد که برای اولین بار پاسخ روتوردینامیک به نابالانسی با در نظر گرفتن میرایی به زبان ریاضی توصیف شد. مدل ساده او شامل یک شفت بدون جرم می‌شد که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار داشت و یک دیسک نابالانس در وسط شفت متصل بود که جلوی سرعت انتقالی آن توسط میرایی ویسکوز گرفته می‌شد. با اصلاح مدل جفکات به روش‌های مختلف به منظور تحلیل پارامترهای گوناگون، صداها پژوهشگر از همان مدل استفاده می‌کنند و امروزه هم این مدل به عنوان ساده‌ترین توصیف پدیده روتوردینامیک مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جفکات مطالعه خودش را به اثر نابالانسی روی گردش روتور دارای میرایی محدود کرد. او اثر جاذبه را در نظر نگرفت و نشان داد که گردش دایروی، معادلات حرکت را ارضاء می‌کند. تحلیل‌ها نشان داد که نابالانسی، بردار گردش را با اضافه کردن زاویه فاز و همچنین افزودن سرعت، هدایت می‌کند. این تحلیل‌ها نشان داد که دامنه سرعت بحرانی به یک مقدار معینی محدود است که می‌تواند با اضافه کردن میرایی کمتر شود. برای طراحان، آنالیز جفکات نشان داد که دامنه گردش همگام می‌تواند کاهش یابد اگر:

۱- روتور بالانس شود؛

۲- میرایی اضافه گردد (اگر نزدیک به سرعت بحرانی است)؛

۳- روتور در سرعت‌های دورتری نسبت به سرعت بحرانی کار کند.

این شرایط تا امروز برای کنترل پاسخ نابالانسی مورد قبول قرار گرفته است.

آنالیز جفکات همراه با آزمایش‌ها و آنالیزهای دی‌لاوال، مهندسين را تشویق کرد که به طراحی ماشین‌های دوار با شفته‌های نرم برای سرعت‌های فوق بحرانی بپردازند. جفکات می‌گوید: طراحی شفگی را در نظر بگیرید که باید در سرعت خواسته شده عمل کند. فرمول پیشین نشان می‌دهد که از نقطه نظر ارتعاشی، بهتر است شفت را با سرعت بحرانی زیر سرعت کار آن طراحی کنیم تا اینکه بخواهیم سرعت بحرانی بالای سرعت کار داشته باشیم.

اما بعد از تجربیات گوناگونی که سبب گردش‌های شدید همگام روتور و شکست آن می‌شد، مسئله ناپایداری روتوردینامیک در سرعت‌های فوق بحرانی مطرح گردید که این مسئله ارتباطی با نابالانسی شفت نداشت.

در اوایل سال ۱۹۲۰ تعدادی از کمپرسورهای الکتریکی کوره‌های ذوب آهن^۱ دچار گردش‌های همگام شدید شدند. فرکانس گردش چنان پایین بود که آن را با چشم می‌توانستند ردیابی کنند. این مشکل تحت عنوان حرکت شلاقی شفت^۲ نام گرفت. در آزمایشگاه‌های GE در نیویورک، نیوکرک^۳ آزمایش‌هایی برای شناسایی علت این پدیده ترتیب داد. او در سری اول آزمایشاتش به این نتیجه رسید که حرکت شلاقی شفت:

۱- تحت تاثیر بالانس کردن روتور نیست؛

۲- فقط در سرعت‌های بالاتر از سرعت بحرانی اول رخ می‌دهد،

۳- فرکانس آن تقریباً با فرکانس سرعت بحرانی مساوی است.

تحقیقات بعدی نشان داد که این پدیده، پدیده‌ای خود تحریک^۴ است، یعنی مرتبط با ویژگی‌های داخلی روتور-یاتاقان سیستم می‌باشد.

در کنار نیوکرک، کیمبال^۵ نیز روی این مسئله کار می‌کرد. کیمبال اعلام کرد که اصطکاک داخلی یا میرایی در روتور، می‌تواند باعث ایجاد گشتاورهای داخلی در سرعت‌های بحرانی شود که موجب گردش روتور می‌گردد. حتی امروزه پذیرش این مسئله برای دانشجویان سخت است! چگونه میرایی می‌تواند باعث ناپایداری ارتعاشات شود در حالی که همواره این مسئله پذیرفته شده است که میرایی باعث از بین رفتن ارتعاشات می‌شود. اما کیمبال با آزمایشات گوناگونی، این موضوع را اثبات کرد.

در سال ۱۹۳۳، اسمیت^۶ مقاله‌ای منتشر ساخت که در آن مدل صحیحی از روتور-یاتاقان ارائه شده و شامل شفت انعطاف‌پذیر و تکیه‌گاه‌های منعطف بود، و در آن اصطکاک داخلی به صورت نیروهای کوپل^۷ مدل‌سازی شده بود. یعنی تغییر افقی باعث ایجاد نیروهای عمودی می‌شود و برعکس. هر چند مقادیر صحیح بسیاری از پارامترها شناخته شده نبود، با این حال مقاله اسمیت شامل جواب‌های ریاضی برای تمام مسائل روتوردینامیک که دارای اصطکاک داخلی هستند می‌شد که او آن را میرایی چرخشی^۸ نامید. از میان نتایج سودمند فراوانی که او گرفت می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

^۱General Electric (GE) blast furnace compressors

^۲Shaft whipping

^۳Newkirk

^۴Self-excited

^۵Kimball

^۶D. M. Smith

^۷Cross-Coupled

^۸Rotary Damping

۱. سیستمی که دارای میرایی چرخشی هست اما میرایی ایستا ندارد، در تمام سرعت‌های بالاتر از سرعت بحرانی، ناپایدار است. اما سیستمی که هر دو نوع میرایی را دارد در تمام سرعت‌های بالاتر از سرعت انتقال مشخصی^۱ که بالاتر از سرعت بحرانی است، ناپایدار می‌گردد.

۲. اگر قسمت‌های گردان غیرمتقارن باشند، سرعت‌های بحرانی به صورت جفت اتفاق می‌افتند که محدوده‌ای از سرعت ناپایداری را در بر می‌گیرد و ناپایداری می‌تواند بوسیله میرایی شفت در سرعت‌هایی بالاتر از کمترین محدوده سرعت‌های ناپایداری اتفاق بیفتد.

۳. میرایی در یاتاقان‌ها همیشه باعث پایداری می‌شوند اما اگر قرار است ماشین در سرعتی بالاتر از سرعت بحرانی کار کند، از میرایی در قسمت‌های گردان سیستم باید کاسته شود.

۴. تاثیر انعطاف‌پذیری یاتاقان‌ها در تولید پایداری در سرعت‌های بالاتر از سرعت بحرانی در روتور با میرایی چرخشی به صورت تجربی توسط نیوکرک کشف شد، اما به نظر می‌رسد که او این مسئله را درنیافت که انعطاف‌پذیری غیرمتقارن یاتاقان‌ها لازمه ایجاد پایداری سیستم است حتی اگر میرایی در یاتاقان‌ها موجود نباشد.

ارتعاشات پیچشی نوع دیگری از معضلات روتوردینامیک است که باعث خرابی و شکست می‌شود. این مشکلات بیشتر در ترن‌ها با قسمت‌های مختلفی که به هم جفت شده‌اند اتفاق می‌افتاد. واضح‌ترین روش برای تحلیل ریاضی اینست که مجموعه‌ای از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کوپل شده مرتبه دوم برای هر اینرسی دورانی روتور حل شود. اما این روش باعث ایجاد ماتریس‌های بزرگی می‌شود که عملاً بدون کامپیوتر قابل حل نیستند. در سال ۱۹۲۱، هولزر^۲ یک روش هوشمندانه برای حل فرکانس‌های طبیعی ارتعاش پیچشی بدون در نظر گرفتن ماتریس‌های بزرگ، ارائه کرد.

تلاش‌های اولیه برای ساخت توربین، بخصوص توربین بخار، در پایان قرن نوزدهم موجب پدید آمدن سرعت‌هایی شد که بیشتر از سرعت‌های معمول آن دوره در شاخه‌های دیگر مهندسی مکانیک بود. در این سرعت‌ها، معمولاً مسائل ویژه‌ای از دینامیک به وجود می‌آیند که برای یک طراحی موفق باید مورد بررسی و تحلیل قرار گیرند. دی‌لاوال باید به طور صحیح رفتار دینامیکی یک روتور را در سرعت‌های بیشتر از سرعت بحرانی؛ یعنی وضعیت فوق بحرانی، درک می‌کرد تا بتواند جدا کننده خامه مشهور و در ادامه توربین بخارش را طراحی کند. از ابتدا در یک طراحی موفق برای روتورهای توربینی باید دینامیک روتور را به خوبی درک کرد [۲۷].

^۱ Certain Transition Speed

^۲ Holzer

یک توضیح تئوری از کار در وضعیت فوق بحرانی ابتدا توسط فاپل (۱۸۹۵) [۲۸]، بلوزو^۱ (۱۹۰۵) [۲۹]، اشتودولا (۱۹۰۵) [۳۰]؛ (کارهایی هم پیش از این‌ها در آلمان به چاپ رسید)، و جفکات در مقاله مشهورش در سال ۱۹۱۹ ارائه شد [۳۱]. اگرچه روتورهای توربین اولیه خیلی ساده بودند و می‌شد آنها را با مدل‌های ساده تحلیل کرد، مدل‌هایی که امروزه به طور گسترده‌ای به نام روتور جفکات می‌شناسند. تجهیزات پیشرفته‌تر مدل‌های دقیق‌تری برای تحلیل نیاز داشتند. در واقع اگرچه یک مدل ساده مثل مدلی که در بالا به آن اشاره شد یعنی مدل جفکات می‌تواند بسیاری مختصه‌های یک روتور را بیان کند ولی مهمترین خصوصیات همچون سلف سنترینگ^۲ در وضعیت فوق بحرانی^۳، تاثیرات گوناگون میرایی قطعات ثابت در یک ماشین و یا حتی وابستگی فرکانس طبیعی به سرعت چرخش را نمی‌تواند بیان کند. علاوه بر اینها، مدل ساده جفکات این اجازه را نمی‌دهد تا یک تحلیل عددی و دقیق از رفتار دینامیکی سیستم‌های پیچیده ارائه داد. مثل توربین گاز یا بخار، کمپرسورها، پمپ‌ها و انواع دیگر ماشین‌ها.

برای مقابله با پیچیده‌تر شدن روز افزون سیستم‌های دوار، برنامه‌های گرافیکی کامپیوتری به وجود آمدند. این برنامه‌ها را در کتاب‌ها و مقالات می‌توان از ربع اول قرن یافت، مثل نمونه‌ای که در کتاب بلوزو و اشتودولا موجود بود که بدون شک ابزاری اولیه برای تحلیل دینامیکی روتور توربین‌ها به حساب می‌آمد. تعداد زیادی از مقالات که در مورد ارتعاشات عرضی روتورها و شفت‌های چرخان به همراه ارتعاشات پیچشی در ماشین‌های رفت و برگشتی، چاپ شدند عموماً در سال‌های بعد از جنگ جهانی اول بودند. این رشد برای سال‌ها که دلیل عمده آن، افزایش ابعاد ماشین‌آلات تولید قدرت بود، در زمینه موتورها از انواع مختلف و با قدرت مشخص و سرعت کارکرد تجهیزات این ماشین‌ها ادامه پیدا کرد.

وجود محاسبه‌گرهای الکترونیکی این اجازه را داد تا محاسبات جدولی توسعه پیدا کند که بیشتر بر پایه ماتریس‌های انتقال^۴ بودند که در نهایت جایگزین محاسبات گرافیکی شدند. به خصوص، روش هولزر برای ارتعاشات پیچشی شفت‌ها و روش میکلستات-پرول^۵ برای محاسبه سرعت بحرانی روتور توربین‌ها هم در گذشته و هم در حال حاضر به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. با ورود کامپیوترها این روش‌ها به سرعت اتوماتیک شدند.

در سال‌های بعد از جنگ جهانی دوم، توسعه سریع توربین‌های گازی و موتورها توربوجت سرعت بیشتری به مطالعات دینامیک روتورها بخشید. علاوه بر مقالاتی که در نشریات و کتاب‌ها در رابطه با این موضوع به

^۱ Belluzzo

^۲ Self-centering

^۳ Super critical

^۴ Transfer Matrix

^۵ Myklestad-Prohl

چاپ رسید، دینامیک روتورها در کنفرانس‌های تخصصی سالانه مورد بررسی قرار می‌گرفت. این امر موجب افزایش بسیار زیاد در تعداد مقالات تخصصی و تقسیم‌بندی این زمینه به شاخه‌های فوق تخصصی شدند.

نفوذ گسترده روش المان محدود (FEM)^۱ به طور عمیقی شاخه دینامیک روتورها را هم تحت تاثیر قرار داد. به طور تخصصی‌تر کدهای چندمنظوره FEM را نمی‌توان برای تحلیل دینامیک روتورها به کار برد چون در این کدها اثرات ژایروسکوپی در نظر گرفته نمی‌شود. در عمل می‌توان ماتریس ژایروسکوپی را وارد معادلات کرد و این حقیقت که برخی از تولیدکنندگان از کدهای تجاری FEM موجود برای تحلیل دینامیک روتور استفاده می‌کنند وجود دارد، ولی دینامیک روتور جزو آن دسته از شاخه‌ها است که کدهای نوشته شده برای هر حالت بهترین نتیجه را می‌دهد. با مدلسازی FEM امکان مطالعه دینامیک تجهیزات دارای روتورهای پر سرعت با جزئیات بیشتر را به وجود می‌آورد و پیش‌بینی‌های دقیق‌تری را هم به همراه دارد.

وقتی پیشرفت تکنولوژی به سمت چگالی بیشتر انرژی، وزن کمتر و ماشین‌های سریع‌تر، موجب دشوارتر شدن مسائل مربوط به دینامیک ماشین آلات دوار می‌شود، پیش‌بینی عددی صحیح بسیار مورد اهمیت قرار می‌گیرد.

رسیدن به سرعت‌های بالا، می‌تواند یک هدف باشد، مثل دستگاه‌های تولیدی یا ماشین آلات تولیدی دیگر که چرخش سریع‌تر به معنی افزایش تولید است. در تجهیزات مرتبط با تولید قدرت، یک ماشین سریع‌تر قدرت بیشتری از یک گشتاور مشخص تولید کند. از آنجایی که گشتاور یک فاکتور بحرانی در تعیین ابعاد قطعات ماشین (سطح مقطع شفت، ابعاد اتصالات در تجهیزات الکتریکی و غیره) می‌باشد. افزایش سرعت این امکان را می‌دهد تا تجهیزات را سبک‌تر بسازیم. استفاده از موادی که قابلیت تحمل تنش‌های بالاتری دارند این امکان را می‌دهد که جرم و ابعاد دستگاه را کاهش داد ولی مثل مواد قوی‌تر (مثل فولاد مقاوم بالا یا آلیاژهای سبک) سخت نیستند پس این ماشین آلات سبک‌تر، کاربردی‌تر و مستعد ارتعاش بیشتری هستند. تغییر دیگر به سمت افزایش دما است، هم برای افزایش بازده ترمودینامیکی و هم برای چگالی انرژی بیشتر، مواد کمتر و در نتیجه ظرفیت گرمایی کمتر، یعنی گرما در یک محیط کوچک‌تری تولید شود. دمای بالاتر موجب تنش‌های حرارتی بیشتر، میرایی کمتر و معمولاً سختی کمتر می‌شود که مسائل ارتعاشی و مقاومتی پیچیده‌تری را در پی دارد.

تحلیل دینامیکی روتور فقط به مرحله طراحی محدود نمی‌شود، بلکه می‌تواند ابزاری را در اختیار قرار دهد که طی آزمایش و کارکرد واقعی ماشین حیاتی است و برای بررسی دقیق شرایط کاری و جلوگیری از تعمیرات مورد نیاز است.

^۱ Finite Element Method

مطالعه مشخصه‌های مکانیکی، به طور مثال طیف ارتعاش، از یک ماشین این امکان را می‌دهد تا مشکلات کارکرد را قبل از اینکه به مرحله خطرناکی برسند، با توجه به اینکه خرابی یک قسمت می‌تواند به بقیه اجزا هم آسیب برساند، شناسایی شود. هر گونه انحراف مشخص از الگوی معمولی‌اش یک نشانه است از یک مشکل که در حال توسعه بوده، که در بیشتر موارد به راحتی توصیف می‌شود و این امکان را می‌دهد تا اندازه‌گیری‌های مورد نیاز را انجام داد.

به طور کلی ماشین‌آلات و به طور خاص آنهایی که دارای المان دوار سریع می‌باشند، به طور روزافزونی با حس‌گرهای گوناگون مجهز می‌شوند تا رفتار دینامیکی آنها مورد بررسی قرار گیرد. از مبدل‌ها، محرک‌ها و سیستم‌های کنترلی، حتی برای کنترل کردن ماشین به صورت فعال نیز بهره برده می‌شود. همانطور که گفته شد، این ماشین‌آلات به صورت افزون در حال توسعه می‌باشند. در کنار پیشرفت‌هایی که در چند سال اخیر صورت گرفته، یا شاید به عنوان نتیجه این پیشرفت‌ها، زمینه دینامیک روتور زمینه فعالی در تحقیقات است، هم از کاربرد مفاهیمی از دهه‌های قبل که به طور کامل اثبات شده‌اند تا زمینه‌ها و کاربردهای جدید و هم برای رسیدن به درک بهتری از رفتار سیستم‌های دوار. روتورهای غیرخطی، روتور با سرعت متغیر و رفتار ماشین‌آلات دوار کنترل شده به صورت فعال، تنها مثال‌هایی هستند از زمینه‌هایی که می‌توان تحقیقات زیادی انجام داد.

۲-۲- دینامیک روتور خطی

معادله‌ای که حرکت یک سیستم صلب ساده با جرم m و ممان اینرسی‌های اصلی J_ξ ، J_η و J_ζ نسبت به یک دستگاه مرجع $\xi\eta\zeta$ که به جسم در فضای سه بعدی متصل است را توصیف می‌کند در واقع مختلط است. مخصوصاً وقتی که با درجات آزادی چرخشی کار شود و اجازه ندهد مستقیماً با یک مدل خطی کار شود.

اگرچه تعدادی از ساده‌سازی‌ها موجب می‌شود که، یک مدل خطی بدست آید که مشخصه‌های پایه‌ای از رفتار دینامیکی سیستم‌های دوار را دارا باشد، اما این امکان را می‌دهد که بدرستی آن را توصیف کند، هم به صورت کمی هم به صورت کیفی.

روتور در حالت تغییر شکل نیافته‌اش، دارای یک محور چرخش مشخص است که با یکی از محورهای اصلی اینرسی مطابقت دارد. این موقعیت دقیقاً زمانی پیش می‌آید که روتور به طور کامل بالانس باشد که می‌توان گفت تقریباً درست است؛ اگرچه، در بیشتر حالات، نابالانسی انحراف از این موقعیت ایده‌آل، کوچک بوده و می‌توان با آن مثل یک اغتشاش کوچک برخورد کرد. همچنین همه جابجایی‌ها و سرعت‌های خطی و زاویه‌ای

را می‌توان کوچک فرض کرد، به استثنا زاویه چرخش و سرعت زاویه‌ای حول محور چرخش که کوچک نیستند، اما می‌توان آنها را به عنوان عوامل موثر سیستم محرک به حساب آورد [۲۷].

۲-۲-۱- معادله حرکت

دو فرض نابالانسی و جابجایی کوچک موجب می‌شود خطی‌سازی معادلات طوری صورت گیرد که معمولاً در سازه‌های دینامیکی انجام می‌شود [۳۲]، [۳۳]، [۳۴]. به هر حال حتی در مدل گسسته شده از یک روتور خطی که به طور محوری حول محور چرخش متقارن است و با سرعت ثابت Ω می‌چرخد، معادله خطی حرکت (معادله تعادل دینامیکی) به شکل زیر است:

$$M\ddot{q}(t) + (C + G)\dot{q}(t) + (K + H)q(t) = f(t) \quad (2-0)$$

بطوریکه $q(t)$ یک بردار است شامل مختصات اصلی و نسبت به یک دستگاه اینرسی، M ماتریس متقارن جرم است، C ماتریس متقارن میرایی، G ماتریس پادمتقارن ژایروسکوپی، K ماتریس متقارن سختی، H ماتریس پادمتقارن چرخشی و $f(t)$ یک بردار وابسته به زمان که در آن تابع همه نیروها قرار گرفته است.

۲-۲-۲- سیستم‌های دوار

وقتی با سیستم‌های دوار کار می‌شود، یکی از توابع نیروها معمولاً نیرویی است که توسط نابالانسی باقیمانده ایجاد می‌شود که اگرچه کوچک بوده نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد. نیروهای نابالانسی توابع هارمونیک از زمان هستند، با دامنه‌ای متناسب با Ω^2 و فرکانسی برابر با Ω .

ماتریس ژایروسکوپی شامل اینرسی و نتیجتاً ترم‌های کانسرواتو است، که در دینامیک روتور با ممان ژایروسکوپی که روی قطعات دوار ماشین عمل می‌کند ارتباط دارد. اگر معادله نسبت به یک دستگاه غیراینرسی نوشته شود، پارامترهایی که مرتبط با شتاب کریولیس هستند هم در ماتریس ژایروسکوپی ظاهر می‌شوند. وقتی که از یک مدل خطی برای یاتاقان‌های سیالی یا آب‌بندها با در نظر گرفتن میرایی فیلم سیال اطراف روتور استفاده شود، ماتریس چرخشی شامل ترم‌های غیرکانسرواتو مرتبط با میرایی داخلی المان‌های چرخشی خواهد بود. به خوبی مشخص است که وجود ماتریس چرخشی می‌تواند موجب ناپایداری شود و روتورها هم از این قاعده مستثنی نیستند [۲۷].

معادله (۲-۰) مربوط به یک سیستم غیرطبیعی و چرخان است و در نتیجه با همه معادلات موجود در سازه‌های دینامیکی که در آنها همه ماتریس‌ها متقارن هستند متفاوت هستند. این نکته باید ذکر شود که در دینامیک روتور، ماتریس ژایروسکوپی و چرخشی H, G متناسب با سرعت بوده و وقتی Ω به سمت صفر میل می‌کند، پارامترهای غیرمتقارن از بین رفته و معادله به معادله یک سازه ثابت تبدیل می‌شود. همچنین ماتریس‌های میرایی و سختی K, C ممکن است به سرعت چرخش وابسته باشند، معمولاً به توان دو آن و H می‌تواند تابع پیچیده‌تری از Ω باشد [۲۷].

حالت‌هایی را که با فرضیات گفته شده نمی‌توان بررسی کرد هم می‌توان به روش مشابه مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال روتور توربین گاز یک هواپیما را هنگام مانور در پرواز در نظر بگیرید. جهت محور چرخش روتور به طور پیوسته در زمان تغییر جهت می‌دهد و نمی‌توان فرض کوچک بودن را برای این زاویه در نظر گرفت. به هر حال برای مطالعه روتور می‌توان آن را نسبت به یک دستگاه مختصات مرجع متصل به هواپیما بررسی کرد، که در این حالت می‌توان حرکت دوم را مستقل از رفتار دینامیکی اول در نظر گرفت و نیروهای اینرسی مرتبط را در اضافه کرد. این روش جدا کردن مسئله به دو بخش دینامیکی و شبه استاتیکی زمانی ممکن است که زمان مشخصه پدیده‌های مختلف تحت مطالعه خیلی متفاوت باشند. در مثالی که بیان شد به طور واضح این حالت وجود دارد که فرکانس حرکت روتور تو بین نسبت به هواپیما چندین هرتز (دوره یا کسری از ثانیه) است و چرخش دستگاه هوایی، زمان مشخصه‌ای با مرتبه چندین ثانیه دارد. در مقابل، نیروهای ارتعاشی روی روتور یک ماشین در ساختمان ممکن است از مرتبه فرکانس خود روتور باشد و مسئله را باید بدون جدا کردن حل کرد [۲۷].

معادله (۲-۰) با فرض تقارن محوری سیستم حول محور چرخش سیستم بدست آمده است. در واقع، وقتی روتور به طور محوری متقارن است، ولی روی یک استاتور کلی بدون هیچ خصوصیت تقارنی مشخص کار می‌کند باز هم معادله برقرار است.

حال اگر روتور به صورت محوری متقارن نباشد خیلی پیچیده می‌شود مگر اینکه بتوان فرض نامتقارن بودن را برای اجزای غیرچرخان اعمال کرد. در حالت اخیر، یک دستگاه چرخان یعنی دستگاهی که با سرعت زاویه‌ای روتور می‌چرخد را می‌توان استفاده کرد و یک معادله شبیه معادله (۲-۰) بدست می‌آید، اگرچه نسبت به دستگاه غیر اینرسی نوشته شده است.

اگر هم روتور و هم استاتور نسبت به محور چرخش غیرهمسانگرد باشد، معادله حرکتی که حرکت روتور را مدل می‌کند ضرایبی دارد که نسبت به زمان و با فرکانس 2Ω متناوب است. وقتی رسیدن به یک جواب تقریبی نسبت به حالتی که یا روتور یا استاتور به صورت محوری متقارن باشند، پیچیده باشد، هیچ جواب بسته‌ای برای این نوع معادلات وجود ندارد.

بیشتر روتورهای منعطف را شبیه تیر در نظر می‌گیرند. با فرضیات زیادی می‌توان رفتار ارتعاش عرضی تیر را جدای از رفتار محوری و پیچشی آن در نظر گرفت. همین جدا شدن معمولاً در دینامیک روتورها فرض می‌شود، با این تفاوت که دیگر هیچ جداسازی بین خمشی در صفحات اصلی رخ نمی‌دهد.

وقتی رفتار ارتعاش عرضی را بتوان از ارتعاش پیچشی و محوری جدا کرد، معادله (۲-۰) برای اولی برقرار است و معادلات پیچشی و محوری حرکت، معمولاً همان‌هایی هستند که متعلق به یک سیستم طبیعی و چرخان است [۲۷].

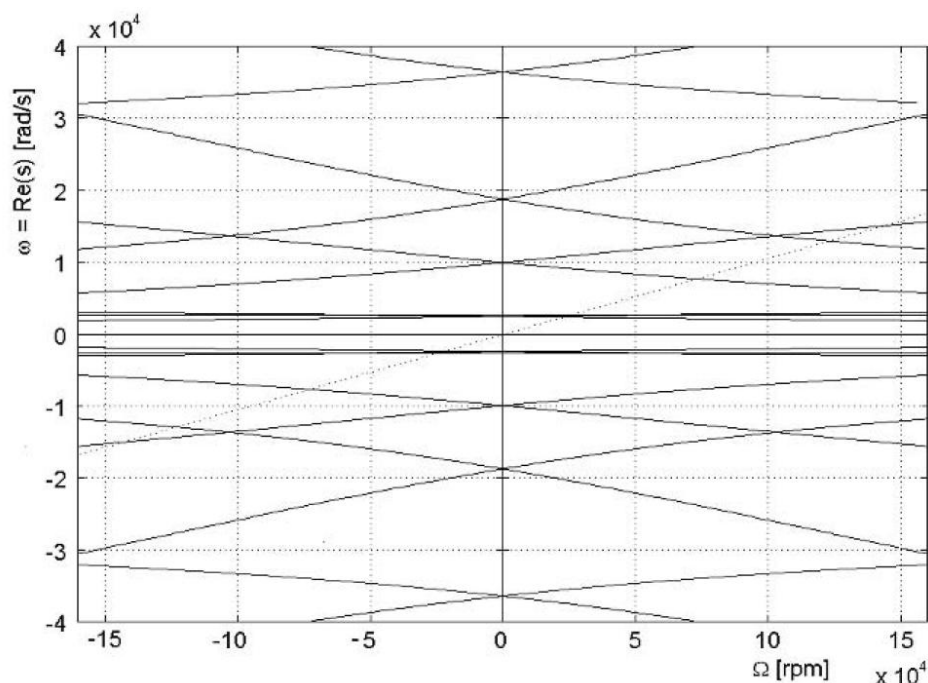
۲-۲-۳- ارتعاش آزاد

از آنجایی که سرعت چرخش مستقیماً در معادله حرکت ظاهر می‌شود، فرکانس‌های طبیعی ماشین شامل روتور می‌تواند به سرعت چرخش وابسته باشد. وقتی این اتفاق می‌افتد، رفتار آزاد سیستم را معمولاً با نمودار فرکانس طبیعی ω نسبت به Ω تشریح می‌کنند. در خیلی از حالات فرکانس نیروهای محرک هم به سرعت وابسته است و آنها را می‌توان در همان نمودار نشان داد. چیزی که بدست می‌آید به نام نمودار کمپل^۱ شناخته می‌شود (شکل ۲-۲). اگر میرایی وجود داشته باشد یک نمودار دوم، که در آن نرخ تلاشی به عنوان تابعی از سرعت چرخشی است را می‌توان به همراه نمودار کمپل همان‌طور که در شکل ۳-۲ مشاهده می‌شود رسم کرد. علاوه بر این، نمودار فرکانس طبیعی را می‌توان بر حسب نرخ تلاشی رسم کرد و نمودار مکان ریشه را بدست آورد (شکل ۴-۲).

نمودار کمپل شکل ۲-۲ در چهار ربع رسم شده است. به طور واضح نسبت به محور ω متقارن است، در حالی که علامت سرعت چرخش، یعنی جهت چرخش ماشین، تاثیری روی فرکانس طبیعی ندارد. این نمودار همچنین نسبت به محور Ω متقارن است: پاسخ S یا حقیقی است یا مختلط مزدوج، بنابراین اگر ω قسمت موهومی مقدار ویژه باشد، ω - هم قسمت موهومی مقدار ویژه دیگر است [۲۷].

محل تلاقی شاخه‌های مختلف نمودار کمپل با محور ω همان فرکانس‌های طبیعی سیستم در حالت ایستا است. اگر سیستم به صورت محوری متقارن باشد (یعنی مشخصه‌ها در صفحه xz با صفحه yz یکسان باشد)، فرکانس‌های طبیعی در حالت ایستا جفت هم و یک مقدار هستند. با افزایش سرعت، مقادیر دیگر دو تا نیستند: دو شاخه واگرا از یک نقطه روی محور ω در نمودار کمپل شروع می‌شوند [۲۷].

^۱ Campbell



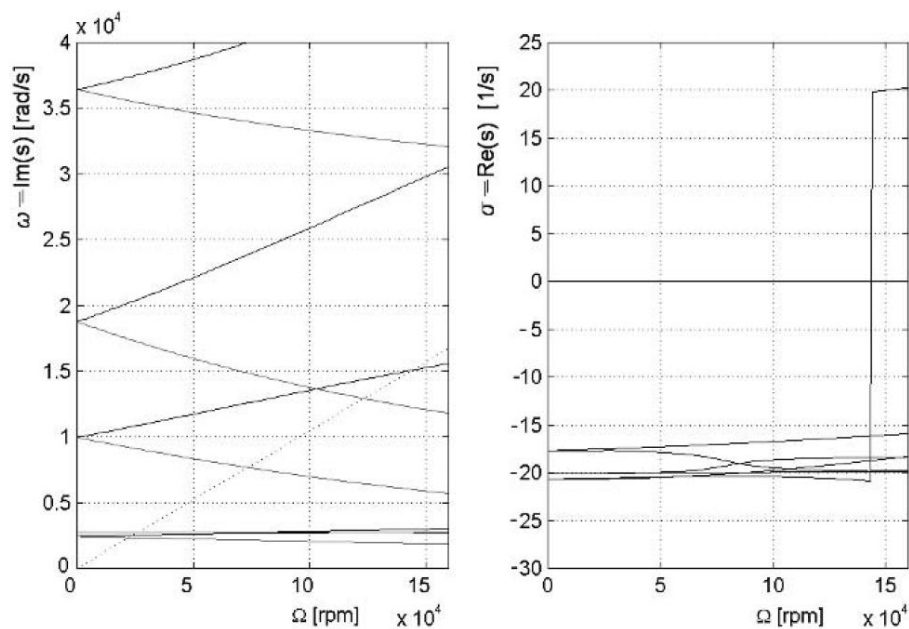
شکل ۲-۲- نمودار کمپل چهار ربعی از یک روتور انعطاف پذیر (روتور یک توربوجت کوچک)

نمودار کمپل را تنها در حالتی که سیستم خطی باشد می‌توان رسم کرد، چون تنها در این حالت است که مفهوم پایه‌ای فرکانس طبیعی برقرار است. به هر حال در سیستم‌های غیرخطی هم، نمودار کمپل مربوط به سیستم خطی شده ممکن است اطلاعات مهمی درباره رفتار سیستم ارائه دهد.

از آنجایی که نمودار کمپل نسبت به هر دو محور Ω و ω متقارن است، همه اطلاعاتی که ارائه می‌دهد در هر یک از چهار ربع موجود است و بهتر است تنها یکی از آنها را رسم کرد، معمولاً اولین ربع. این چنین نموداری به همراه نمودار قسمت حقیقی مقدار ویژه نسبت به سرعت با هم در شکل ۲-۳ موجود است.

یک جفت از شاخه‌ها را در نمودار کمپل در شکل ۲-۳ در نظر بگیرید که از یک نقطه در فرکانس طبیعی سیستم ایستا شروع می‌شوند (روتور به صورت محوری متقارن بوده و مقادیر موجود روی محور ω جفت هستند). این دو مقدار در واقع فرکانس‌های حرکت چرخشی لرزشی^۱ هستند، یکی (خط تیره‌تر در شکل ۲-۳) در جهت موافق با چرخش رخ می‌دهد (لرزش مستقیم یا رو به جلو) و دیگری (خط روشن‌تر) در جهت مخالف (لرزش معکوس یا رو به عقب) با آن [۲۷].

^۱ Whirl

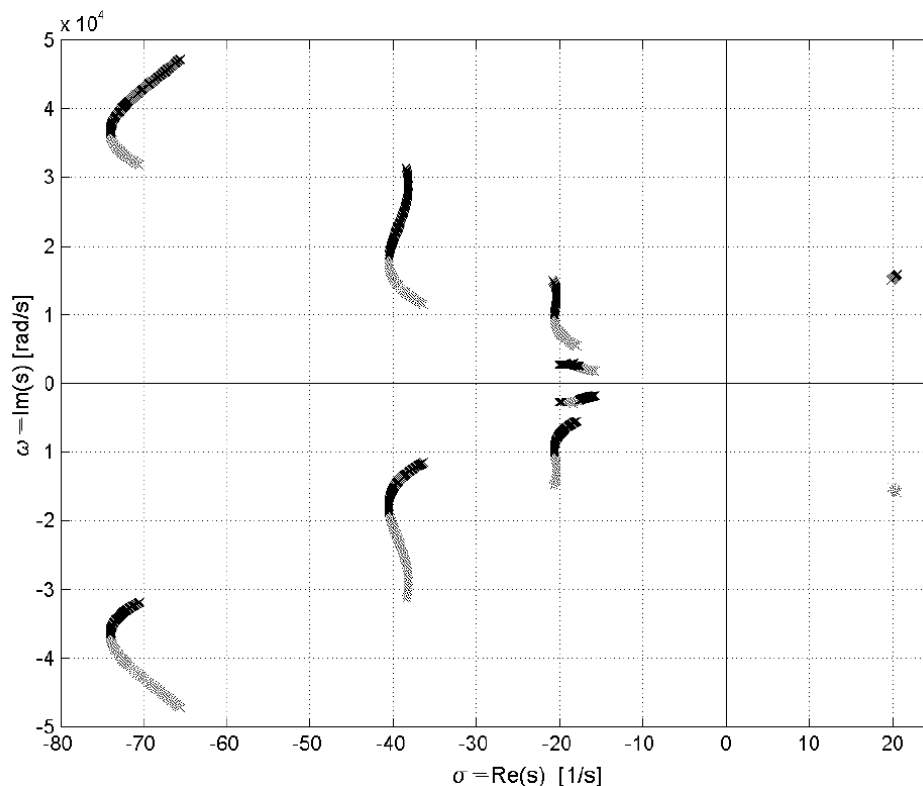


شکل ۳-۲- نمودار کمپل استاندارد (فقط ربع اول نشان داده شده است) و منحنی نرخ تلاشی یک روتور انعطاف پذیر

می‌توان نمودار کمپل را طوری رسم کرد که بین لرزش رو به جلو و رو به عقب تفاوت قائل شد. بدین صورت که برای اول از مقدار مثبت که به عنوان سرعت لرزش در حرکت آزاد تعبیر می‌شود، و برای حرکت دوم از مقدار منفی استفاده می‌شود.

نمودار کمپل شکل ۳-۲، طوری رسم شده که هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی سرعت چرخش را در نظر بگیرد. در شکل ۵-۲ نسبت‌ها را نشان می‌دهد.

در ارائه کامل نمودار کمپل در چهار ربع، خط‌های موجود در ربع اول مربوط به لرزش رو به جلو هستند وقتی که چرخش در جهت رو به جلو (خلاف عقربه‌های ساعت) باشد. ربع دوم برای لرزش معکوس است زمانی که چرخش در جهت عقربه‌های ساعت باشد. سومی برای لرزش مستقیم در جهت عقربه‌های ساعت و چهارمی مربوط به لرزش معکوس در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد. همان‌طور که گفته شد، جهت سرعت چرخش بی‌اهمیت است و دو ربع به طور کامل تمام اطلاعات مورد نیاز را می‌دهند. روش معمول برای نمایش، استفاده از ربع اول و چهارم است ولی گاهی اوقات از ربع اول و دوم هم استفاده می‌شود.



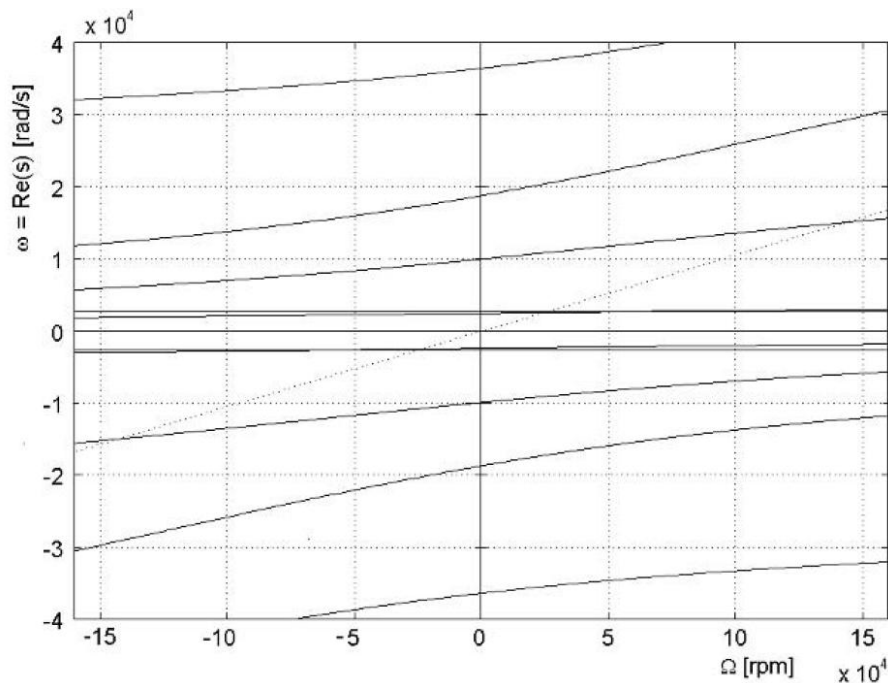
شکل ۴-۲- مکان ریشه یک روتور انعطاف پذیر به عنوان تابعی از سرعت چرخش

مطالبی که در مورد نمودار کمپل گفته شد در مورد نمودار مکان ریشه هم صادق است. در اینجا همچنین می‌توان برای شاخه‌های لرزش رو به جلو از مقادیر مثبت ω برای لرزش رو به عقب از مقادیر منفی ω استفاده کرد. یک نمودار از این نوع در شکل ۶-۲ نشان داده شده است، که نسبت به محور σ متقارن نیست.

وابستگی پاسخ دینامیکی به سرعت چرخش وقتی که از تابع‌های انتقال سازه‌های دوار استفاده می‌شود آشکار است. شکل ۷-۲ و ۸-۲ به ترتیب نشان‌دهنده تابع انتقال از نیرو به شتاب برای یک روتور در حالت ایستا و سرعت نامی چرخش است. به علت تقارن محوری در حالت ایستا، پاسخ سازه شامل دو مقدار برابر و جدا شده در راستاهای x ، y است: همه مقادیر ویژه سیستم کلی مختلط مزدوج با مرتبه^۱ دو هستند. در سرعت نامی، اثر ژایروسکوپی با پاسخ در راستای x ، y آمیخته می‌شود؛ مقادیر ویژه مختلط، مزدوج هستند ولی منطبق^۲ نیستند.

^۱ Multiplicity

^۲ Coincident

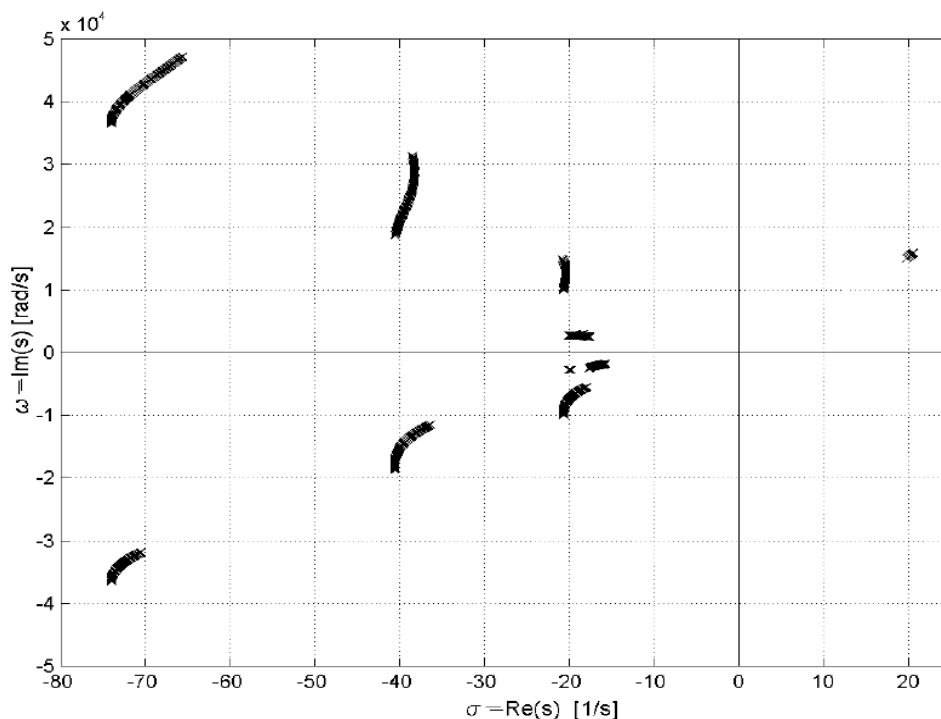


شکل ۲-۵- نمودار کمپل مربوط به همان روتور انعطاف پذیر منحنی‌های قبلی، ولی برای لرزش رو به جلو از مقادیر مثبت ω و لرزش معکوس از مقادیر منفی ω استفاده شده

هر بیشینه تشدید در شکل ۲-۷ به دو بیشینه در شکل ۲-۸ تبدیل می‌شود. این تقسیم شدن تشدیدها در سیستم‌های دوار که اثر ژایروسکوپی غیر قابل اغماض دارند یک امر معمول است.

۲-۳- سرعت بحرانی

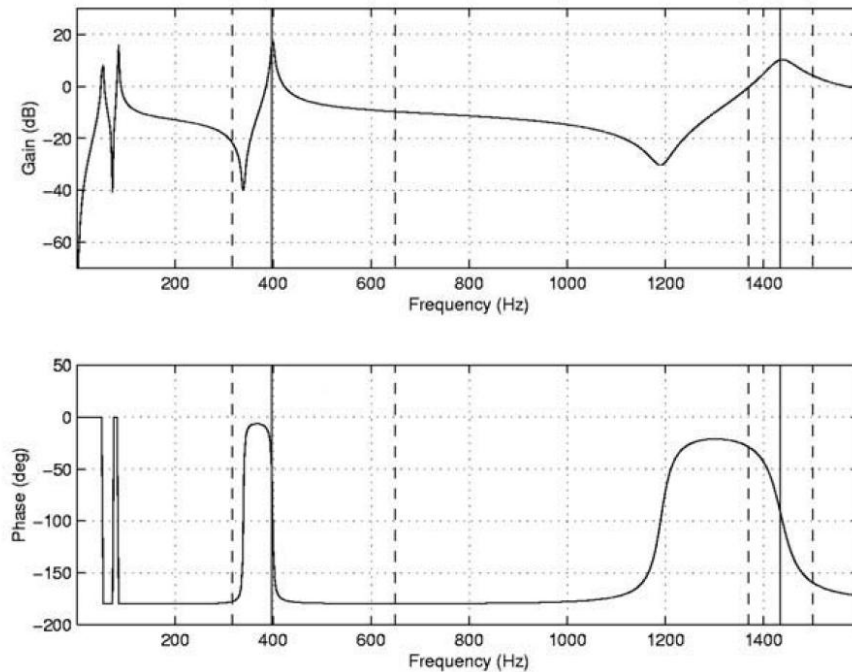
روتورها معمولاً تحت نیروهایی قرار می‌گیرند که در زمان تغییر می‌کنند و گاهی اوقات نمودار آنها بر حسب زمان هارمونیک است. این حالتی است که به طور مثال، نیروها ناشی از نابالانسی باشند. بطوریکه می‌توان آنها را به صورت یک بردار چرخان با سرعت زاویه‌ای روتور که مقدار آن در یک دستگاه اینرسی با زمان به طور نوسانی با فرکانس چرخشی، برابر با سرعت چرخش شفت Ω تغییر می‌کند. در حالت‌های دیگر نمودار بر حسب زمان کمتر قانونمند است، ولی اگر متناوب باشد، همیشه می‌توان به صورت جمع اجزای نوسانی نوشت.



شکل ۶-۲ مکان ریشه‌ها که در آن لرزش رو به جلو و معکوس با مثبت و منفی ω نشان داده شده است

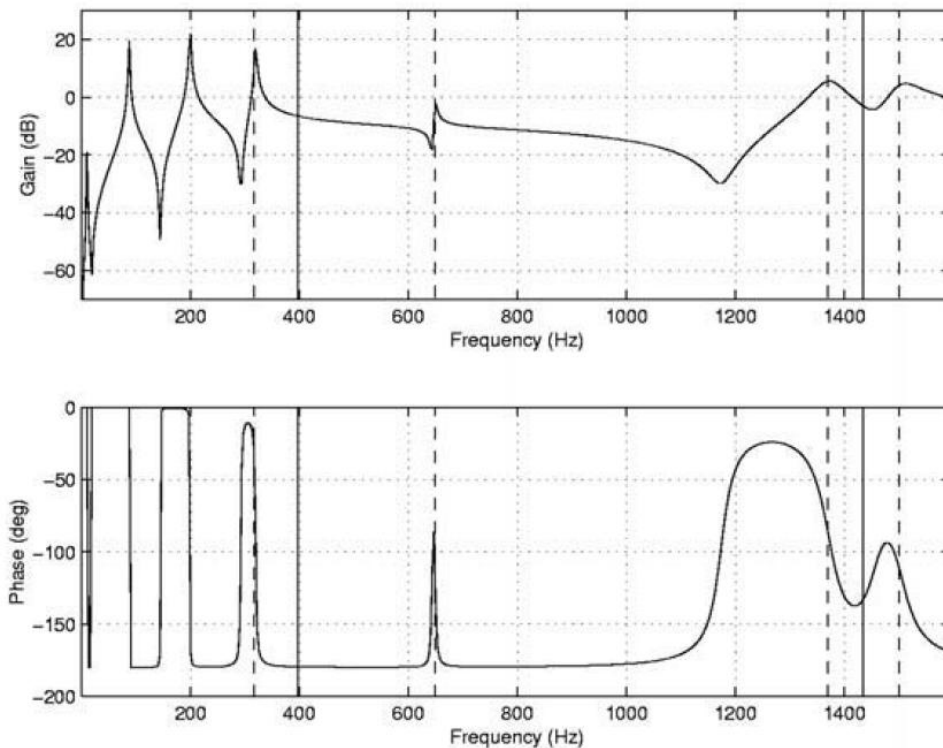
در این حالت‌ها فرکانس نیرو یا فرکانس جز نوسانی آن معمولاً با سرعت چرخش روتور رابطه دارد و می‌توان آن را روی نمودار کمپل رسم کرد. در حالتی که برای مثال تحریک توسط نابالانسی ایجاد شود، فرکانس نیروی تحریک را می‌توان در صفحه $\omega\Omega$ نمودار کمپل با خطوط مستقیم $\omega = \Omega$ ، یعنی توسط محور تقارن ربع اول نشان داد. در این حالت می‌گویند تحریک همگام است. رابطه‌ای که فرکانس نیرو را به سرعت چرخش ارتباط می‌دهد معمولاً یک رابطه تناسب ساده است و می‌توان آن را با یک خط مستقیم گذرنده از مبدا نشان داد.

سرعت چرخشی که در آن سرعت یکی از نیروها فرکانسی برابر فرکانس طبیعی سیستم دارد معمولاً به عنوان سرعت بحرانی شناخته می‌شود و می‌توان آن را با تلاقی منحنی‌های مربوط به فرکانس طبیعی و فرکانس نیروها از نمودار کمپل بدست آورد. حالتی که در آن فرکانس نیرویی متناسب با Ω است در شکل ۹-۲ نشان داده شده است.



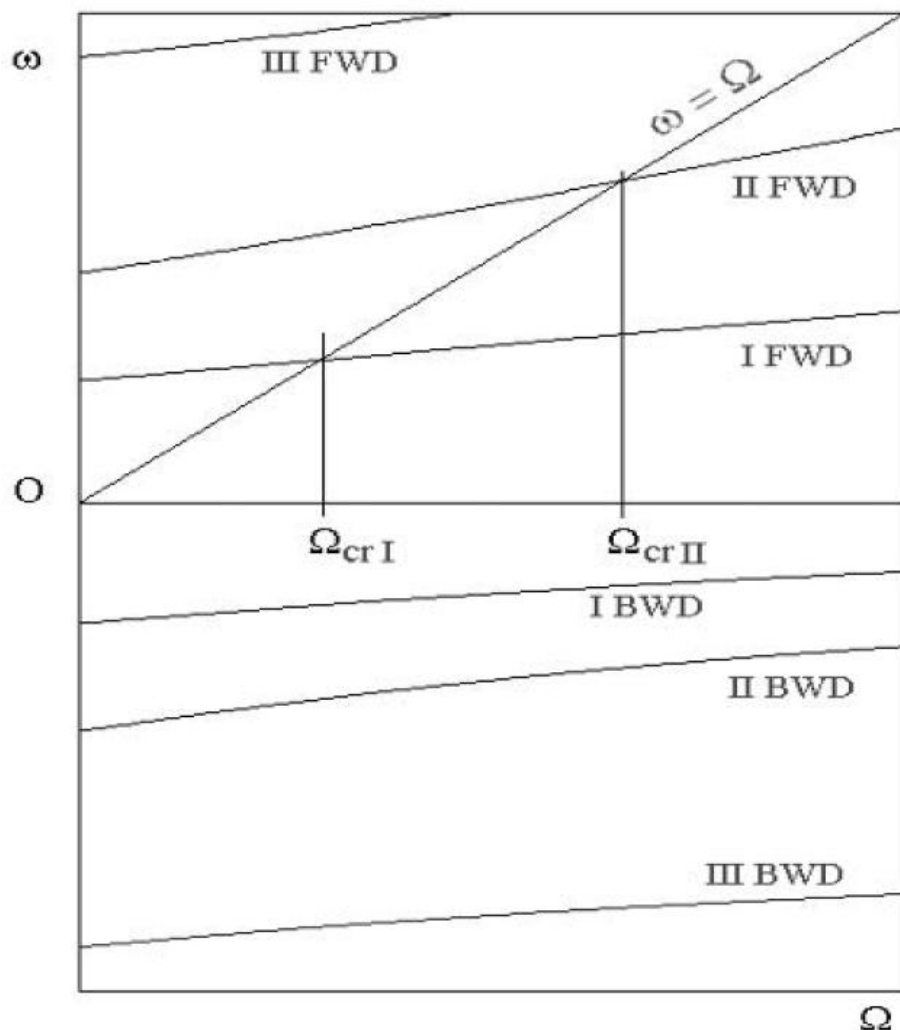
شکل ۷-۲- پاسخ فرکانسی روتور (روی باتاقان‌های فعال مغناطیسی) در حالت ایستا

همه تقاطع‌ها در نمودار کمپل به یک اندازه خطرناک نیستند. اگر فرکانس یک نیرو با فرکانس مودی که کاملاً از آن جدا است یکی شود (یا واضح‌تر، نیروی مودال متناظر با فرکانس نیرو و مود تشدید خیلی کوچک باشد) هیچ تشدید رخ نمی‌دهد. برای مثال اگر فرکانس گشتاور محرک (یعنی فرکانس ممان پیچشی روی روتور) با فرکانس طبیعی عرضی روتور یکسان شود و رفتار پیچشی و عرضی روتور به طور کامل مستقل از هم باشند، هیچ تشدید رخ نمی‌دهد. در حالت‌های دیگر، تشدید می‌تواند خیلی ضعیف باشد و میرایی سیستم برای اینکه هرگونه اثر قابل اندازه‌گیری را از بین ببرد کافی است. اگرچه حالت‌هایی وجود دارد که تشدیدهای شدیدی رخ می‌دهد و روتور نمی‌تواند در سرعت‌های بحرانی و یا نزدیک آن بدون ارتعاش شدید یا خرابی کامل کار کند. به طور خاص، تشدیدهای ناشی از تلاقی یکی از فرکانس‌های طبیعی ارتعاش عرضی با سرعت چرخش خطرناک است؛ این فرکانس‌ها را می‌توان بروی نمودار کمپل از تلاقی منحنی‌های مربوط به فرکانس طبیعی با خط مستقیم $\omega = \Omega$ پیدا کرد. معمولاً به آنها سرعت‌های بحرانی عرضی می‌گویند و سرعت‌های بحرانی دیگر مربوط به رفتار خمشی که معمولاً خطر کمتری دارند، معمولاً به عنوان سرعت بحرانی ثانویه شناخته می‌شوند.



شکل ۸-۲- پاسخ فرکانسی روتور (روی یاتاقان‌های فعال مغناطیسی) با سرعت ۳۳۰۰۰ دور در دقیقه

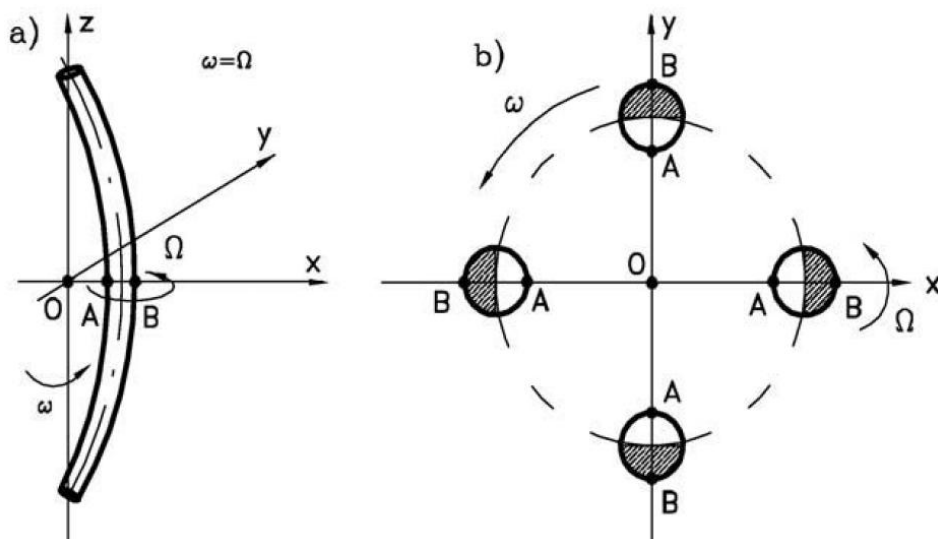
پاسخ یک تحریک همگام مثل نابالانسی، موجب لرزش همگام روتور می‌شود؛ اگر کل سیستم به صورت محوری متقارن باشد، یک لرزش همگام دایروی رخ می‌دهد. موقعیتی که در این حالت رخ می‌دهد در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده است: در (a) یک شفت که لرزش دارد در موقعیت تغییر شکل یافته‌اش نشان داده شده و در (b) موقعیتی که در صفحه xy ایجاد می‌شود رسم شده است. از آنجایی که سرعت چرخش با سرعت لرزش برابر است، ناحیه‌ای از سطح مقطع شفت که تحت تنش کششی است (ناحیه سایه خورده نزدیک نقطه B) همیشه تحت بار کششی باقی می‌ماند، در مقابل آن قسمتی که تحت فشار است همیشه تحت فشار باقی می‌ماند. این موقعیت شبیه موقعیت ماه است که همیشه یک طرف آن رو به زمین است. در این حالت مواد تشکیل‌دهنده روتور تحت تنش ثابت قرار می‌گیرند، که از یک طرف چون ماده دچار



شکل ۹-۲- تقاطع‌ها در نمودار کمپل برای یافتن سرعت بحرانی

خستگی نمی‌شود خوب است و از یک جهت چون میرایی درونی ماده نمی‌تواند موثر باشد و انرژی را مستهلک کند و دامنه را محدود کند خوب نیست، مخصوصاً وقتی که سیستم با سرعتی برابر سرعت بحرانی‌اش می‌چرخد.

سرعت بحرانی عرضی را می‌توان سرعتی که در آن نیروهای گریز از مرکز ناشی از خمش روتور در تعادل متفاوتی با نیروهای بازگرداننده الاستیک هستند تعریف کرد و از این نظر، این موقعیت بیشتر شبیه حالت ناپایداری الاستیک است تا پدیده معمول ارتعاشات. روتوری که در سرعت بحرانی کار می‌کند، تحت هیچ نوع



شکل ۱۰-۲- (a) طرح یک شفت تحت لرزش دایروی همگام (b) موقعیت در صفحه xy . مناطق هاشور خورده تحت تنش کششی هستند

ارتعاشی قرار نمی‌گیرد بلکه خودش منبع تحریک متناوب است که باعث ارتعاش معمولاً شدید در اجزای ثابت ماشین می‌شود.

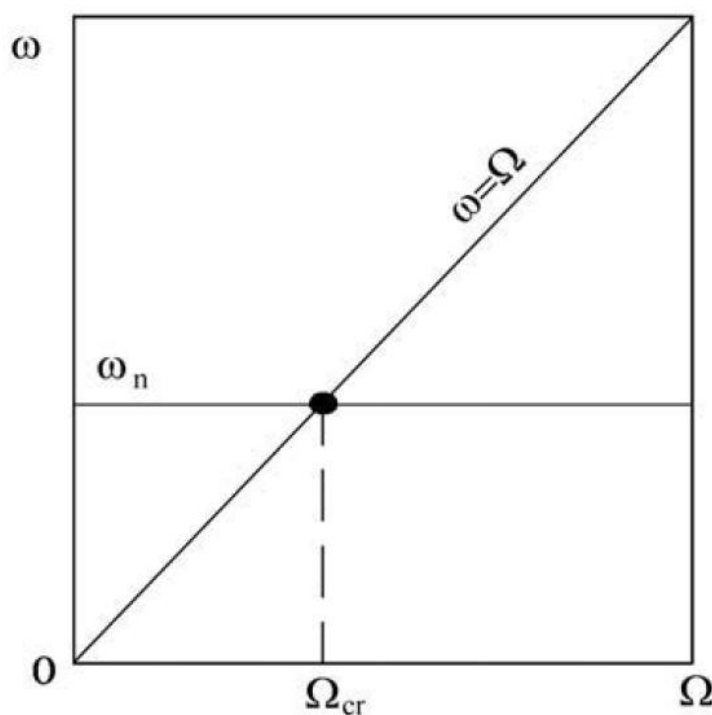
در این حالت، دامنه ارتعاشات به صورت خطی با زمان زیاد می‌شود و تنها میرایی استاتور و یاتاقان‌ها (چون میرایی روتور به طور کامل در این حالت بی‌تاثیر است) و غیرخطی بودن‌های غیرقابل اجتناب که با افزایش دامنه ظاهر می‌شوند، می‌توانند مانع از خرابی روتور شوند. در واقع می‌توان ماشین‌های دارای قطعات دوار را طوری طراحی کرد که برای مدت کوتاهی بتوانند در سرعت بحرانی کار کنند، ولی لازم است با هر نرخی، گستره نامی ماشین یا کمتر از سرعت بحرانی اول، یا بین دو سرعت بحرانی باشد تا از کار در شرایط بحرانی جلوگیری شود. یک مثال از ماشینی که در سرعتی بیشتر از سرعت بحرانی اول کار می‌کند ماشین‌های لباسشویی خانگی است: حین تغییر از حالت شستشو به حالت خشک کن، گذر از سرعت بحرانی اول با ارتعاش شدید آن حتی بدون تجهیزات خاصی قابل رویت است [۲۷].

گستره سرعت از صفر تا سرعت بحرانی اول، معمولاً گستره سرعت دون بحرانی^۱ نامیده می‌شود؛ بیشتر از سرعت بحرانی اول گستره فوق بحرانی شروع می‌شود. تعداد روز افزونی از ماشین‌ها در گستره فوق بحرانی

^۱ Sub critical

کار می‌کنند، بنابراین حین روشن شدن و خاموش شدن دستگاه یک گذر از سرعت فوق بحرانی را تجربه می‌کنند.

اگر نمودار کمپل مربوط به ارتعاشات عرضی از خطوط مستقیم و موازی محور Ω ساخته شود، یعنی فرکانس‌های طبیعی مستقل از سرعت باشند، همان‌طور که در شکل ۱۱-۲ مشاهده می‌شود. مقادیر عددی سرعت بحرانی مطابق با فرکانس‌های طبیعی در حالت ایستا است. بعضی از اشتباهات مربوط به سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی که هنوز هم وجود دارد را می‌توان به این امر نسبت داد. حتی اگر از نظر عددی یکسان باشند، این دو پدیده از نظر فیزیکی متفاوت هستند، مخصوصاً وقتی که تنش موجود در روتور مورد نظر باشد.



شکل ۱۱-۲- سرعت بحرانی روتوری که نمودار کمپل آن صاف است

علاوه بر سرعت‌های بحرانی عرضی، سرعت‌های بحرانی پیچشی هم می‌توانند بسیار خطرناک باشند، به خصوص در مورد ماشین‌های رفت و برگشتی. تجهیزات زیادی جهت کاهش دامنه ارتعاشات ناشی از سرعت‌های بحرانی ساخته شده است.

مفهوم پایه‌ای سرعت بحرانی با توجه به سیستم خطی تعریف شده است و تعریف سرعت بحرانی بدین صورت برای روتورهای غیرخطی غیرممکن است. اگرچه به طور کلی در تعریف سرعت بحرانی، از سرعتی که در آن ارتعاشات شدیدی رخ می‌دهد استفاده می‌شود. این تعریف که در حالت روتور غیرخطی هم صادق است، در خیلی از حالات برقرار است چون دامنه ارتعاشات به علت تولید آن بستگی دارد. در حالت روتور غیرخطی هم سرعتی که در آن حداکثر دامنه اتفاق می‌افتد، یعنی سرعت بحرانی طبق آخرین تعریف، به قدرت عوامل تحریک‌کننده بستگی دارد (برای مثال، میزان نابالانسی در حالت سرعت بحرانی عرضی). سرعت بحرانی سیستم‌های خطی، در مقابل مشخصه‌ای از سیستم هستند که مستقل از تحریک می‌باشند [۲۷].

۲-۴- زمینه‌های ناپایداری

روتورها ممکن است رفتار ناپایداری در گستره‌ی سرعت‌های تعریف شده از خودشان نشان دهند. سرعت‌هایی که در آن رفتار ناپایدار رخ می‌دهد را نباید با سرعت‌های بحرانی اشتباه گرفت، چرا که این دو پدیده کاملاً از یکدیگر متفاوت هستند. عبارت ناپایدار معانی گوناگونی می‌تواند داشته باشد، تعبیر گوناگونی از ناپایداری وجود دارد، یکی از معمول‌ترین این تعریف‌ها توسط لیاپانوف^۱ ارائه شده است.

براساس تعریف لیاپانوف، یک موقعیت تعادلی پایدار است، اگر بعد از جابجا شدن از موقعیت تعادلی در یک موقعیتی به اندازه کافی نزدیک به موقعیت تعادل قرار گیرد. البته این جابجایی نباید خیلی بزرگ باشد، اگر سیستم در زمان به صورت مجانبی به موقعیت تعادل برود می‌گویند سیستم در تعادل مجانبی است.

اگرچه تعریف تئوری لیاپانوف از پایداری در موقعیت‌های مهندسی دشوار است و تعریف تکنیکی از پایداری باید استفاده شود: رفتار ماشین پایدار است هرگاه دامنه ارتعاشات در کارکرد معمولی از یک مقدار قابل قبول فراتر نرود. برای ماشین آلات دوار، تعریف تکنیکی پایداری توسط آموزیسکا^۲ [۳۵] به شرح زیر بیان شده است.

یک ماشین دوار پایدار است اگر روتور آن حرکت چرخشی خالص حول یک محور مناسب در سرعت مورد نظر داشته باشد و همراه با این حرکت هیچ مود ارتعاشی دیگری در روتور، قطعات آن و اجزای سرعت ثابت دیگر ماشین وجود نداشته باشد. در صورت وجود چنین ارتعاشی، مقادیر دامنه آنها از یک مقدار قابل قبول و مجاز بیشتر نشود. ماشین دوار پایدار نسبت به نیروهای مخل خارجی مقاوم است، یعنی هر گونه اختلال اتفاقی نمی‌تواند رفتارشان را خیلی تغییر دهد. این چنین اختلالی فقط باعث یک فرآیند میرای گذرا می‌شود

^۱ liapunov

^۲ A. Muszynska

که عملکرد را به حالت قبلی بازمی‌گرداند یا سیستم را در یک حالت جدید قرار می‌دهد که در محدوده قابل قبول است [۲۷].

دامنه ارتعاشات آزاد سیستم خطی میراشده به علت استهلاک انرژی ناشی از میراگر به صورت نمایی در گذر زمان کاهش پیدا می‌کند. در زمینه روتورها، یک منبع انرژی گریز از مرکز وجود دارد که ممکن است در بعضی حالات موجب افزایش دامنه ارتعاشات در ارتعاش آزاد شود. گستره سرعتی که این افزایش دامنه اتفاق می‌افتد، یعنی ارتعاشات خود تحریک می‌تواند زیاد شود. معمولاً محدوده ناپایداری یا گستره ناپایداری می‌نامند و سرعتی که در آن این محدوده شروع می‌شود، آستانه ناپایداری نام دارد.

گستره‌های ناپایداری را نباید با سرعت بحرانی اشتباه گرفت: سرعت بحرانی یک نوع ارتعاش بین فرکانس طبیعی و نیروهای خارجی روی روتور است و در گستره ناپایداری، ارتعاشات خود تحریک خالص رخ می‌دهد. برای افزایش دامنه در ارتعاش باید یک منبع انرژی وجود داشته باشد و در این حالت، انرژی از طریق انرژی جنبشی مربوط به چرخش با سرعت Ω تامین می‌شود. به راحتی می‌توان به این نکته پی برد که انرژی جنبشی ذخیره شده در روتور از لحاظ مقداری از مرتبه بالاتری نسبت به انرژی پتانسیل ذخیره شده در روتور است.

به عنوان یک قانون کلی، اگر شرایط جدا شدن رفتار عرضی، طولی (محوری) و پیچشی فراهم شود، فقط اولی می‌تواند موجب ارتعاش خود تحریک شود. مکانیسم‌های متفاوتی وجود دارد که موجب شرایط ناپایدار می‌شود، از جمله میرایی داخلی روتور ناشی از میرایی ماده و اصطکاک بین اجزای گوناگونی که توسط پیچ، پرچ، جا زدن فشاری و غیره مونتاژ شده‌اند؛ تماس بین روتور و استاتور؛ نیروهای سیال در یاتاقان‌ها و آب‌بندها؛ و استهلاک انرژی ناشی از جریان‌های گردابه‌ای. تمام مکانیسم‌هایی گفته شده در ذات خطرناک هستند، ولی آنها الزاماً موجب ناپایداری نمی‌شوند. عوامل ناپایدارکننده‌ای که بهتر شناخته شده‌اند آنهایی هستند که توسط میرایی ماده تشکیل دهنده روتور و یاتاقان‌های روغن کاری شده به وجود می‌آیند. علت اخیر می‌تواند باعث پدیده شناخته شده ضربه روغن^۱ شود، که در ارتعاشات شدید و معمولاً در سرعتی دو برابر سرعت بحرانی عرضی شروع می‌شود اتفاق می‌افتد.

برای راحت‌تر شدن تشخیص بین سرعت و محدوده ناپایداری ویژگی‌های زیر بیان می‌شود:

سرعت‌های بحرانی

- در سرعت‌های چرخشی کاملاً مشخصی اتفاق می‌افتد.

^۱ Oil whipping

- در صورت نبودن میرایی دامنه به صورت خطی با زمان رشد می‌کند. می‌توان آن را در محدوده قابل قبول نگه داشت و در نتیجه از سرعت بحرانی می‌توان عبور کرد.
- مقدار سرعت ثابت است، ولی مقدار دامنه به دامنه اغتشاشات بستگی دارد. به عنوان مثال، سرعت بحرانی عرضی اصلی به میزان نابالانسی وابسته نیست، ولی دامنه با افزایش نابالانسی زیاد می‌شود.

محدوده ناپایداری

- محدوده آنها معمولاً زیاد است. اغلب تمام سرعت‌هایی که بیشتر از آستانه ناپایداری است موجب ناپایداری می‌شوند.
- آستانه ناپایداری اگر وجود داشته باشد معمولاً بالاتر از گستره فوق بحرانی قرار می‌گیرد.
- دامنه به صورت نمایی در گذر زمان زیاد می‌شود. دامنه به صورت غیرقابل کنترلی بزرگ می‌شود، پس کار کردن در محدوده بیشتر از آستانه ناپایداری غیرممکن است. وقتی وارد محدوده کاری می‌شود، سیستم باید طوری تعریف شود که به بالاتر از بیشترین سرعت کاری هم برسد. فقط غیرخطی‌های ممکن در سیستم می‌توانند مانع از رشد دامنه به صورت نامحدود شوند، که باعث ایجاد حلقه محدودیت^۱ می‌شود [۲۷].

۲-۵- پاسخ ارتعاشات اجباری

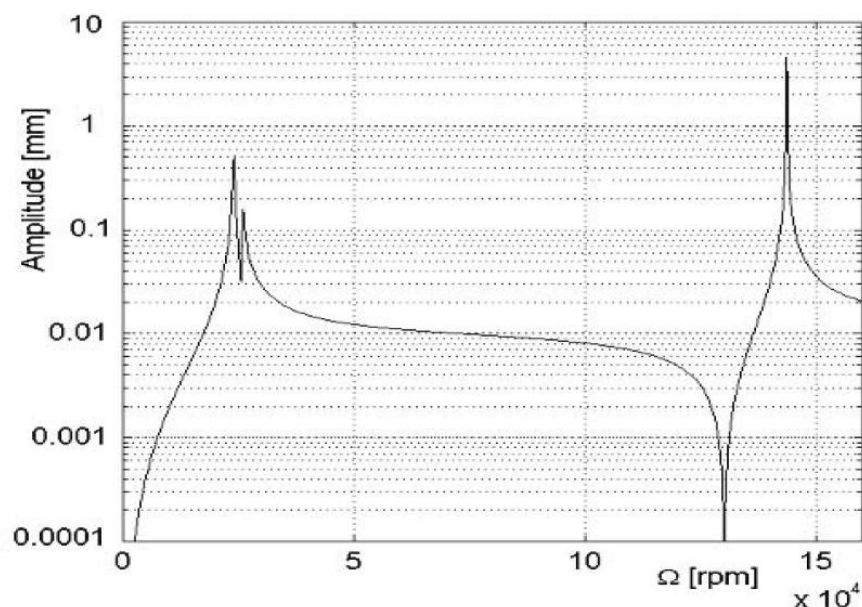
۲-۵-۱- پاسخ به نابالانسی

با جایگذاری تابع نیرو ناشی از نابالانسی در معادله حرکت (۲-۰)، می‌توان پاسخ سیستم را بر حسب بردار جابجایی $q(t)$ بدست آورد و تنش‌های موجود در روتور و ارتعاشی که به قطعات غیرچرخان ماشین وارد می‌شود را محاسبه کرد. اگر سیستم به طور محوری متقارن باشد، پاسخ نابالانسی لرزش دایروی خواهد بود که با سرعت چرخش روتور حرکت می‌کند. روتور در این حالت ارتعاش نمی‌کند، بلکه به طور تغییر شکل یافته فقط می‌چرخد؛ مواد تشکیل‌دهنده اجزای دوار ماشین دچار خستگی نمی‌شوند (حداقل به تعداد چرخه بالای تنش ناشی از فرکانس بالای ارتعاش) و میرایی آن هیچ تاثیری در رفتار آن ندارد. در حالتی که سیستم نامیرا باشد (در واقع به قدری است که میرایی غیرچرخان حذف شود) دامنه به واسطه سرعت بحرانی به

^۱ Limit cycle

بی‌نهایت می‌رود. ماشین‌های واقعی که همیشه میرا شده‌اند، بیشینه‌های کمتر و یا بیشتری در سرعت بحرانی نشان می‌دهند؛ برای کاهش دامنه آن طراح باید میرایی اجزای غیرچرخان را افزایش دهد.

در حالتی که روتور روی یاتاقان‌های ناهمسانگرد کار می‌کند، لرزش به صورت بیضوی درمی‌آید، و در بعضی حالات لرزش معکوس ممکن است اتفاق افتد. اگر هم روتور و هم استاتور غیر همسانگرد باشند، پاسخ پلی‌هارمونیک شده و حرکت پیچیده می‌شود.

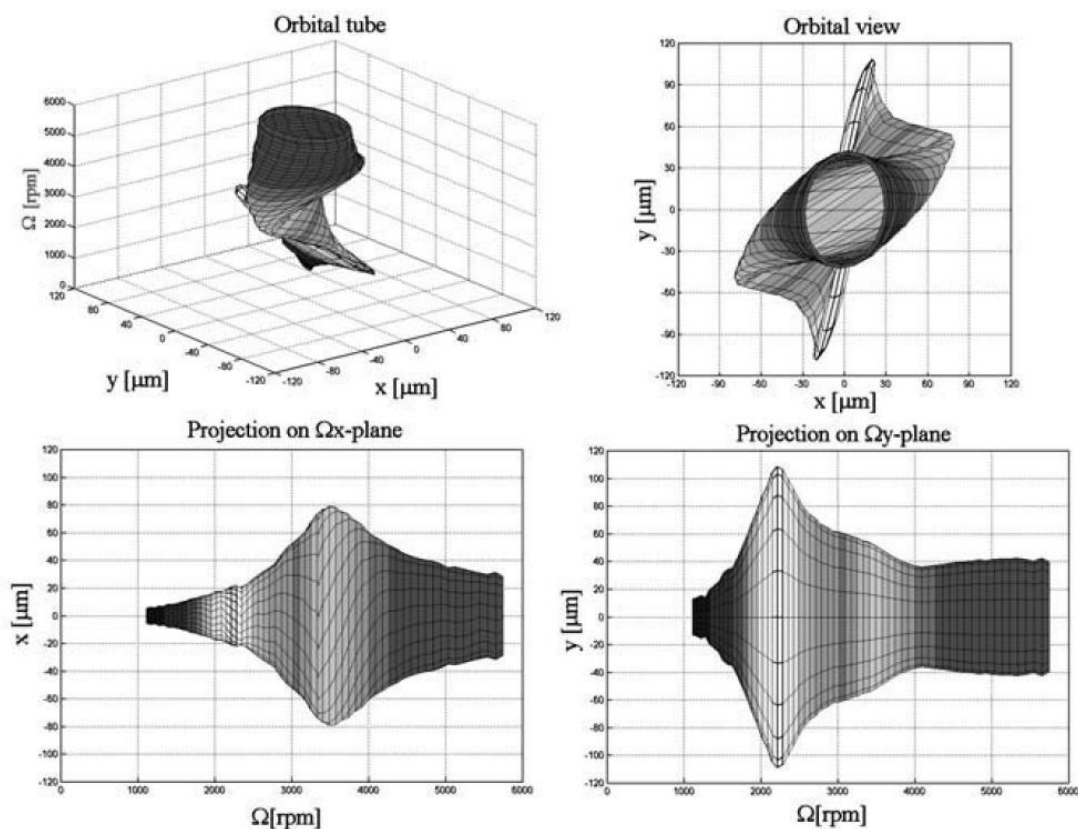


شکل ۱۲-۲- دامنه پاسخ نابالانسی یک روتور میرا شده‌ی متقارن محوری

پاسخ نابالانسی معمولاً گرافیکی و به صورت یک پلات از دامنه چرخش دایروی (یا در حالت لرزش بیضوی از چرخش بیضوی نیم محور) در یک نقطه مشخص به عنوان تابعی از سرعت چرخش نشان داده می‌شود (شکل ۱۲-۲).

ارائه گرافیکی کامل‌تر از پاسخ نابالانسی یک روتور، مخصوصاً در حالتی که یک روتور روی استاتور ناهمسانگرد کار می‌کند و لرزش بیضوی دارد، رسم پلات لوله چرخش است (شکل ۱۳-۲). چرخش‌ها به صورت سه بعدی رسم می‌شوند، که در راستای محور چرخش امتداد یافته است. لوله به صورت یک نقطه در سرعت صفر شروع می‌شود و سپس بزرگ می‌شود و سطح مقطع بیضوی پیدا می‌کند. در سرعت‌های خیلی زیاد، به علت سلف سنترینگ، به سمت استوانه دایروی به شعاع خارج از مرکزی میل می‌کند. تصویر

آن روی صفحه xy (زاویه دید چرخش) مستقیماً چرخش در سرعت‌های مختلف را به صورت برهم نهی شده نشان می‌دهد. تصویر روی صفحه $x\Omega, y\Omega$ دامنه بیشینه تا کمینه را به عنوان تابعی از سرعت چرخش ارائه می‌دهد [۲۷].



شکل ۱۳-۲- (a) نمای سه بعدی لوله (b) تصویر در صفحه xy ، (c)، (d) تصویر در صفحه $x\Omega$ و صفحه $y\Omega$

۲-۵-۲- حرکت پلی هارمونیک

نابالانسی تنها نیروی تاثیرگذار بر روی روتور نیست و فقط گاهی اوقات پاسخ هارمونیک می‌شود. جز همگام ارتعاشات در ماشین‌های دوار همیشه وجود دارد و در اغلب موارد بیشترین مقدار است، ولی معمولاً اجزای دیگری هم همراه آن است. در اصطلاحات دینامیک روتورها، جز همگام معمولاً به عنوان جز x_1 شناخته می‌شود، آنهایی را که فرکانسی برابر ضریبی از فرکانس چرخش دارند، اجزای x_2, x_3, x_4 و غیره نامیده می‌شوند.

تحلیل‌های تجربی از ارتعاشات ناشی از ماشین‌های دوار اطلاعات مفیدی از شرایط کاری می‌دهد و این امکان را می‌دهد تا مشکلات را قبل از وخیم‌تر شدن شناسایی و یا در بعضی موارد وقوع آنها را پیش‌بینی کنند. هدف نهایی تحلیل، تشخیص وضعیت ماشین است تا بتوان تعمیرات پیش‌گیرانه‌ای انجام داد. برای پایش رفتار دینامیکی ماشین، اغلب حس‌گرهایی در موقعیت‌های مشخصی نصب می‌شود تا شتاب، سرعت و یا جابجایی را اندازه‌گیری کنند. در بعضی از ماشین‌ها، این حس‌گرها را می‌توان به صورت دائمی نصب کرد و سیگنالی که به عنوان خروجی می‌دهند را به طور پیوسته، یا در بازه‌های زمانی معین و یا حتی زمانی که کارکرد ماشین غیرعادی باشد، پایش کرد. انواع مختلفی از حس‌گرها موجود است، ولی در حال حاضر تقریباً همیشه به سیستم گیرنده اطلاعات^۱ الکترونیکی متصل هستند که می‌توانند انواع گوناگونی از تحلیل‌ها را انجام دهند و اطلاعات مرتبط را به صورتی که برای کاربر مناسب باشد در اختیار وی قرار دهد. به خصوص با تحلیل هارمونیک خروجی حس‌گرها می‌توان نمودار شتاب یا جابجایی را بدست آورد. یک راه خیلی معمول نشان دادن این نمودارها، شکل آبشیب^۲ ذکر شده است: یک شکل آبشیب که در آن نمودارهای بدست آمده در سرعت‌های متفاوت در صفحه‌های دارای y ثابت در یک فضای سه بعدی xyz رسم می‌شوند (شکل ۱۴-۲). اغلب فرکانس با واحد هرتز و سرعت چرخش با واحد دور در دقیقه یا دور در ثانیه بیان می‌شود.

معمولاً عبارت شکل آبشیب و شکل آبشار برای دو نوع متفاوت از نمودار بکار برده می‌شود. در اولی، نمودار در سرعت‌های چرخش متفاوت رسم شده است؛ در دومی، نمودار در یک سرعت ثابت ولی در زمان‌های متفاوت بدست آمده است. شکل آبشار برای مطالعه رفتار ماشین در موقعیت‌های مختلف کاری استفاده نمی‌شود، بلکه برای بررسی تغییرات در رفتار دینامیکی در طی زمان بکار برده می‌شود.

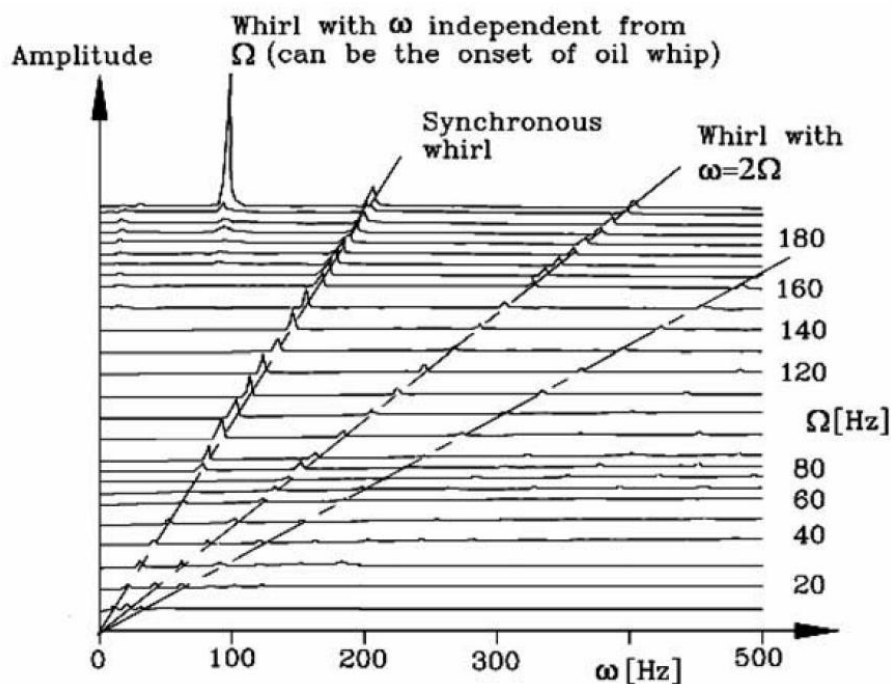
در شکل آبشیب می‌توان در هر سرعتی، فرکانس حرکت‌های گوناگون ماشین را شناسایی کرد. اگر حس‌گرها در صفحات شعاعی متفاوتی نصب شوند، با مقایسه فازهای مربوط به این سیگنال‌ها، می‌توان جهت اجزای لرزش‌های گوناگون را تعیین کرد. از اطلاعات فاز و فرکانس، می‌توان علل ایجاد ارتعاشات را مطالعه کرد و عمل مناسب برای اصلاح آن را انتخاب کرد.

معمولاً جزء همگام با نابالانسی مرتبط است و می‌توان آن را با بالانس کردن دقیق‌تر برطرف کرد. در حالی که جزئی که فرکانس آن دو برابر سرعت چرخش است عموماً با ناهمسانگردی روتور در ارتباط است و می‌توان آن را با مقارن‌تر ساختن روتور برطرف کرد. به عنوان یک قانون کلی، بالانس کردن روتور تاثیر خیلی کمی بر روی اجزای غیر همگام ارتعاش دارد.

^۱ Data acquisition

^۲ Cascade

هر ماشین یک نمودار ارتعاشی مشخصی را تولید می‌کند، که به عنوان اثر مکانیکی^۱ ماشین شناخته می‌شود. هرگونه تغییر در زمان این اثر، همان‌طور که در شکل آبشاری دیده می‌شود، یک نشانه از کارکرد غیر معمول ماشین است و باید خیلی دقیق آن را زیر نظر گرفت. می‌تواند مربوط به یک مشکلی باشد که اتفاق افتاده



شکل ۱۴-۲- شکل آبشیب یک روتور

یا در حال رخ دادن است. تشخیص مشکلات قبل از اینکه واقعا رخ دهند، جهت کاهش هزینه‌های ناشی از تعمیرات و در دسترس نبودن ماشین مهم است [۲۷].

۲-۶- دینامیک غیر خطی روتورها

خطی بودن تنها یک ایده‌آل سازی از هر سیستم واقعی است و روتورهای واقعی همیشه به مقداری بیشتر یا کمتر از مقدار خطی منحرف می‌شوند. تحلیل‌های دینامیک روتور کلاسیک یک تحلیل خطی معمولی است و خیلی از تعاریف بالا، مثل سرعت بحرانی یا آستانه ناپایداری، تنها در محدوده خطی برقرار است. اگرچه روتورها اغلب در شرایط نامی‌شان خطی هستند، اگر جابجایی در محدوده مجاز کاری باقی بماند،

^۱ Mechanical Signature

حداقل اجزای دیگری مثل یاتاقان‌ها، میراگرها و آببندها می‌توانند رفتار غیرخطی شدیدی از خود نشان دهند. روش دیگری که این المان‌ها صلب فرض شوند (به طور مثال یاتاقان‌ها) و حذف شوند (به طور مثال آببندها) یا رفتار آنها را خطی کنند، خیلی معمول است. ولی در خیلی از حالات نتایج حاصل از این طریق ممکن است تقریب درستی نباشد. علت واقعی غیرخطی بودن، وجود یک ترک در بعضی المان‌های سازه است که باعث تفاوت بین کشش موضعی و مشخصه فشاری می‌شود. اگر غیرخطی بودن‌ها حذف شوند، بسیاری از مفاهیم و ابزارهای دینامیک روتور، مثل نمودار کمپل و تحلیل سرعت بحرانی معنی خود را از دست می‌دهند. توجه باید به پاسخ نابالانسی و تحلیل نموداری اطلاعات ارتعاشات معطوف شود. ولی این فقط یک جنبه از مشکل است: وقتی که یک سیستم به شدت غیرخطی است، پدیده جدیدی می‌تواند ایجاد شود، مخصوصاً آنهایی که با وجود فوق هارمونیک‌ها و دون‌هارمونیک‌ها و ارتعاشات اتفاقی مرتبط هستند.

حرکت اتفاقی در شبیه سازی عددی بروی مدل‌های ساده ریاضی از روتور کشف شد و نتایجی که نشان‌دهنده امکان وجود پدیده بی‌نظمی بود، در نتایج آزمایشات بر روی موتور توربو جت دیده شد.

اگر سیستم نسبت به محور چرخش متقارن باشد، پاسخ نابالانسی به صورت لرزش دایروی خواهد بود. حتی اگر این پاسخ دیگر یکتا نباشد و پاسخ‌های دیگری هم موجود باشد، هر کدام با محدوده جذب منحصر بفرد خودش. اگر تقارن محوری وجود نداشته باشد، همان‌طور که ممکن است برای یک سیستم همسانگرد که در حالت غیرمتقارن کار می‌کند پیش بیاید. مثلاً، وقتی که یک بار جانبی بروی روتور اعمال می‌شود، لرزش دیگر دایروی نیست و هیچ پاسخ بسته‌ای یافت نمی‌شود. تنها راه مطالعه پاسخ نابالانسی انتگرال‌گیری عددی از معادله غیرخطی حرکت در زمان است.

با هر نرخ، اگر رسیدن به یک پاسخ بسته ممکن باشد یا نه، دیگر نمی‌توان بین رفتار ارتعاش آزاد یا اجباری تفاوتی قائل شد و نابالانسی هم فرکانس ارتعاش و هم پایداری سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

یک تعریف از سرعت بحرانی، که طبق این تعریف سرعتی است که در آن پاسخ نابالانسی روتور دارای بیشینه می‌باشد، تعریف شده است تا بتوان تحلیل‌های سرعت بحرانی را در مورد روتورهای غیرخطی توسعه داد، ولی این تعریف این نقص را دارد که سرعت بحرانی بدست آمده از این طریق به نابالانسی روتور بستگی دارد. همین مسائل در مورد تحلیل ناپایداری برقرار است: وقتی دامنه حرکت لرزش زیاد شود، پدیده غیرخطی از اهمیت بیشتری برخوردار می‌شود و یک حلقه محدودیت ممکن است ایجاد شود. یک روتور که مقدار کمی ناپایدار است، ممکن است به علت غیرخطی بودن به شرایط کاری پایدار برسد؛ اینکه آیا این شرایط قابل قبول باشد یا نه، به دامنه لرزش ناشی از آن و مشخصات طراحی یک ماشین خاص بستگی دارد [۲۷].

۷-۲- دینامیک روتور با سرعت متغیر

تحلیل‌های دینامیک روتور معمولاً در یک سرعت ثابت چرخش انجام می‌شوند. یک روتوری که با شتاب زیاد حرکت می‌کند، به هر حال ممکن است رفتاری متفاوت نسبت به روتوری که در یک سرعت ثابت کار می‌کند داشته باشد. در بقیه حالات ممکن است نابالانسی ناگهان تغییر کند، مثل شکستن و جدا شدن یک پره در روتور توربین.

حتی اگر بتوان روتور را طوری فرض کرد که خطی رفتار کند، در صورت تغییر سرعت چرخشی، نه تنها ماتریس‌های موجود در معادله (۲-۰) وابسته به زمان می‌شوند، بلکه متفاوت هم می‌شوند چون تعدادی از عبارت‌های مرتبط با شتاب زاویه‌ای وارد معادله حرکت می‌شوند. در این موقعیت، باید پاسخ را از طریق انتگرال‌گیری عددی در طی زمان بدست آورد و به عنوان نتیجه، مزایای کمی در خطی‌سازی معادله حرکت وجود دارد.

به طور مشابه، مسئله جدا شدن پره از طریق انتگرال‌گیری عددی در زمان بدست می‌آید و غیرخطی بودن پیچیدگی کمی به مسئله اضافه می‌کند.

یک دلیل دیگر در تغییر سرعت زاویه‌ای در روتورهای آزاد وجود دارد: در این حالت، هیچ وسیله‌ای برای ثابت نگه‌داشتن سرعت چرخش وجود ندارد و دامنه حرکت ممکن است بزرگتر باشد. حرکت روتورهای آزاد باید در صورتی مورد مطالعه قرار گیرند که تکانه زاویه‌ای ثابت بماند، یعنی سرعت چرخش و سرعت لرزش به نحوی پیوسته تغییر کنند که تکانه زاویه‌ای کل ثابت باقی بماند [۲۷].

۸-۲- بازه زمانی در برابر بازه فرکانسی

دینامیک روتور کلاسیک همانطور که گفته شد، با سیستم‌های خطی (یا حداقل خطی شده) در حالت یکنواخت سر و کار دارد. تحلیل‌ها بر پایه بازه‌های فرکانسی است و دید جامعی از رفتار هرگونه روتور در یک حالت خاص می‌دهد. این موضوع که فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به سرعت وابسته هستند، مسائل را پیچیده‌تر از یک مسئله استاندارد در سازه‌های دینامیکی می‌کند، ولی مبنای روش را تغییر نمی‌دهد. پاسخ‌های بازه فرکانسی امکان مطالعه پارامتریک و بهینه‌سازی را می‌دهند، که در آن تعدادی از وضعیت‌ها^۱ جهت بهینه سازی طرح یا تعیین میزان استحکام بر حسب تغییر مقادیر بعضی از پارامترها و یا شرایط کاری، مطالعه می‌شوند.

^۱ Configuration

وقتی فرض حالت یکنواخت^۱ وجود نداشته باشد، پاسخ بازه فرکانسی غیرممکن می‌شوند و تنها راه یافتن پاسخ معادله مربوط، انتگرال‌گیری عددی در بازه زمان است. همین حالت برای روتورهای غیرخطی هم اتفاق می‌افتد، حتی اگر در دینامیک روتور لرزش دایروی پاسخ دقیق روتور غیرخطی باشد (در مقابل در دینامیک سازه‌ای، غیرخطی بودن، ارتعاش هارمونیک در زمان را غیرممکن می‌کند). به هر حال اگر لرزش دایروی ممکن باشد، بقیه پاسخ‌ها، که از طریق تحلیل بازه‌ی فرکانسی قابل دستیابی نیستند، ممکن است وجود داشته باشند، و پاسخ کلی که توصیف کننده رفتار سیستم بدون نیاز به مشخص کردن شرایط کاری است، وجود ندارد. روش بازه زمانی، بر پایه انتگرال‌گیری عددی در زمان از معادله دیفرانسیل حرکت اگرچه امروزه خیلی فراگیر شده است، این عیب قابل توجه را دارد که تنها می‌توان حالت‌های خاصی را حل کرد، بدون اینکه دید کاملی از پدیده مربوطه بدهد. این را باید به خاطر سپرد که مدلسازی بر اساس بازه زمانی امکان تحلیل‌های گذرای گوناگونی را می‌دهد، مثل جدا شدن پره یا گذر از سرعت بحرانی، در نظر نگرفتن فرضیات معمول خطی بودن و تقارن محوری حداقل یکی از استاتور یا روتور.

روشی که اجازه شبیه‌سازی بازه زمانی را می‌دهد، استفاده از کدهای چندجسمی^۲ است. در این حالت، روتور بدین شکل در نظر گرفته نمی‌شود (یعنی فرضیاتی که روتور را یک شاخه ویژه از دینامیک سیستم‌ها می‌کند، حذف می‌شود) بلکه به صورت یک جسم چرخان کلی.

برای مثال این روش، یک روش قدیمی برای تحلیل رفتار دینامیکی فضاپیماهای چرخان بود. از آنجایی که مطالعات به جابجایی‌های کوچک حول نقطه تعادل محدود نشده و سرعت چرخش مقید نشده که ثابت بماند، روتورهای آزاد را می‌توان در شرایط صحیح پایداری تکانه زاویه‌ای مطالعه کرد.

برای روتورهای ثابت، می‌توان سیستم محرک را به صورت یک دستگاه طوری مدل کرد که یا یک سرعت ثابت (یا کنترل شده) و یا یک گشتاور ثابت (یا کنترل شده) به روتور بدهد. این امر موجب پیچیده‌تر شدن محاسبات می‌شود، مخصوصاً وقتی که سیستم دارای اعضای سازگار باشد، و در ورای عدم امکان رسیدن به یک دید جامع از رفتار دینامیکی سیستم، قابل مقایسه است با پاسخی که مقدار ویژه و بردار ویژه معلوم بود.

نهایتاً وقتی که از روش بازه زمانی استفاده می‌شود، امکان استفاده از مدل میراگر هیستریک وجود ندارد. اگرچه برای میراگر غیرچرخان، می‌توان از روش‌های استاندارد دینامیک سازه‌ای برای تبدیل هیستریک به میرایی ویسکوز استفاده کرد. در حالت میراگر چرخان، مسائل خیلی پیچیده‌تر هستند [۲۷].

^۱ Steady-state

^۲ Multibody

فصل ۳

معادلات حرکت

۳- معادلات حرکت

شکل ۳-۱ نشان دهنده یک شفت کامپوزیت توخالی ساخته شده از مواد برون/اپوکسی^۱ می باشد که از ده لایه تشکیل شده است که هر کدام از لایه ها دارای زاویه خاص η در جهت گیری الیافشان هستند. شفت با سرعت ثابت Ω حول محور طولی (محور x) می چرخد و طول شفت l می باشد. یاتاقان ها در مقایسه با شفت سخت بوده و هر دو طرف شفت از نوع تکیه گاه ساده است. لایه چینی از لایه داخلی به سمت لایه بیرونی بصورت $[90^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 0^\circ / 90^\circ]$ می باشد. در این قسمت معادلات حرکت محوری-خمشی-خمشی-پیچشی مربوط به شفت استخراج می شوند و غیر خطی ناشی از تغییر شکل بزرگ نیز در معادلت لحاظ شده است.

۳-۱- مواد کامپوزیت

قبل از استخراج معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل، ابتدا روابط اصلی موجود در شفت کامپوزیت استخراج می شود. شکل ۳-۱ نشان دهنده یک شفت کامپوزیت به همراه دستگاه مختصات استوانه ای و اصلی می باشد که به آن چسبیده است. دستگاه استوانه ای که با پارامترهای $x-r-\theta$ نمایش داده می شود جهات اصلی یک شفت را نشان می دهد در حالی که دستگاه اصلی که با پارامترهای ۱-۲-۳ بیان می شود به یک لایه کامپوزیت طوری چسبیده است که راستای الیاف و عمود بر الیاف را نشان می دهد و بیانگر جهات اصلی در یک لایه کامپوزیت می باشد.

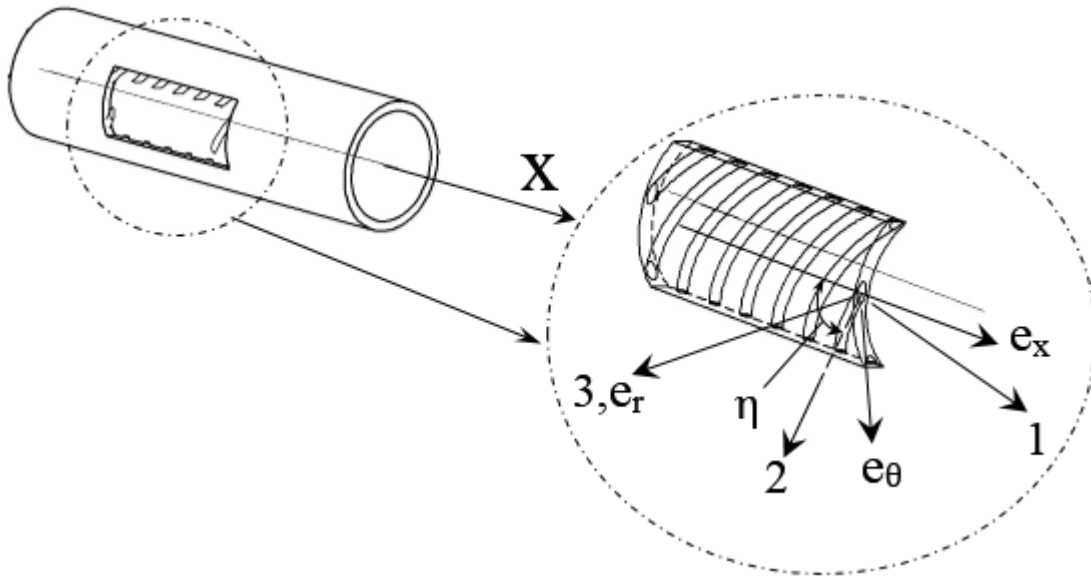
روابط اصلی برای یک لایه کامپوزیت در دستگاه اصلی را می توان بصورت زیر نشان داد [۱۰]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (۱-۳)$$

که می توان آن را بصورت خلاصه اینطور نوشت

^۱ Boron/epoxy

$$\{\sigma\} = \{Q\} \{\varepsilon\} \quad (2-3)$$



شکل ۱-۳- محوره‌های دستگاه مختصات اصلی بروی یک لایه دلخواه از کامپوزیت

بطوریکه $[Q]$ ماتریس سختی است و معکوس آن و یا همان ماتریس S ماتریس نرمی است. برای بدست آوردن ماتریس Q از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

بطوریکه E_3, E_2, E_1 به ترتیب مدول یانگ در راستاهای ۱، ۲ و ۳ هستند. ν_{ij} نسبت پواسون است و برابر نسبت کرنش عرضی در راستای j به کرنش محوری در راستای i است وقتی که تنش در راستای i باشد. G_{12}, G_{13}, G_{23} به ترتیب مدول برشی در صفحات ۱-۲، ۲-۳، ۱-۳ هستند [۳۶].

که بطور خلاصه می شود

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (۴-۳)$$

از آنجایی که S یک ماتریس متقارن است پس روابط زیر در آن حاکم است

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (۵-۳)$$

با جایگذاری رابطه بالا در ماتریس S و قرار دادن $\nu_{31}=0, \nu_{23}=\nu_{32}=0, E_3=0$ و معکوس کردن ماتریس حاصل، ماتریس Q بصورت زیر بدست می آید

$$\begin{bmatrix} \frac{E_1}{N} & \frac{E_2\nu_{12}}{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{N} & \frac{E_2}{N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (۶-۳)$$

بطوریکه $N = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}$. از آنجایی که هر یک از لایه ها دارای زاویه چرخش مربوط به خود هستند

بنابراین برای اینکه بتوان این لایه ها را به یکدیگر ربط داد یک دستگاه مختصات کلی تر لازم است. بنابراین معادله (۳-۱) برای یک لایه دلخواه با زاویه الیاف η را در دستگاه استوانه ای می توان بصورت زیر نشان داد

[۱۰]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (۷-۳)$$

که بصورت خلاصه می‌شود

$$\{\sigma\} = \{\bar{Q}\} \{\varepsilon\} \quad (۸-۳)$$

بطوریکه $[\bar{Q}]$ ماتریس سختی برای یک لایه دلخواه است که از تبدیل ماتریس $[Q]$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]^{-T} \quad (۹-۳)$$

بطوریکه

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (۱۰-۳)$$

و

$$m = \cos \eta, \quad n = \sin \eta \quad (۱۱-۳)$$

۳-۲- انرژی پتانسیل و جنبشی

در ادامه انرژی جنبشی و پتانسیل شفت استخراج خواهند شد. همانطور که شکل ۳-۲ نمای یک شفت چرخان تغییر شکل یافته را نشان می‌دهد، دو دستگاه مختصات وجود دارد.

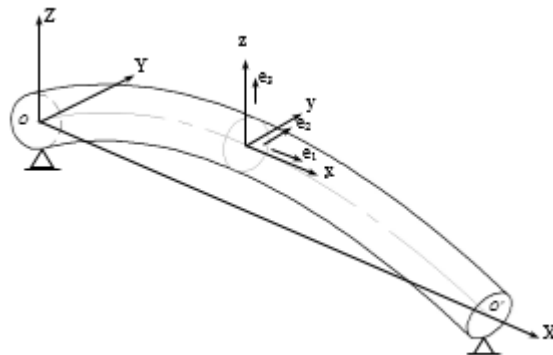
دستگاه X-Y-Z که یک دستگاه اینرسی بوده و مبدا آن در نقطه O می‌باشد و دستگاه x-y-z که یک دستگاه مختصات محلی بوده و به خط محوری شفت متصل است.

با توجه به حرکت شفت کامپوزیت فرضیات زیر در نظر گرفته شده است

۱. شفت چرخان دارای تکیه گاه ساده است.
۲. شفت توخالی بوده و دارای سطح مقطع حلقوی ثابت می‌باشد.

۳. شفت با سرعت زاویه ای ثابت حول مختصه طولی شفت (X) می‌چرخد.
۴. اینرسی چرخشی و اثرات ژيروسکوپی در نظر گرفته شدند در حالی که از تغییر شکل برشی صرف نظر شده است.
۵. دامنه بزرگ است و این امر باعث ایجاد اثر غیرخطی هندسی می‌شود.
۶. استهلاک انرژی در شفت توسط میراگر ویسکوز مدل‌سازی شده است.
۷. ماده در هر لایه الاستیک خطی و از لحاظ ماکروسکوپی همگن می‌باشد و چینش لایه‌ها طوری می‌تواند باشد که انواع حالات مونوکلینیک^۱، ارتوتروپیک^۲، ایزوتروپ عرضی^۳ و یا ایزوتروپ^۴ ایجاد شود.

شکل ۳-۳ یک سطح مقطع از شفت را قبل و بعد از تغییر شکل نشان می‌دهد. نقطه P یک نقطه دلخواه روی سطح مقطع شفت می‌باشد که فاصله آن از خط محوری (تار خنثی) شفت قبل و بعد از تغییر شکل ثابت می‌ماند و موقعیت جدید آن که حاصل از تغییر شکل‌های محوری، خمشی و پیچشی به همراه چرخش شفت است توسط بردار $R_{P/O}$ نشان داده می‌شود. بطوریکه نقطه O مرکز سطح مقطع شفت در دستگاه اینرسی X-Y-Z قبل از تغییر شکل می‌باشد. بردار جابجایی $R_{P/O}$ را می‌توان بصورت زیر نوشت [۱۰]



شکل ۳-۲- نمای یک شفت تغییر شکل داده و دستگاه مختصات چرخان X-Y-Z

^۱ Monoclinic

^۲ Orthotropic

^۳ Transversely isotropic

^۴ Isotropic

$$R_{P/O} = R_{G/O} + R_{P/G} = (x+u)e_x + ve_y + we_z + ye_y + ze_z \quad (۱۲-۳)$$

بردار مکان (۱۲-۳) هم دارای مختصه‌هایی در دستگاه اینرسی می‌باشد و هم دستگاه چرخان بطوریکه e_x, e_y, e_z بردارهای واحد در دستگاه اینرسی X-Y-Z هستند در حالی که e_y, e_z بردارهای واحد در دستگاه چرخان x-y-z می‌باشند.

همانطور که در شکل ۳-۴ مشاهده می‌شود برای اینکه بتوان دو دستگاه مختصات را به یکدیگر مرتبط ساخت از مجموعه ۱-۲-۳ زوایای اویلر استفاده شده است. $\psi(x,t)$ ، $\theta(x,t)$ و $\beta(x,t)$ زوایای اویلر هستند که به ترتیب چرخش حول محورهای X ۲ و Y ۱، Z را نشان می‌دهند. در اینجا زاویه چرخش $\beta(x,t)$ شامل دو بخش $\beta(x,t) = \varphi(x,t) + \Omega t$ می‌باشد، بطوریکه $\varphi(x,t)$ جابجایی زاویه‌ای سطح مقطع شفت به واسطه تغییر شکل پیچشی شفت می‌باشد و Ω سرعت زاویه‌ای ثابت شفت است.

انرژی جنبشی یک شفت کامپوزیت را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho \dot{R} \dot{R} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l I_0 [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] + I_1 \omega_1^2 + I_2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) dx \quad (۱۳-۳)$$

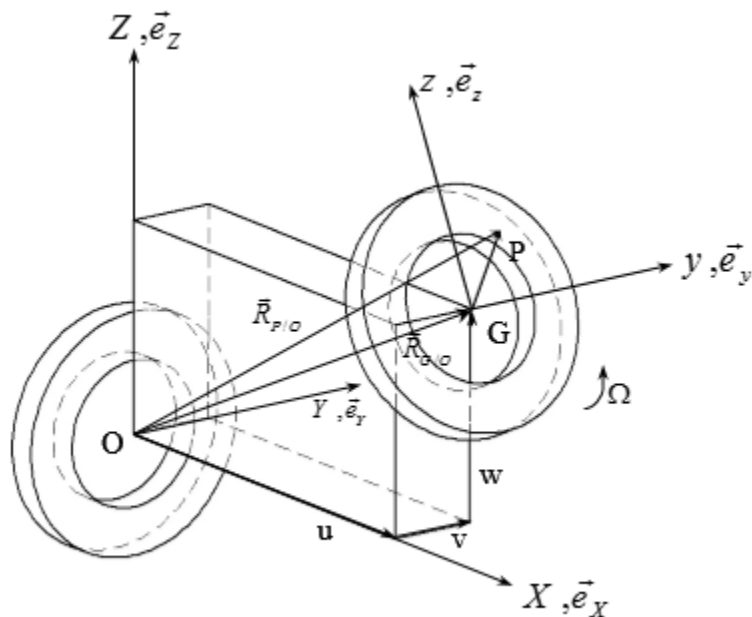
بطوریکه l طول شفت است و

$$I_0 = \pi \sum_{i=1}^n \rho_i (r_{i+1}^2 - r_i^2), \quad I_1 = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i (r_{i+1}^4 - r_i^4), \quad I_2 = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^n \rho_i (r_{i+1}^4 - r_i^4) \quad (۱۴-۳)$$

بطوریکه n تعداد لایه‌ها در یک لیمینیت^۱ است، ρ_i چگالی لایه i ام و r_i و r_{i+1} به ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی لایه i ام می‌باشند. I_0 جرم کل شفت و I_1 و I_2 به ترتیب اینرسی جرمی قطری و قطبی می‌باشند.

سرعت زاویه‌ای دستگاه چرخان x-y-z نسبت به دستگاه اینرسی X-Y-Z بصورت زیر می‌شود

$$\omega = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z = (\dot{\beta} - \dot{\psi} \sin \theta) e_x + (\dot{\psi} \sin \beta \cos \theta + \dot{\theta} \cos \beta) e_y + (\dot{\psi} \cos \beta \cos \theta - \dot{\theta} \sin \beta) e_z \quad (۱۵-۳)$$



شکل ۳-۳- جابجایی یک سطح مقطع دلخواه از شفت و نقطه P ناشی از تغییر تغییر شکل

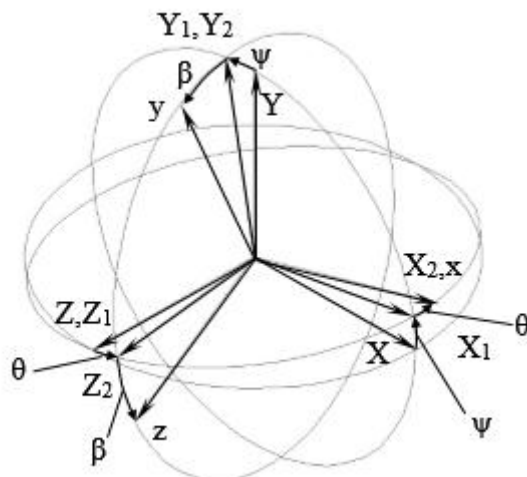
انرژی جنبشی T_e ناشی از خارج از مرکزیت را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$T_e = \frac{1}{2} \int_0^l I_0 \Omega^2 [e_y^2(x) + e_z^2(x)] - 2I_0 \Omega \{ [e_z(x) \dot{v} + e_y(x) \dot{w}] \sin \beta + [e_y(x) \dot{v} - e_z(x) \dot{w}] \cos \beta \} dx \quad (۱۶-۳)$$

بطوریکه $e_y(x)$ و $e_z(x)$ نشان دهنده توزیع خارج از مرکزیت به ترتیب نسبت به محور y و z هستند. روابط (۱۳-۳) و (۱۶-۳) مجموعاً انرژی جنبشی یک شفت کامپوزیت را می‌دهند.

برای بدست آوردن رابطه انرژی کرنشی یک شفت کامپوزیت میدان جابجایی بصورت زیر فرض شده است [۱۰]

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial x} \\ u_y(x, y, z, t) &= v(x, t) - z \phi(x, t) \\ u_z(x, y, z, t) &= w(x, t) + y \phi(x, t) \end{aligned} \quad (۱۷-۳)$$



شکل ۳-۴- تعریف زوایای اویلر

بطوریکه u_x, u_y, u_z جابجایی خمشی هر یک از نقاط روی سطح مقطع شفت به ترتیب در جهات x, y و z می‌باشند. همانطور که در شکل ۳-۳ نشان داده شده است، متغیرهای u, v و w نشان دهنده جابجایی خمشی به ترتیب در جهات x, y و z هستند. زاویه چرخش حول محور شفت است که فقط ناشی از تغییر شکل الاستیک می‌باشد. [۱۰]

با در نظر گرفتن تئوری الاستیک خطی و **تغییر شکل کوچک** رابطه خطی کرنش-جابجایی را بصورت زیر می‌توان نوشت [۱۰]

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= e + z \rho_y - y \rho_z \\ \gamma_{xy} &= -z \rho_x \\ \gamma_{xz} &= y \rho_x\end{aligned}\quad (۱۸-۳)$$

بطوریکه ρ انحناى شفت و e کرنش طولی در امتداد تار خنثی شفت می‌باشد و با استفاده از قیاس کیرشهف در دستگاه چرخان $x-y-z$ بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\rho = \rho_x e_x + \rho_y e_y + \rho_z e_z = (\varphi' - \psi' \sin \theta) e_x + (\psi' \sin \varphi \cos \theta + \theta' \cos \varphi) e_y + (\psi' \cos \varphi \cos \theta - \theta' \sin \varphi) e_z \quad (۱۹-۳)$$

اگر از تغییر شکل برشی صرف‌نظر شود، زوایای ψ و θ را می‌توان بصورت زیر به جابجایی مرتبط کرد [۳۷]

$$\begin{aligned}\psi &= \sin^{-1} \left(\frac{v'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \right) \\ \theta &= \sin^{-1} \left(\frac{-w'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2}} \right)\end{aligned}\quad (20-3)$$

از آنجایی که سطح مقطع شفت بصورت حلقوی فرض شده است بهتر است که روابط تنش-کرنش را در دستگاه مختصات استوانه‌ای بیان کرد. برای این کار از ماتریس تبدیل زیر استفاده می‌شود [۱۰]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rr} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{xr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & m^2 & 0 & -2mn & 0 \\ 0 & m^2 & n^2 & 0 & 2mn & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & 0 & m \\ 0 & -mn & mn & 0 & m^2 - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (21-3)$$

بطوریکه $n = \sin \theta$ و $m = \cos \theta$ که در شکل ۵-۳ نشان داده شده است.

با جایگذاری رابطه (۳-۱۸) در رابطه (۳-۲۱) و قرار دادن $y = r \cos \theta$ و $z = r \sin \theta$ روابط کرنش-جابجایی در دستگاه مختصات استوانه‌ای بصورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= e - r \cos(\theta) \rho_z + r \sin(\theta) \rho_y \\ \varepsilon_{x\theta} &= r \rho_x \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{xr} = 0\end{aligned}\quad (22-3)$$

با استفاده از معادله (۳-۷) روابط تنش-کرنش را می‌توان بصورت زیر بیان کرد

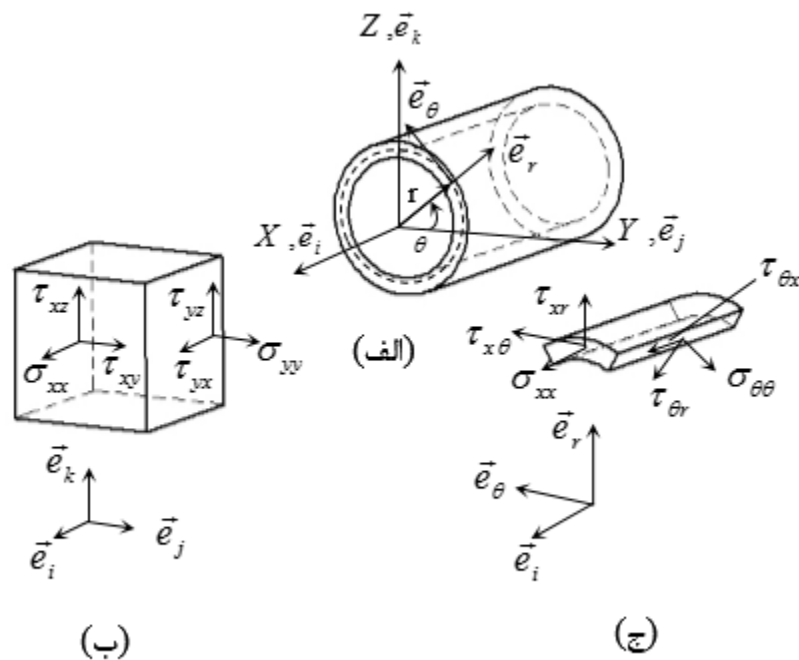
$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \bar{Q}_{11} \varepsilon_{xx} + \bar{Q}_{16} \gamma_{x\theta} \\ \tau_{x\theta} &= \bar{Q}_{16} \varepsilon_{xx} + \bar{Q}_{66} \gamma_{x\theta}\end{aligned}\quad (23-3)$$

انرژی کرنشی برای یک شفت کامپوزیت را می‌توان بصورت زیر بیان کرد

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{xr} \gamma_{xr} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) dV \quad (24-3)$$

با جایگذاری روابط (۳-۲۲) و (۳-۲۳) در رابطه (۳-۲۴) انرژی کرنشی می‌شود

$$U_s = \frac{1}{2} [A_{11} e^2 + D_{11} (\rho_z^2 + \rho_y^2) + D_{66} \rho_x^2 + 2B_{16} \rho_x e] \quad (25-3)$$



شکل ۳-۵- دستگاه مختصات استفاده شده (الف) تعریف اجزای تنش (ب)، (ج)

بطوریکه

$$A_{11} = \pi \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{11i} (r_{i+1}^2 - r_i^2), \quad B_{16} = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{16i} (r_{i+1}^3 - r_i^3) \quad (3-26)$$

$$D_{11} = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{11i} (r_{i+1}^4 - r_i^4), \quad D_{66} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n \bar{Q}_{66i} (r_{i+1}^4 - r_i^4)$$

A_{11} سختی طولی، D_{11} سختی خمشی، D_{66} سختی پیچشی و B_{16} ترم کوپلینگ محوری-پیچشی است.

۳-۳- استخراج معادلات حرکت

با استفاده از انرژی جنبشی و کرنشی بدست آمده در روابط بالا، می‌توان با بکارگیری اصل همیلتون معادلات حرکت را بدست آورد. ابتدا با جایگذاری رابطه (۳-۲۰) در روابط (۳-۱۵) و (۳-۱۹) انحنا و سرعت زاویه‌ای بدست آورده می‌شود و سپس با جایگذاری روابط حاصل در روابط انرژی جنبشی و کرنشی و اعمال بسط

تیلور به نتایج حاصل تا مرتبه سوم، در نهایت با اعمال اصل همپلتون به روابط نهایی انرژی جنبشی و کرنشی، معادلات حرکت بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
& I_0 \ddot{u} - A_{11} (\dot{v} \dot{v}'' + w \dot{w}'' - v'^2 u'' - w'^2 u'' + u'' - 2v' \dot{u} v'' - 2w' \dot{u} w'') - B_{16} (-6u' \dot{v}'' w' + 2v' \dot{v}'' u'' - 6u' \dot{v}'' w' + \\
& 2v' \dot{w}'' - 4u' \dot{v}'' w'' - 2w' \dot{\phi}' w'' - 2\phi' \dot{v}'' v'' - w'^2 \phi'' - \phi'' v'^2 + 2u' \dot{w}'' v' + 2v' \dot{w}'' w' + 2\phi'') - D_{11} (-5v' \dot{u}'' v''' - \\
& 4v' \dot{u}'' v'' - 3v' \dot{u}'' v''' - 3w' \dot{u}'' w''' + v' \dot{v}''^{(IV)} - 5w' \dot{w}'' u''' - 3v' \dot{v}''^{(IV)} w' - 4w' \dot{w}'' u''' - 2v' \dot{u}'' u'' + w' \dot{v}''^{(IV)} w' + \\
& v' \dot{v}''''' - v' \dot{u}''^{(IV)} - w' \dot{u}''^{(IV)} - 2v' \dot{u}'' u'' - 3v' \dot{u}'' v'^{(IV)} + w' \dot{w}''''') - D_{66} (\phi' w'' v' + 2\phi' w'' v' - \phi' v'' w' + \\
& \phi'' w' v') - I_2 (-\ddot{w}'' w'' - \ddot{v}'' v'' - \ddot{v}'' v'' - \ddot{w}'' w'' + v'^2 \ddot{u}'' + w'^2 \ddot{u}'' + 2v' \dot{w}'' \dot{u}'' + 2w' \dot{v}'' \dot{u}'' + 3\ddot{v}'' v' u'' + 3\ddot{v}'' v' u'' + \\
& 3\ddot{v}'' v' u'' + 2v' \dot{v}'' \dot{u}'' + 2v' \dot{v}'' \dot{u}'' + 2v' \dot{v}'' \dot{u}'' + 2v' \dot{w}'' \dot{u}'' + 3\ddot{v}'' w' u'' + 3\ddot{v}'' w' u'' + 3\ddot{v}'' w' u'' + 2v' \dot{u}'' v'' + 2v' \dot{u}'' w'' - \\
& I_p (\Omega (3v' \dot{u}'' w'' - 3v' \dot{w}'' u'' + v' \dot{w}'' + v' \dot{w}'' - 3v' \dot{w}'' u'' - 3v' \dot{w}'' u'' - v' \dot{w}'' + 3v' \dot{u}'' w'' + 3v' \dot{u}'' w'' - v' \dot{w}''') - \\
& \ddot{\phi}'' w'' - \ddot{\phi}'' w'' - \ddot{\phi}'' w'' - \ddot{\phi}'' v'' w'' - \ddot{\phi}'' v'' w'' + \ddot{\phi}'' w'' + \ddot{\phi}'' w'' - \ddot{\phi}'' w'' + \ddot{\phi}'' v'' w'') = 0
\end{aligned} \tag{۲۷-۳}$$

$$\begin{aligned}
& I_0 \ddot{v} + c \dot{v} - A_{11} (w \dot{v}'' v'' + v \dot{u}'' + v \dot{u}'' + \frac{3}{2} v' \dot{v}'' + \frac{1}{2} w' \dot{v}'' - 2v' \dot{u}'' u'' - v \dot{u}''^2) - B_{16} (6w' \dot{u}'' u'' + 6w' \dot{u}''^2 + \\
& 14w' \dot{u}'' u'' - 4u' \dot{w}'' - 2v' \dot{v}'' v'' + 2\phi' v'' + 2\phi' v'' - 6w' \dot{w}''^2 - 2u' \dot{w}'' - 2u' \dot{w}'' - 3w' \dot{w}'' - w' \dot{v}''^2 + 4u' \dot{w}'' - \\
& 2\phi' v'' u'' - 2\phi' v'' u'' - 2\phi' v'' u'') - D_{11} (w \dot{v}''^{(IV)} w' + 8v' \dot{v}'' v'' + 3v' \dot{w}'' w'' + w' \dot{v}'' w'' + v \dot{u}''^{(IV)} + 2v' \dot{u}''^{(IV)} u'' + \\
& w' \dot{v}''^{(IV)} + 2v' \dot{v}''^{(IV)} v'' + 2w' \dot{v}'' v'' + 4v' \dot{u}'' u'' + 4v' \dot{w}'' w'' + 2v' \dot{u}''^3 + 3v' \dot{u}'' u'' - v' \dot{v}''^{(IV)} - 3v' \dot{v}''^{(IV)} u'' - 7v' \dot{u}'' u'' - \\
& 12u' \dot{v}'' v'' - 9u' \dot{u}'' v'' - 8v' \dot{u}''^2 - 3v' \dot{u}''^{(IV)}) - D_{66} (-4w' \dot{v}'' w'' - 2\phi' w'' - \phi' w'' - 2w' \dot{v}'' v'' - w' \dot{v}''^{(IV)} - \\
& 2w' \dot{v}'' w'' - \phi' w'' + \phi' w'' + 3\phi' w'' u'' - w' \dot{v}''^{(IV)} + 4\phi' w'' u'' + 2\phi' w'' u'' + 3\phi' w'' u'' + 2\phi' w'' u'') - \\
& I_2 (-2v' \dot{v}'' w'' - 4v' \dot{v}'' v'' - 2v' \dot{v}'' w'' - 4v' \dot{v}'' v'' - w' \dot{v}'' v'' - w' \dot{v}'' v'' - 2v' \dot{v}'' w'' - 2v' \dot{v}'' w'' - 2u' \dot{v}'' - \\
& 2v' \dot{v}'' v'' - 2u' \dot{v}'' v'' - 2v' \dot{v}'' v'' - v' \dot{u}'' - v' \dot{u}'' - 2v' \dot{u}'' - 2v' \dot{u}'' - w' \dot{w}'' v'' - w' \dot{v}''^2 v'' + v'' + 3v' \dot{u}'' u'' + 3v' \dot{u}''^2 + \\
& 2v' \dot{u}''^2 - 2v' \dot{u}'' + 6v' \dot{u}'' u'' + 4v' \dot{u}'' u'' + 6v' \dot{u}'' u'' + 6v' \dot{u}'' u'' + 6v' \dot{u}'' u'' + 3v' \dot{u}'' u'' + 3v' \dot{u}'' u'') - I_p (\Omega (-w' \dot{u}'' - \\
& \frac{3}{2} w' \dot{v}''^2 - 3w' \dot{w}'' v'' - w' \dot{u}'' - 3v' \dot{v}'' + w'' - \frac{3}{2} w' \dot{v}''^2 - 2v' \dot{u}'' - 2v' \dot{u}'' + 3v' \dot{u}''^2 + 3v' \dot{u}'' u'' + 3v' \dot{u}'' u'' + \\
& 6v' \dot{u}'' u'' + 3v' \dot{u}'' u'') + \ddot{\phi}'' w'' + \ddot{\phi}'' w'' + \ddot{\phi}'' w'' + 2v' \dot{v}'' w'' + w' \dot{v}''^2 v'' + \ddot{\phi}'' w'' + 2v' \dot{v}'' w'' + 2v' \dot{v}'' w'' + 2v' \dot{v}'' w'' - \\
& 2\phi' w'' u'' - 2\phi' w'' u'' - w' \dot{\phi}'' u'' - 2\phi' w'' u'' - w' \dot{\phi}'' u'' - w' \dot{\phi}'' u'' - 2\phi' w'' u'' - 2\phi' w'' u'' - 2\phi' w'' u'') = \\
& \Omega^2 I_0 (e_y(x) \cos(\Omega t) - e_z(x) \sin(\Omega t))
\end{aligned} \tag{۲۸-۳}$$

$$\begin{aligned}
& I_0 \ddot{w} + c \dot{w} - A_{11} (w \dot{v}'' v'' + w \dot{u}'' + w \dot{u}'' + \frac{3}{2} w' \dot{v}'' w'' + \frac{1}{2} v' \dot{v}'' w'' - 2v' \dot{u}'' u'' - w \dot{u}''^2) - B_{16} (2u' \dot{v}'' + 6w' \dot{v}'' w'' + \\
& 2\phi' w'' + 2\phi' w'' + 2v' \dot{v}''^2 + 2u' \dot{v}'' w'' + v' \dot{v}'' w'' + 3v' \dot{w}'' v'' - 2w' \dot{\phi}' u'' - 4u' \dot{v}'' w'' - 2v' \dot{u}''^2 - 2v' \dot{\phi}' u'' - 2v' \dot{\phi}' u'' - \\
& 10v' \dot{u}'' u'' - 2v' \dot{u}'' u'') - D_{11} (2v' \dot{v}''^{(IV)} u'' + 2v' \dot{v}''^{(IV)} w'' + v' \dot{v}''^{(IV)} w' + 4w' \dot{v}'' v'' + 2v' \dot{v}''^2 + 4u' \dot{w}'' w'' + w' \dot{v}'' w'' - \\
& w' \dot{v}''^{(IV)} + 3v' \dot{v}'' v'' + 8w' \dot{w}'' w'' + w' \dot{v}''^{(IV)} v'' + w' \dot{u}''^{(IV)} + 3u' \dot{w}'' w'' + 2v' \dot{u}''^2 - 7w' \dot{u}'' u'' - 3v' \dot{u}''^{(IV)} - \\
& 8v' \dot{u}''^2 - 12w' \dot{u}'' u'' - 9w' \dot{u}'' u'' - 3v' \dot{u}''^{(IV)} u'' - D_{66} (\phi' v'' + v''^2 w'' + 2v' \dot{v}'' w'' + \phi' v'' - \phi' v'' u'' - 2\phi' v'' u'' - \\
& 2\phi' v'' u'' - 3\phi' v'' u'' - \phi' v'' u'') - I_2 (-2v' \dot{v}'' w'' - 2u' \dot{w}'' - 2u' \dot{w}'' - w' \dot{u}'' + w'' - w' \dot{v}''^2 - 2v' \dot{w}''^2 - 2v' \dot{w}'' - \\
& 4v' \dot{w}'' w'' - 2v' \dot{u}'' - 2v' \dot{w}'' v'' - 2v' \dot{w}'' v'' - 2v' \dot{w}'' v'' - 4v' \dot{w}'' w'' - v' \dot{w}'' v'' - v' \dot{w}'' v'' - v' \dot{w}'' v'' - 2v' \dot{v}'' v'' - \\
& w' \dot{u}'' + 2v' \dot{u}''^2 - 3v' \dot{u}''^2 + 4v' \dot{u}'' u'' + 3v' \dot{u}'' u'' + 3v' \dot{u}'' u'' + 3v' \dot{u}'' u'' + 6v' \dot{u}'' u'' + 6v' \dot{u}'' u'' + 6v' \dot{u}'' u'' + \\
& 6v' \dot{u}'' u'') - I_p (\Omega (3v' \dot{w}'' w'' + v' \dot{u}'' + 3v' \dot{v}'' v'' + v' \dot{u}'' - v'' + 2v' \dot{u}'' + 2v' \dot{u}'' + \frac{3}{2} v' \dot{w}''^2 + \frac{3}{2} v' \dot{v}''^2 - 3v' \dot{u}'' u'' - \\
& 3v' \dot{u}'' u'' - 6v' \dot{u}'' u'' - 3v' \dot{u}'' u'' - 3v' \dot{u}''^2) - \ddot{\phi}'' w'' - \ddot{\phi}'' v'' - w' \dot{v}''^2 - 2v' \dot{v}'' v'' + 2\phi' v'' u'' + 2\phi' v'' u'' + 2\phi' v'' u'' - \\
& 2v' \dot{v}'' v'' + v' \dot{\phi}' u'' + v' \dot{\phi}' u'' + v' \dot{\phi}' u'') = \Omega^2 I_0 (e_z(x) \cos(\Omega t) + e_y(x) \sin(\Omega t))
\end{aligned} \tag{۲۹-۳}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16}(2u'' + 2w'w'' + 2v'v'' - 2v'u'v'' - 2w'u'w'' - w'^2u'' - v'^2u'') + \\
& D_{66}(v''w'' + \phi'' + v''w' - w''v'u'' - 3u''v''w' - 2u'v''w'' - 2u'v''w' - w'v'u''') + \\
& I_p(-\ddot{\phi} - \ddot{v}'w' - \ddot{v}'w' + 3\ddot{v}'w'u' + w''v'u' + 2\ddot{v}'w'u' + w''v'u' + 2\ddot{v}'w'u') = 0
\end{aligned} \quad (30-3)$$

روابط بدست آمده در بالا معادلات حرکت کامل ارتعاشات محوری-خمشی-خمشی-پیچشی یک شفت کامپوزیت با غیرخطی‌های هندسی می‌باشد. معادلات هم دارای کوپلینگ خطی و هم غیرخطی هستند. وجود کوپلینگ خطی به واسطه وجود ناهمسانگردی در مشخصات مواد کامپوزیت است و کوپلینگ غیرخطی به واسطه تغییر شکل‌های بزرگ شفت می‌باشد. اگر ماده همسانگرد فرض شود ضریب کوپلینگ کامپوزیت B_{16} حذف می‌شود و بقیه ضرایب هم به تناسب تغییر می‌کنند که این امر موجب می‌شود معادلات حرکت شفت کامپوزیتی به معادلات حرکت شفت فلزی در مرجع [۳۷] کاهش یابد. این موضوع بطور نسبی اعتبار معادلات حرکت بدست آمده در این تحقیق را تایید می‌کند.

از آنجایی که شفت باریک است ضریب سختی خمشی D_{11} و سختی پیچشی D_{66} در مقابل ضریب سختی طولی A_{11} خیلی کوچک هستند پس بنابراین ضرایب غیرخطی آنها (حاصل از ضرب چند عبارت یا توان آنها) حذف می‌شوند. همین کار در مورد ضریب اینرسی چرخشی I_2 و ترم کوپلینگ B_{16} نیز انجام می‌شود. با اعمال این ساده سازی‌ها و با استفاده از پارامترهای بی بعد زیر

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{v}{l}, \quad \bar{w} = \frac{w}{l}, \quad \bar{u} = \frac{u}{l}, \quad \bar{e}_y = \frac{e_y}{l}, \quad \bar{e}_z = \frac{e_z}{l}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = t\omega, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \bar{B}_{16} = \frac{B_{16}}{\omega^2 I_0 l^3} \\
\bar{D}_{66} &= \frac{D_{66}}{\omega^2 I_0 l^4}, \quad \bar{D}_{11} = \frac{D_{11}}{\omega^2 I_0 l^4}, \quad \bar{A}_{11} = \frac{A_{11}}{\omega^2 I_0 l^2}, \quad \bar{I}_2 = \frac{I_2}{I_0 l^2}, \quad \bar{I}_p = \frac{I_p}{I_0 l^2}, \quad \bar{c} = \frac{c}{\omega I_0}
\end{aligned} \quad (31-3)$$

فرم نهایی معادلات ساده شده بی بعد بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\ddot{\bar{u}} - \bar{B}_{16}\bar{\phi}'' - \bar{A}_{11}(\bar{v}'\bar{v}'' + \bar{w}'\bar{w}'' - \bar{v}'^2\bar{u}'' - \bar{w}'^2\bar{u}'' + \bar{u}'' - 2\bar{v}'\bar{u}'\bar{v}'' - 2\bar{w}'\bar{u}'\bar{w}'') = 0 \quad (32-3)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\bar{v}} + \bar{c}\dot{\bar{v}} - \bar{D}_{11}(-\bar{v}^{(IV)}) - \bar{I}_p\bar{\Omega}\dot{\bar{v}}'' - \bar{A}_{11}(\bar{w}'\bar{v}'\bar{w}'' + \bar{v}'\bar{u}'' + \bar{v}''\bar{u}' + \frac{3}{2}\bar{v}'^2\bar{v}'' + \frac{1}{2}\bar{w}'^2\bar{v}'' - 2\bar{v}'\bar{u}'\bar{u}'' - \bar{v}''\bar{u}'^2) \\
& = \bar{\Omega}^2(\bar{e}_y(\bar{x})\cos(\bar{\Omega}\bar{t}) - \bar{e}_z(\bar{x})\sin(\bar{\Omega}\bar{t}))
\end{aligned} \quad (33-3)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\bar{w}} + \bar{c}\dot{\bar{w}} - \bar{D}_{11}(-\bar{w}^{(IV)}) - \bar{I}_p\bar{\Omega}\dot{\bar{w}}'' - \bar{A}_{11}(\bar{w}'\bar{v}'\bar{v}'' + \bar{w}'\bar{u}'' + \bar{w}''\bar{u}' + \frac{3}{2}\bar{w}'^2\bar{w}'' + \frac{1}{2}\bar{v}'^2\bar{w}'' - 2\bar{v}'\bar{u}'\bar{u}'' - \bar{w}''\bar{u}'^2) \\
& = \bar{\Omega}^2(\bar{e}_z(\bar{x})\cos(\bar{\Omega}\bar{t}) + \bar{e}_y(\bar{x})\sin(\bar{\Omega}\bar{t}))
\end{aligned} \quad (34-3)$$

$$\bar{I}_p\ddot{\bar{\phi}} - \bar{B}_{16}2\bar{u}'' - \bar{D}_{66}(v''w'' + \phi'' + v''w' - w''v'u'' - 3u''v''w' - 2u'v''w'' - 2u'v''w' - w'v'u''') = 0 \quad (35-3)$$

و شروط مرزی بصورت زیر بدست می آیند

$$\bar{u}=0, \quad \bar{u}''=0, \quad \bar{v}=0, \quad \bar{v}''=0, \quad \bar{w}=0, \quad \bar{w}''=0, \quad \bar{\phi}'=0 \quad @ \bar{x}=0 \text{ \& } \bar{x}=l \quad (36-3)$$

بطوریکه ω فرکانس خطی طبیعی شفت است. در معادلات بالا ضریب \bar{B}_{16} کوپلینگ محوری-پیچشی می باشد و عبارات $\bar{I}_p \Omega \dot{\bar{v}}''$ و $\bar{I}_p \Omega \dot{\bar{w}}''$ ترم های ژيروسکوپي هستند که دو معادله خمشی را به یکدیگر بصورت خطی کوپل می کنند. بعلت سادگی از این به بعد نماد $(\bar{\quad})$ از معادلات حذف می شود. معادلات (32-3) تا (35-3) را می توان برای هر نوع شرط مرزی بکار برد.

برای اعتبار سنجی به ساده سازی های صورت گرفته، روش تحلیلی (روش تئوری اغتشاشات در بخش بعدی) هم به معادلات کامل (32-3) تا (30-3) و هم به معادلات ساده شده (32-3) تا (35-3) اعمال شد و مشاهده شد که نتایج یکسان بودند در نتیجه ترم های حذف شده واقعا قابل صرف نظر کردن بودند و فرم ساده شده ی معادلات برای بررسی و تحلیل ارتعاشات کافی می باشد.

از معادلات (32-3)-(35-3) و تئوری اغتشاشات در قسمت بعد برای بررسی دینامیک شفت در نزدیکی تشدید اولیه استفاده شده است. به علت وجود کوپلینگ محوری-پیچشی بیشتر از این نمی توان ساده سازی انجام داد. باید به این نکته توجه داشت که در کارهای قبلی [23-18] به علت نبود این کوپلینگ، معادلات محوری و پیچشی با استفاده از بعضی از فرضیات (کشیدگی یا کوتاه شدگی) بر حسب متغیرهای خمشی حل می شدند و در نهایت دسته معادلات به حالت خمشی-خمشی کاهش می یافتند و برای تحلیل و بررسی استفاده می شدند، اما در این تحقیق این ساده سازی ها صورت نگرفته و معادلات حرکت محوری-خمشی-خمشی-پیچشی مورد استفاده قرار گرفته اند.

فصل ۴

روش مقیاس‌های چندگانه

۴- روش مقیاس‌های چندگانه

روش مقیاس‌های چندگانه [۳۸] یک روش قوی از تئوری اغتشاشات می‌باشد. در این روش، متغیر مستقل t به چند متغیر مستقل جدید تقسیم می‌شود، T_0, T_1, \dots ، اگرچه این متغیرهای جدید کاملاً مستقل نبوده و می‌توان آنها را توسط پارامتر ساماندهی^۱ به یکدیگر مرتبط ساخت اما در فرآیند حل بصورت متغیرهای مستقل با آنها رفتار می‌شود. در اینجا روش مقیاس‌های چندگانه برای تحلیل ارتعاشات اجباری یک شفت کامپوزیت استفاده شده است. قبل از اعمال روش مقیاس‌های چندگانه، معادلات حرکت با مشتقات جزئی باید توسط یک روش مناسب گسسته شوند. در این تحقیق معادلات توسط روش گلرکین با انتخاب شکل مودهای مناسب گسسته شده‌اند. در ارتعاشات غیرخطی معمول است که [۳۹] اگر تحریک در نزدیکی یکی از مودها تنظیم شود و این در تشدید داخلی دخالت نداشته باشد، آنگاه مودهای دیگر طی گذر زمان از بین می‌روند و گسسته سازی توسط یک مود برای تحلیل پاسخ حالت ماندگار مناسب خواهد بود. اگرچه تحریک (سرعت چرخش) در همسایگی مود اول تنظیم شده است و این مود با مودهای دیگر در تشدید داخلی درگیر نمی‌شود، اما نشان داده خواهد شد که گسسته سازی توسط یک مود در این تحقیق کافی نمی‌باشد. در اینجا گسسته سازی هم توسط یک مود و هم توسط دو مود انجام شده است و برای بررسی اثر همگرایی تعداد مودها در پاسخ گسسته سازی توسط سه مود هم صورت گرفته است. (نتایج آورده نشده است) شبیه سازی عددی در گسسته سازی توسط سه مود و دو مود نشان می‌دهد که نتایج (حل پاسخ حالت ماندگار) یکسان بوده و گسسته سازی دو مود در این مساله کافی می‌باشد. بنابراین این تحلیل بروی روش گسسته سازی توسط یک مود و دو مود تمرکز دارد.

۴-۱- تشدید اصلی با گسسته سازی توسط یک مود

برای استفاده از روش گلرکین با یک مود پارامترهای وابسته بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v_n(x) U(t) \\ v(x, t) &= \psi_n(x) V(t) \\ w(x, t) &= \xi_n(x) W(t) \\ \phi(x, t) &= \zeta_n(x) \varphi(t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

^۱ Bookkeeping parameters

بطوریکه ν, ψ, ξ و ζ شکل مودهای بدست آمده از حل معادلات حرکت (۳۲-۳)-(۳۵-۳) در حالت خطی با توجه به شرایط مرزی در (۳۶-۳) بصورت زیر می‌باشند. n شماره مود است.

$$\begin{aligned}\nu_n &= \sqrt{2} \sin(n\pi x) \\ \psi_n &= \sqrt{2} \sin(n\pi x) \\ \xi_n &= \sqrt{2} \sin(n\pi x) \\ \zeta_n &= \sqrt{2} \cos(n\pi x)\end{aligned}\quad (۲-۴)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۱) در معادلات (۳۲-۳)-(۳۵-۳) و ضرب هر یک از معادلات با شکل مود متناظر خودش و بکارگیری رابطه تعامد مودها^۱ [۴۰] در نهایت معادلات حرکت گسسته شده بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\frac{3}{2}A_{11}V(t)^2\pi^4U(t) + \frac{3}{2}A_{11}W(t)^2\pi^4U(t) - A_{11}U(t)\pi^2 - \frac{d^2}{dt^2}U(t) = 0 \quad (۳-۴)$$

$$\begin{aligned}-\frac{3}{4}A_{11}W(t)^2\pi^4V(t) + \frac{3}{2}A_{11}V(t)\pi^4U(t)^2 - \frac{3}{4}A_{11}V(t)^3\pi^4 - D_{11}V(t)\pi^4 \\ -I_p\Omega\frac{d}{dt}W(t)\pi^2 - \frac{d^2}{dt^2}V(t) - c\frac{d}{dt}V(t) + \Omega^2e_2\cos(\Omega t) - \Omega^2e_1\sin(\Omega t) = 0\end{aligned}\quad (۴-۴)$$

$$\begin{aligned}-\frac{3}{4}A_{11}V(t)^2\pi^4W(t) + \frac{3}{2}A_{11}W(t)\pi^4U(t)^2 - \frac{3}{4}A_{11}W(t)^3\pi^4 - D_{11}W(t)\pi^4 \\ +I_p\Omega\frac{d}{dt}V(t)\pi^2 - \frac{d^2}{dt^2}W(t) - c\frac{d}{dt}W(t) + \Omega^2e_1\cos(\Omega t) + \Omega^2e_2\sin(\Omega t) = 0\end{aligned}\quad (۵-۴)$$

$$\frac{3}{2}D_{66}V(t)\pi^5W(t)U(t) - D_{66}\varphi(t)\pi^2 - \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = 0 \quad (۶-۴)$$

بطوریکه $e_1 = \int_0^1 [\sqrt{2}e_y(x)\sin(\pi x)]dx$ و $e_2 = \int_0^1 [\sqrt{2}e_x(x)\sin(\pi x)]dx$ در اینجا تحلیل برای مود اول انجام شده است، اگرچه برای مودهای دیگر هم روش به همین صورت می‌باشد.

حالا متغیرهای وابسته بصورت زیر بسط داده می‌شوند تا بتوان روش مقیاس‌های چندگانه را اعمال کرد

$$\begin{aligned}U(t) &= \varepsilon U_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 U_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 U_3(T_0, T_1, T_2) \\ V(t) &= \varepsilon V_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 V_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 V_3(T_0, T_1, T_2) \\ W(t) &= \varepsilon W_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 W_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 W_3(T_0, T_1, T_2) \\ \varphi(t) &= \varepsilon \varphi_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \varphi_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 \varphi_3(T_0, T_1, T_2)\end{aligned}\quad (۷-۴)$$

^۱ Orthogonality relation

بطوریکه $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t$ و $T_2 = \varepsilon^2 t$ مقیاس‌های مختلف هستند و ε پارامتری بعد کوچک ($\varepsilon \ll 1$) ساماندهی می‌باشد. میرایی c و پارامترهایی نامیزانی e_j ($j=1,2$) بصورت $c\varepsilon^2$ و $e_j\varepsilon^3$ مقیاس می‌شوند تا اثر آنها با اثرات غیرخطی مرتبه سه بالانس شود.

با استفاده از قانون مشتقات زنجیری، مشتق بر حسب عبارات T_0, T_1 و T_2 بصورت زیر می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 \\ \frac{\partial}{\partial t^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2\end{aligned}\quad (۸-۴)$$

که $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, (n=0,1,2)$ با جایگذاری روابط (۷-۴) و (۸-۴) در معادلات (۳-۴)-(۴-۶) و جدا کردن

ضرایب با توان‌های یکسان ε ، معادلات با مراتب مختلف ε بصورت زیر بدست می‌آیند.

$O(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\pi^2 A_{11} U_1(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U_1(T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ \pi^4 D_{11} V_1(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V_1(T_0, T_1, T_2) + \pi^2 \Omega_P \frac{\partial}{\partial T_0} W_1(T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ \pi^4 D_{11} W_1(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W_1(T_0, T_1, T_2) - \pi^2 \Omega_P \frac{\partial}{\partial T_0} V_1(T_0, T_1, T_2) &= 0 \\ \pi^2 D_{66} \phi_1(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \phi_1(T_0, T_1, T_2) &= 0\end{aligned}\quad (۹-۴)$$

$O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned}\pi^4 D_{11} V_2(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V_2(T_0, T_1, T_2) + \pi^2 \Omega_P \frac{\partial}{\partial T_0} W_2(T_0, T_1, T_2) &= \\ -2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} V_1(T_0, T_1, T_2) - \pi^2 \Omega_P \frac{\partial}{\partial T_1} W_1(T_0, T_1, T_2) & \\ \pi^4 D_{11} W_2(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W_2(T_0, T_1, T_2) - \pi^2 \Omega_P \frac{\partial}{\partial T_0} V_2(T_0, T_1, T_2) &= \\ -2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} W_1(T_0, T_1, T_2) + \pi^2 \Omega_P \frac{\partial}{\partial T_1} V_1(T_0, T_1, T_2) & \\ \pi^2 A_{11} U_2(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U_2(T_0, T_1, T_2) &= -2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} U_1(T_0, T_1, T_2) \\ \pi^2 D_{66} \phi_2(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \phi_2(T_0, T_1, T_2) &= -2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \phi_1(T_0, T_1, T_2)\end{aligned}\quad (۱۰-۴)$$

$$O(\varepsilon^3)$$

$$\begin{aligned} D_{11}\pi^4 V_3(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V_3(T_0, T_1, T_2) + I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} W_3(T_0, T_1, T_2) = -c \frac{\partial}{\partial T_0} V_1(T_0, T_1, T_2) + \\ A_{11}[\frac{3}{2}\pi^4 V_1(T_0, T_1, T_2) U_1(T_0, T_1, T_2)^2 - \frac{3}{4}\pi^4 V_1(T_0, T_1, T_2)^3 - \frac{3}{4}\pi^4 W_1(T_0, T_1, T_2)^2 V_1(T_0, T_1, T_2)] - \\ 2\frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} V_2(T_0, T_1, T_2) - 2\frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} V_1(T_0, T_1, T_2) - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} V_1(T_0, T_1, T_2) - I_p \Omega \pi^2 [\frac{\partial}{\partial T_1} W_2(T_0, T_1, T_2) + \\ \frac{\partial}{\partial T_2} W_1(T_0, T_1, T_2)] - \Omega^2 e_1 \sin(\Omega T_0) + \Omega^2 e_2 \cos(\Omega T_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11}\pi^4 W_3(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W_3(T_0, T_1, T_2) - I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} V_3(T_0, T_1, T_2) = -c \frac{\partial}{\partial T_0} W_1(T_0, T_1, T_2) + \\ A_{11}[\frac{3}{2}\pi^4 W_1(T_0, T_1, T_2) U_1(T_0, T_1, T_2)^2 - \frac{3}{4}\pi^4 W_1(T_0, T_1, T_2)^3 - \frac{3}{4}\pi^4 V_1(T_0, T_1, T_2)^2 W_1(T_0, T_1, T_2)] - \\ 2\frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} W_2(T_0, T_1, T_2) - 2\frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} W_1(T_0, T_1, T_2) - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} W_1(T_0, T_1, T_2) + I_p \Omega \pi^2 [\frac{\partial}{\partial T_1} V_2(T_0, T_1, T_2) + \\ \frac{\partial}{\partial T_2} V_1(T_0, T_1, T_2)] + \Omega^2 e_2 \sin(\Omega T_0) + \Omega^2 e_1 \cos(\Omega T_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11}\pi^2 U_3(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U_3(T_0, T_1, T_2) = A_{11}[\frac{3}{2}\pi^4 W_1(T_0, T_1, T_2)^2 U_1(T_0, T_1, T_2) + \\ \frac{3}{2}\pi^4 V_1(T_0, T_1, T_2)^2 U_1(T_0, T_1, T_2)] - 2\frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} U_2(T_0, T_1, T_2) - \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} U_1(T_0, T_1, T_2) \end{aligned} \quad (11-4)$$

$$\begin{aligned} D_{66}\pi^2 \varphi_3(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \varphi_3(T_0, T_1, T_2) = D_{66}[\frac{3}{2}\pi^4 V_1(T_0, T_1, T_2) W_1(T_0, T_1, T_2) U_1(T_0, T_1, T_2)] - \\ \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \varphi_1(T_0, T_1, T_2) - 2\frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} \varphi_2(T_0, T_1, T_2) - 2\frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} \varphi_1(T_0, T_1, T_2) \end{aligned}$$

حل عمومی معادله (۹-۴) را می‌توان بصورت زیر فرض کرد

$$\begin{aligned} V_1(T_0, T_1, T_2) = F_1(T_1, T_2) e^{\beta_f T_0 i} + F_2(T_1, T_2) e^{\beta_b T_0 i} + \bar{F}_1(T_1, T_2) e^{-\beta_f T_0 i} + \bar{F}_2(T_1, T_2) e^{-\beta_b T_0 i} \\ W_1(T_0, T_1, T_2) = \alpha i F_1(T_1, T_2) e^{\beta_f T_0 i} + \delta i F_2(T_1, T_2) e^{\beta_b T_0 i} - \alpha i \bar{F}_1(T_1, T_2) e^{-\beta_f T_0 i} - \delta i \bar{F}_2(T_1, T_2) e^{-\beta_b T_0 i} \\ U_1(T_0, T_1, T_2) = \frac{1}{2} H_1(T_1, T_2) e^{-\beta_b T_0 i} + \frac{1}{2} \bar{H}_1(T_1, T_2) e^{\beta_b T_0 i} \\ \varphi_1(T_0, T_1, T_2) = \frac{1}{2} G_1(T_1, T_2) e^{-\beta_b T_0 i} + \frac{1}{2} \bar{G}_1(T_1, T_2) e^{\beta_b T_0 i} \end{aligned} \quad (12-4)$$

که $F_i(T_1, T_2)$ ، $G_1(T_1, T_2)$ و $H_1(T_1, T_2)$ ، $(i=1,2)$ توابع مختلطی هستند که در مرتبه سوم تعیین می‌شوند. β_b و β_f فرکانس‌های خطی طبیعی پیش گشت و پس گشت متناظر با موده‌های خمشی هستند. شکل

پاسخ به علت وجود ترم ژيروسکوپی است. همچنین β_u و β_ϕ فرکانس‌های خطی طبیعی متناظر با مودهای محوری-پیچشی هستند و بصورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned}\beta_f &= -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\pi^8 I_p^2 \Omega^2 (I_p^2 \Omega^2 + 4D_{11})} + (4D_{11} + 2\pi^4 I_p^2 \Omega^2)} \\ \beta_b &= -\frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{\pi^8 I_p^2 \Omega^2 (I_p^2 \Omega^2 + 4D_{11})} + (4D_{11} + 2\pi^4 I_p^2 \Omega^2)} \\ \beta_u &= \pi\sqrt{A_{11}} \\ \beta_\phi &= \pi\sqrt{D_{66}}\end{aligned}\quad (۱۳-۴)$$

که α و δ ضرایبی هستند که بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{2}i \left(\frac{(-2\sqrt{\pi^8 I_p^2 \Omega^2 (I_p^2 \Omega^2 + 4D_{11})} + (-4D_{11} - 2\pi^4 I_p^2 \Omega^2))^{\frac{3}{2}}}{I_p \Omega \pi^6 D_{11}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi^4 (I_p^2 \Omega^2 + D_{11}) \sqrt{-2\sqrt{\pi^8 I_p^2 \Omega^2 (I_p^2 \Omega^2 + 4D_{11})} + (-4D_{11} - 2\pi^4 I_p^2 \Omega^2)}}{I_p \Omega \pi^6 D_{11}} \right) \\ \delta &= -\frac{1}{2}i \left(\frac{(2\sqrt{\pi^8 I_p^2 \Omega^2 (I_p^2 \Omega^2 + 4D_{11})} + (-4D_{11} - 2\pi^4 I_p^2 \Omega^2))^{\frac{3}{2}}}{I_p \Omega \pi^6 D_{11}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi^4 (I_p^2 \Omega^2 + D_{11}) \sqrt{2\sqrt{\pi^8 I_p^2 \Omega^2 (I_p^2 \Omega^2 + 4D_{11})} + (-4D_{11} - 2\pi^4 I_p^2 \Omega^2)}}{I_p \Omega \pi^6 D_{11}} \right)\end{aligned}\quad (۱۴-۴)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲-۴) در (۱۰-۴) بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
& \pi^4 D_{11} V_2(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V_2(T_0, T_1, T_2) + \pi^2 \Omega I_p \frac{\partial}{\partial T_0} W_2(T_0, T_1, T_2) = \\
& i(2\beta_f + I_p \Omega \pi^2 \alpha) \frac{\partial}{\partial T_1} F_1(T_1, T_2) e^{i\beta_f T_0} + i(2\beta_b + I_p \Omega \pi^2 \delta) \frac{\partial}{\partial T_1} F_2(T_1, T_2) e^{i\beta_b T_0} + cc \\
& \pi^4 D_{11} W_2(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W_2(T_0, T_1, T_2) - \pi^2 \Omega I_p \frac{\partial}{\partial T_0} V_2(T_0, T_1, T_2) = \\
& (2\alpha\beta_f + I_p \Omega \pi^2) \frac{\partial}{\partial T_1} F_1(T_1, T_2) e^{i\beta_f T_0} + (2\delta\beta_b + I_p \Omega \pi^2) \frac{\partial}{\partial T_1} F_2(T_1, T_2) e^{i\beta_b T_0} + cc \quad (15-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pi^2 A_{11} U_2(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U_2(T_0, T_1, T_2) = -\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \bar{H}_1(T_1, T_2) e^{i\beta_f T_0} + cc \\
& \pi^2 D_{66} \varphi_2(T_0, T_1, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \varphi_2(T_0, T_1, T_2) = -\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \bar{G}_1(T_1, T_2) e^{i\beta_b T_0} + cc
\end{aligned}$$

بطوریکه cc مربوط به عبارتهای مزدوج مختلط است. همانطور که معادله‌ی (۱۵-۴) نشان می‌دهد هیچ عبارت غیر سکولاری^۱ در این مرتبه وجود ندارد، بنابراین حل غیر همگن معادلات (۱۵-۴) نتیجه می‌دهد

$$U_2(T_0, T_1, T_2) = 0, V_2(T_0, T_1, T_2) = 0, W_2(T_0, T_1, T_2) = 0, \varphi_2(T_0, T_1, T_2) = 0 \quad (16-4)$$

برای ارضای شرایط حل پذیری عباراتی که عبارت سکولار ایجاد می‌کنند باید حذف شوند. برای بدست آوردن شرایط حل پذیری پاسخ دو معادله اول در رابطه (۱۵-۴) بصورت زیر فرض می‌شود [۳۷]

$$\begin{aligned}
V_2(T_0, T_1, T_2) &= F_{11}(T_1, T_2) e^{i\beta_f T_0} + F_{12}(T_1, T_2) e^{i\beta_b T_0} \\
W_2(T_0, T_1, T_2) &= F_{21}(T_1, T_2) e^{i\beta_f T_0} + F_{22}(T_1, T_2) e^{i\beta_b T_0} \quad (17-4)
\end{aligned}$$

با جایگذاری رابطه (۱۷-۴) در (۱۵-۴) و فاکتورگیری از عبارات $e^{i\beta_b T_0}$ و $e^{i\beta_f T_0}$ در دو طرف رابطه حاصل روابط زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned}
& [(\pi^4 D_{11} - \beta_f^2) F_{11}(T_1, T_2) + i I_p \Omega \pi^2 \beta_f F_{21}(T_1, T_2)] e^{i\beta_f T_0} = i(2\beta_f + I_p \Omega \pi^2 \alpha) \frac{\partial}{\partial T_1} F_1(T_1, T_2) e^{i\beta_f T_0} \\
& [(\pi^4 D_{11} - \beta_b^2) F_{12}(T_1, T_2) + i I_p \Omega \pi^2 \beta_b F_{22}(T_1, T_2)] e^{i\beta_b T_0} = i(2\beta_b + I_p \Omega \pi^2 \delta) \frac{\partial}{\partial T_1} F_2(T_1, T_2) e^{i\beta_b T_0} \\
& [-i I_p \Omega \pi^2 \beta_f F_{11}(T_1, T_2) + (\pi^4 D_{11} - \beta_f^2) F_{21}(T_1, T_2)] e^{i\beta_f T_0} = (2\alpha\beta_f + I_p \Omega \pi^2) \frac{\partial}{\partial T_1} F_1(T_1, T_2) e^{i\beta_f T_0} \\
& [-i I_p \Omega \pi^2 \beta_b F_{12}(T_1, T_2) + (\pi^4 D_{11} - \beta_b^2) F_{22}(T_1, T_2)] e^{i\beta_b T_0} = (2\delta\beta_b + I_p \Omega \pi^2) \frac{\partial}{\partial T_1} F_2(T_1, T_2) e^{i\beta_b T_0} \quad (18-4)
\end{aligned}$$

^۱ Non-secular terms

معادلات موجود در روابط (۴-۱۸) دو دستگاه معادلات جبری را تشکیل می‌دهند که تنها در صورتی جواب دارند که شرط زیر برقرار باشد

$$\begin{vmatrix} (\pi^4 D_{11} - \beta_f^2) & i(2\beta_f + I_p \Omega \pi^2 \alpha) \frac{\partial}{\partial T_1} F_1(T_1, T_2) \\ -iI_p \Omega \pi^2 \beta_f & (2\alpha\beta_f + I_p \Omega \pi^2) \frac{\partial}{\partial T_1} F_1(T_1, T_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (۴-۱۹)$$

$$\begin{vmatrix} (\pi^4 D_{11} - \beta_b^2) & i(2\beta_b + I_p \Omega \pi^2 \delta) \frac{\partial}{\partial T_1} F_2(T_1, T_2) \\ -iI_p \Omega \pi^2 \beta_f & (2\delta\beta_b + I_p \Omega \pi^2) \frac{\partial}{\partial T_1} F_2(T_1, T_2) \end{vmatrix} = 0$$

بنابراین شرایط حل پذیری برای مرتبه دوم بصورت زیر بدست می‌آید

$$[(\pi^4 D_{11} - \beta_f^2)(2\alpha\beta_f + I_p \Omega \pi^2) - I_p \Omega \pi^2 \beta_f (2\beta_f + I_p \Omega \pi^2 \alpha)] \frac{\partial}{\partial T_1} F_1(T_1, T_2) = 0 \quad (۴-۲۰)$$

$$[(\pi^4 D_{11} - \beta_b^2)(2\delta\beta_b + I_p \Omega \pi^2) - I_p \Omega \pi^2 \beta_f (2\beta_b + I_p \Omega \pi^2 \delta)] \frac{\partial}{\partial T_1} F_2(T_1, T_2) = 0$$

شرایط رابطه (۴-۲۰) نشان می‌دهد که $F_1(T_1, T_2)$ و $F_2(T_1, T_2)$ باید تنها تابعی از T_2 باشند. برای ارضای شرایط مرزی مربوط به دو معادله آخر در (۴-۱۵) ترم‌های سکولار آنها مستقیماً حذف می‌شوند. چون این دو معادله با یکدیگر کوپل نیستند و در نهایت شرایط بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \bar{H}_1(T_1, T_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial T_1} \bar{G}_1(T_1, T_2) = 0 \quad (۴-۲۱)$$

باز هم شرایط حل پذیری ایجاب می‌کند که $H_1(T_1, T_2)$ و $G_1(T_1, T_2)$ تنها تابعی از T_2 باشند. در نهایت رابطه (۴-۱۲) را بصورت زیر می‌توان نوشت

$$V_1(T_0, T_2) = F_1(T_2) e^{\beta_f T_0 i} + F_2(T_2) e^{\beta_b T_0 i} + \bar{F}_1(T_2) e^{-\beta_f T_0 i} + \bar{F}_2(T_2) e^{-\beta_b T_0 i}$$

$$W_1(T_0, T_2) = \alpha i F_1(T_2) e^{\beta_f T_0 i} + \delta i F_2(T_2) e^{\beta_b T_0 i} - \alpha i \bar{F}_1(T_2) e^{-\beta_f T_0 i} - \delta i \bar{F}_2(T_2) e^{-\beta_b T_0 i}$$

$$U_1(T_0, T_2) = \frac{1}{2} H_1(T_2) e^{-\beta_u T_0 i} + \frac{1}{2} \bar{H}_1(T_2) e^{\beta_u T_0 i} \quad (۴-۲۲)$$

$$\varphi_1(T_0, T_2) = \frac{1}{2} G_1(T_2) e^{-\beta_\phi T_0 i} + \frac{1}{2} \bar{G}_1(T_2) e^{\beta_\phi T_0 i}$$

در مرتبه سوم همانند مرتبه دوم عمل می‌شود تا شرایط حل پذیری بدست بیایند. برای اینکه نشان داده شود که فرکانس تحریک نزدیک فرکانس طبیعی است یک پارامتر نامیزانی^۱، σ ، بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\Omega = \beta_f + \varepsilon^2 \sigma \quad (23-4)$$

دوباره شرایط حل پذیری برای دو معادله اول رابطه (۴-۱۱) به علت وجود کوپلینگ ناشی از ترم ژيروسکوپی از طریق یک دستگاه معادلات بدست می‌آید. بنابراین فرض می‌شود

$$\begin{aligned} V_3(T_0, T_1, T_2) &= P_{11}(T_1, T_2)e^{i\beta_f T_0} + P_{12}(T_1, T_2)e^{i\beta_b T_0} \\ W_3(T_0, T_1, T_2) &= P_{21}(T_1, T_2)e^{i\beta_f T_0} + P_{22}(T_1, T_2)e^{i\beta_b T_0} \end{aligned} \quad (24-4)$$

با جایگذاری روابط (۴-۱۶)، (۴-۲۲)، (۴-۲۴) در (۴-۱۱) و فاکتورگیری از عبارات $e^{i\beta_b T_0}$ و $e^{i\beta_f T_0}$ در دو طرف رابطه حاصل، روابط زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} &[(\pi^4 D_{11} - \beta_f^2)P_{11}(T_1, T_2) + iI_p \Omega \pi^2 \beta_f P_{21}(T_1, T_2)]e^{i\beta_f T_0} = \\ &[A_{11}\pi^4(-(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\delta^2)F_1(T_2)F_2(T_2)\bar{F}_2(T_2) - (\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\alpha^2)F_1(T_2)^2\bar{F}_1(T_2) + \frac{3}{4}F_1(T_2)H_1(T_2)\bar{H}_1(T_2)) + \\ &i(-2\beta_f - I_p \Omega \pi^2 \alpha)\frac{d}{dT_2}F_1(T_2) - ic\beta_f F_1(T_2) + \frac{1}{2}\Omega^2(ie_1 + e_2)e^{i\sigma T_2}]e^{i\beta_f T_0} \\ &[(\pi^4 D_{11} - \beta_b^2)P_{12}(T_1, T_2) + iI_p \Omega \pi^2 \beta_b P_{22}(T_1, T_2)]e^{i\beta_b T_0} = \\ &[A_{11}\pi^4(-(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\alpha^2)F_1(T_2)F_2(T_2)\bar{F}_1(T_2) - (\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\delta^2)F_2(T_2)^2\bar{F}_2(T_2) + \\ &\frac{3}{4}F_2(T_2)H_1(T_2)\bar{H}_1(T_2)) + i(-2\beta_b + I_p \Omega \pi^2 \delta)\frac{d}{dT_2}F_2(T_2) - ic\beta_b F_2(T_2)]e^{i\beta_b T_0} \\ &[-iI_p \Omega \pi^2 \beta_f P_{11}(T_1, T_2) + (\pi^4 D_{11} - \beta_f^2)P_{21}(T_1, T_2)]e^{i\beta_f T_0} = \\ &[A_{11}i\pi^4(-(\frac{9}{2}\alpha\delta^2 + \frac{3}{2}\alpha)F_1(T_2)F_2(T_2)\bar{F}_2(T_2) - (\frac{9}{4}\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha)F_1(T_2)^2\bar{F}_1(T_2) + c\alpha\beta_f F_1(T_2) + \\ &(2\alpha\beta_f + I_p \Omega \pi^2)\frac{d}{dT_2}F_1(T_2) + \frac{3}{4}\alpha F_1(T_2)H_1(T_2)\bar{H}_1(T_2)) + \frac{1}{2}\Omega^2(e_1 - ie_2)e^{i\sigma T_2}]e^{i\beta_f T_0} \\ &[-iI_p \Omega \pi^2 \beta_b P_{12}(T_1, T_2) + (\pi^4 D_{11} - \beta_b^2)P_{22}(T_1, T_2)]e^{i\beta_b T_0} = \\ &[A_{11}i\pi^4(-(\frac{9}{2}\alpha^2\delta + \frac{3}{2}\delta)F_1(T_2)F_2(T_2)\bar{F}_1(T_2) - (\frac{9}{4}\delta^3 + \frac{3}{4}\delta)F_2(T_2)^2\bar{F}_2(T_2) + \\ &\frac{3}{4}\delta F_2(T_2)H_1(T_2)\bar{H}_1(T_2)) + (2\delta\beta_f + I_p \Omega \pi^2)\frac{d}{dT_2}F_2(T_2) + c\delta\beta_b F_2(T_2)]e^{i\beta_b T_0} \end{aligned} \quad (25-4)$$

شرایط حل پذیری بصورت زیر بدست می‌آیند

^۱ Detuning parameters

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{l} (\pi^4 D_{11} - \beta_f^2) A_{11} \pi^4 \left(-\left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \delta^2 \right) F_1(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_2(T_2) - \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4} \alpha^2 \right) F_1(T_2)^2 \bar{F}_1(T_2) + \right. \\ \left. \frac{3}{4} F_1(T_2) H_1(T_2) \bar{H}_1(T_2) \right) + i(-2\beta_f - I_p \Omega \pi^2 \alpha) \frac{d}{dT_2} F_1(T_2) - ic \beta_f F_1(T_2) + \frac{1}{2} \Omega^2 (ie_1 + e_2) e^{i\sigma T_2} \\ -i I_p \Omega \pi^2 \beta_f A_{11} i \pi^4 \left(-\left(\frac{9}{2} \alpha \delta^2 + \frac{3}{2} \alpha \right) F_1(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_2(T_2) - \left(\frac{9}{4} \alpha^3 + \frac{3}{4} \alpha \right) F_1(T_2)^2 \bar{F}_1(T_2) + \right. \\ \left. \frac{3}{4} \alpha F_1(T_2) H_1(T_2) \bar{H}_1(T_2) \right) + (2\alpha \beta_f + I_p \Omega \pi^2) \frac{d}{dT_2} F_1(T_2) + c \alpha \beta_f F_1(T_2) \end{array} \right| = 0 \\
& \hspace{15cm} (26-4) \\
& \left| \begin{array}{l} (\pi^4 D_{11} - \beta_b^2) A_{11} \pi^4 \left(-\left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \alpha^2 \right) F_1(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_1(T_2) - \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4} \delta^2 \right) F_2(T_2)^2 \bar{F}_2(T_2) + \right. \\ \left. \frac{3}{4} F_2(T_2) H_1(T_2) \bar{H}_1(T_2) \right) + i(-2\beta_b + I_p \Omega \pi^2 \delta) \frac{d}{dT_2} F_2(T_2) - ic \beta_b F_2(T_2) + \frac{1}{2} \Omega^2 (e_1 - ie_2) e^{i\sigma T_2} \\ -i I_p \Omega \pi^2 \beta_b A_{11} i \pi^4 \left(-\left(\frac{9}{2} \alpha^2 \delta + \frac{3}{2} \delta \right) F_1(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_1(T_2) - \left(\frac{9}{4} \delta^3 + \frac{3}{4} \delta \right) F_2(T_2)^2 \bar{F}_2(T_2) + \right. \\ \left. \frac{3}{4} \delta F_2(T_2) H_1(T_2) \bar{H}_1(T_2) \right) + (2\delta \beta_b + I_p \Omega \pi^2) \frac{d}{dT_2} F_2(T_2) + c \delta \beta_b F_2(T_2) \end{array} \right| = 0
\end{aligned}$$

که در نهایت می‌توان بصورت زیر آن را بازنویسی کرد

$$\begin{aligned}
& i \Gamma_1 F_1(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_2(T_2) + i \Lambda_1 F_1(T_2)^2 \bar{F}_1(T_2) + i \Psi_1 F_1(T_2) H_1(T_2) \bar{H}_1(T_2) + \Phi_1 D_2 F_1(T_2) + \\
& \left(-\pi^4 D_{11} \alpha \beta_1 + \beta_1^3 \alpha - \beta_1^2 I_p \Omega \pi^2 \right) c F_1(T_2) + \\
& 1/2 \left(-\beta_1^2 - I_p \pi^2 \Omega \beta_1 + \pi^4 D_{11} \right) e^{i\sigma T_2} (-e_1 + ie_2) \Omega^2 = 0 \hspace{10cm} (27-4) \\
& i \Gamma_2 F_2(T_2) F_1(T_2) \bar{F}_1(T_2) + i \Lambda_2 F_2(T_2)^2 \bar{F}_2(T_2) + i \Psi_2 F_2(T_2) H_1(T_2) \bar{H}_1(T_2) + \Phi_2 D_2 F_2(T_2) + \\
& \left(-\beta_2^2 I_p \Omega \pi^2 - \pi^4 D_{11} \delta \beta_2 + \beta_2^3 \delta \right) c F_2(T_2) = 0
\end{aligned}$$

بطوریکه $\Gamma_i, \Lambda_i, \Psi_i, \Phi_i, (i=1,2)$ ضرایبی هستند که در پیوست بطور کامل آورده شده‌اند. برای دو معادله آخر (۴-۱۱) باز هم شرایط حل پذیری از طریق جایگذاری روابط (۴-۱۶) و (۴-۲۲) و حذف ترم‌های سکولار به طور مستقیم بدست می‌آیند

$$\begin{aligned}
& X F_2(T_2) \bar{F}_2(T_2) \bar{H}_1(T_2) + \Delta F_1(T_2) \bar{F}_1(T_2) \bar{H}_1(T_2) - i \beta_3 D_2 \bar{H}_1(T_2) = 0 \\
& -i \beta_4 D_2 \bar{G}_1(T_2) = 0 \hspace{10cm} (28-4)
\end{aligned}$$

بطوریکه

$$X = \left(1 + \delta^2 \right) \frac{3}{2} \pi^4 A_{11} \quad \Delta = \left(1 + \alpha^2 \right) \frac{3}{2} \pi^4 A_{11} \hspace{10cm} (29-4)$$

از معادله دوم در رابطه (۴-۲۸) مشاهده می‌شود که پاسخ حالت ماندگار متناظر با \bar{G}_1 صفر است. پس بنابراین توابع مقدار مختلط $F_1(T_2), F_2(T_2)$ و $H_1(T_2)$ بصورت قطبی زیر فرض می‌شوند

$$F_1(T_2) = \frac{1}{2} a_{f1}(T_2) e^{i\theta_{f1}(T_2)}, \quad F_2(T_2) = \frac{1}{2} a_{f2}(T_2) e^{i\theta_{f2}(T_2)}, \quad H_1(T_2) = \frac{1}{2} a_{h1}(T_2) e^{i\theta_{h1}(T_2)} \hspace{1cm} (30-4)$$

که مقادیر حقیقی $a_i(T_2)$ و $\theta_i(T_2)$ ، $(i = f, 1, 2, h1)$ به ترتیب دامنه و زاویه فاز پاسخ هستند. با جایگذاری رابطه (۴-۳۰) در رابطه (۴-۲۷) و معادله اول رابطه (۴-۲۸) و جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی، معادلات زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\pi^4 D_{11} \beta_1 - \beta_1^2 I_p \Omega \pi^2 - \beta_1^3) c a_{f1} + \frac{1}{2} \Phi_1 D_2 a_{f1} = \\ & \frac{1}{2} \Omega^2 (e_2 \sin(\gamma_1) - \cos(\gamma_1) e_1) (-\beta_1^2 - I_p \pi^2 \Omega \beta_1 + \pi^4 D_{11}) \end{aligned} \quad (۴-۳۱)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} a_{f1} (\Gamma_1 a_{f2}^2 + \Psi_1 a_{h1}^2 + 4 \Phi_1 \sigma + a_{f1}^2 \Lambda_1) = \\ & \frac{1}{2} \Omega^2 (e_1 \sin(\gamma_1) + \cos(\gamma_1) e_2) (-\beta_1^2 - I_p \pi^2 \Omega \beta_1 + \pi^4 D_{11}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} \Gamma_2 a_{f2} a_{f1}^2 + \frac{1}{8} \Lambda_2 a_{f2}^3 + \frac{1}{8} \Psi_2 a_{f2} a_{h1}^2 + \frac{1}{2} a_{f2} \Phi_2 \sigma = 0$$

$$\frac{1}{2} \Phi_2 D_2 a_{f2} + \frac{1}{2} c a_{f2} (-\pi^4 D_{11} \beta_2 + \beta_2^3 - \beta_2^2 I_p \Omega \pi^2) = 0$$

$$\frac{1}{8} X a_{f2}^2 a_{h1} + \frac{1}{8} \Delta a_{f1}^2 a_{h1} - \frac{1}{2} \beta_3 a_{h1} D_2 \theta_{h1} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \beta_3 D_2 a_{h1} = 0$$

که $\gamma_i = \sigma_i T_2 - \theta_i, (i = 1, 2)$ برای تحلیل و بررسی پاسخ حالت ماندگار، مشتقات زمانی در رابطه (۴-۳۱) برابر صفر قرار داده می‌شوند که موجب می‌شود $a_{f2}(T_2) = 0$ و $a_{h1}(T_2) = 0$ که بدین معنی است که نیروی نابالانسی، مودهای محوری و لرزشی پس گشت را تحریک نمی‌کند؛ بنابراین در این مرحله حذف می‌شوند. با جایگذاری $a_{f2}(T_2) = 0$ و $a_{h1}(T_2) = 0$ در معادلات (۴-۳۱) و حذف γ بین معادلات باقی مانده رابطه نهایی زیر بدست می‌آید

$$\lambda_1 a_{f1}^6 + \lambda_2 a_{f1}^4 + \lambda_3 a_{f1}^2 = \frac{1}{4} \Omega^4 e_i^2 (-\beta_1^2 - I_p \pi^2 \Omega \beta_1 + \pi^4 D_{11})^2 \quad (۴-۳۲)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{64} \Lambda_1^2 \\
\lambda_2 &= \frac{1}{8} \Phi_1 \sigma \Lambda_1 \\
\lambda_3 &= \frac{1}{4} c^2 \beta_1^6 \alpha^2 - \frac{1}{2} c^2 \beta_1^4 \alpha^2 \pi^4 D_{11} - \frac{1}{2} c^2 \beta_1^5 \alpha I_p \Omega \pi^2 + \frac{1}{4} c^2 \pi^8 D_{11}^2 \alpha^2 \beta_1^2 + \\
&\quad \frac{1}{2} c^2 \pi^6 D_{11} \alpha \beta_1^3 I_p \Omega + \frac{1}{4} c^2 \beta_1^4 I_p^2 \Omega^2 \pi^4 + \frac{1}{4} \Phi_1^2 \sigma^2 \\
e_t &= \sqrt{e_1^2 + e_2^2}
\end{aligned} \tag{۳۳-۴}$$

رابطه (۳۲-۴) در واقع یک رابطه‌ی تحلیلی است که تغییرات دامنه را بر حسب تغییرات پارامترهای دیگر مثل پارامتر نامیزانی، ضریب میرایی و پارامترهای دیگر بیان می‌کند.

۴-۲- تشدید اصلی با گسسته سازی توسط دو مود

در این بخش روش مقیاس‌های چندگانه مثل بخش قبل به معادلات حاکم اعمال می‌شود با این تفاوت که در این بخش گسسته سازی توسط دو مود صورت می‌گیرد، پس بنابراین فرآیند اصلی مشابه بخش قبل است.

با استفاده از روابط (۱-۴) و (۲-۴) و بسط دادن برای دو مود بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= U_1(t) \sqrt{2} \sin(\pi x) + U_2(t) \sqrt{2} \sin(2\pi x) \\
v(x, t) &= V_1(t) \sqrt{2} \sin(\pi x) + V_2(t) \sqrt{2} \sin(2\pi x) \\
w(x, t) &= W_1(t) \sqrt{2} \sin(\pi x) + W_2(t) \sqrt{2} \sin(2\pi x) \\
\phi(x, t) &= \phi_1(t) \sqrt{2} \cos(\pi x) + \phi_2(t) \sqrt{2} \cos(2\pi x)
\end{aligned} \tag{۳۴-۴}$$

باز هم با استفاده از رابطه (۳۴-۴) و رابطه تعامد مودها، معادلات گسسته شده زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} U_1(t) - \frac{32}{3} B_{16} \phi_2(t) \pi - A_{11} [\sqrt{2} V_1(t) \pi^3 V_2(t) + \sqrt{2} W_1(t) \pi^3 W_2(t) + U_1(t) \pi^2 - \\
&8 V_1(t) \pi^4 V_2(t) U_2(t) - 8 W_1(t) \pi^4 W_2(t) U_2(t) - 4 (V_2(t))^2 \pi^4 U_1(t) - \\
&\frac{3}{2} (V_1(t))^2 \pi^4 U_1(t) - 4 (W_2(t))^2 \pi^4 U_1(t) - \frac{3}{2} (W_1(t))^2 \pi^4 U_1(t)] = 0
\end{aligned} \tag{۳۵-۴}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} U 2(t) + \frac{16}{3} B_{16} P 1(t) \pi - A_{11} [4(W 1(t))^2 \pi^4 U 2(t) - 8W 1(t) \pi^4 W 2(t) U 1(t) - \\
& 24(W 2(t))^2 \pi^4 U 2(t) - 4(V 1(t))^2 \pi^4 U 2(t) + \frac{1}{2} \sqrt{2} (V 1(t))^2 \pi^3 - \\
& 8V 1(t) \pi^4 V 2(t) U 1(t) + \frac{1}{2} \sqrt{2} (W 1(t))^2 \pi^3 + 4U 2(t) \pi^2 - 24(V 2(t))^2 \pi^4 U 2(t)] = 0 \\
& A_{11} [\sqrt{2} V 2(t) \pi^3 U 1(t) + 6V 1(t) \pi^4 (V 2(t))^2 + \sqrt{2} V 1(t) \pi^3 U 2(t) + 2(W 2(t))^2 \pi^4 V 1(t) - \\
& 8V 2(t) \pi^4 U 1(t) U 2(t) - \frac{3}{2} V 1(t) \pi^4 (U 1(t))^2 - 4V 1(t) \pi^4 (U 2(t))^2 + \frac{3}{4} (V 1(t))^3 \pi^4 + \\
& \frac{3}{4} (W 1(t))^2 \pi^4 V 1(t) + 4W 1(t) \pi^4 V 2(t) W 2(t)] + I_p \Omega \pi^2 \left(\frac{d}{dt} W 1(t) \right) + D_{11} V 1(t) \pi^4 + \\
& c \frac{d}{dt} V 1(t) + \frac{d^2}{dt^2} V 1(t) = \Omega^2 [e_2 \cos(\Omega t) - e_1 \sin(\Omega t)] \quad (36-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{11} [12(W 2(t))^2 \pi^4 V 2(t) - 24V 2(t) \pi^4 (U 2(t))^2 + 4W 1(t) \pi^4 V 1(t) W 2(t) + 6(V 1(t))^2 \pi^4 V 2(t) - \\
& 8V 1(t) \pi^4 U 2(t) U 1(t) + 12(V 2(t))^3 \pi^4 + \sqrt{2} V 1(t) \pi^3 U 1(t) - 4V 2(t) \pi^4 (U 1(t))^2 + \\
& 2(W 1(t))^2 \pi^4 V 2(t)] + 16D_{11} V 2(t) \pi^4 + c \frac{d}{dt} V 2(t) + \frac{d^2}{dt^2} V 2(t) + 4I_p \Omega \pi^2 \left(\frac{d}{dt} W 2(t) \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{11} [\frac{3}{4} \pi^4 W 1(t) (V 1(t))^2 + 6\pi^4 W 1(t) (W 2(t))^2 + 2\pi^4 W 1(t) (V 2(t))^2 - \frac{3}{2} \pi^4 W 1(t) (U 1(t))^2 - \\
& 4\pi^4 W 1(t) (U 2(t))^2 + 4\pi^4 W 2(t) V 1(t) V 2(t) + \sqrt{2} \pi^3 W 2(t) U 1(t) + \sqrt{2} \pi^3 W 1(t) U 2(t) - \\
& 8\pi^4 W 2(t) U 2(t) U 1(t) + \frac{3}{4} \pi^4 (W 1(t))^3] - \Omega I_p \pi^2 \left(\frac{d}{dt} V 1(t) \right) + D_{11} \pi^4 W 1(t) + c \frac{d}{dt} W 1(t) + \\
& \frac{d^2}{dt^2} W 1(t) = \Omega^2 e_1 \cos(\Omega t) + \Omega^2 e_2 \sin(\Omega t) \quad (37-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{11} [-4W 2(t) \pi^4 (U 1(t))^2 + 6(W 1(t))^2 \pi^4 W 2(t) + 12(W 2(t))^3 \pi^4 + \sqrt{2} W 1(t) \pi^3 U 1(t) - \\
& 8W 1(t) \pi^4 U 1(t) U 2(t) - 24W 2(t) \pi^4 (U 2(t))^2 + 4W 1(t) \pi^4 V 2(t) V 1(t) + 2W 2(t) \pi^4 (V 1(t))^2 + \\
& 12W 2(t) \pi^4 (V 2(t))^2] + c \frac{d}{dt} W 2(t) + 16D_{11} W 2(t) \pi^4 - 4\Omega I_{pp} \left(\frac{d}{dt} V 2(t) \right) \pi^2 + \frac{d^2}{dt^2} W 2(t) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{66} [-8\pi^5 W 2(t) V 1(t) U 2(t) - 4\pi^5 W 2(t) V 2(t) U 1(t) + \phi 1(t) \pi^2 - \pi^4 \sqrt{2} V 1(t) W 2(t) + \\
& 2\pi^4 \sqrt{2} V 2(t) W 1(t) - \frac{3}{2} \pi^5 W 1(t) V 1(t) U 1(t)] + \frac{64}{3} \pi B_{16} U 2(t) + \frac{d^2}{dt^2} \phi 1(t) = 0 \quad (38-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_{66} [-48\pi^5 W 2(t) V 2(t) U 2(t) - 8\pi^5 U 2(t) V 1(t) W 1(t) + 4\pi^2 \phi 2(t) + \\
& \pi^4 \sqrt{2} V 1(t) W 1(t) - 16\pi^5 U 1(t) V 2(t) W 1(t)] + \frac{d^2}{dt^2} \phi 2(t) - \frac{8}{3} \pi B_{16} U 1(t) = 0
\end{aligned}$$

با بسط متغیرهای وابسته به فرم زیر

$$\begin{aligned}
U_i(T_0, T_2) &= \varepsilon U_{i1}(T_0, T_2) + \varepsilon^2 U_{i2}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 U_{i3}(T_0, T_2) \\
V_i(T_0, T_2) &= \varepsilon V_{i1}(T_0, T_2) + \varepsilon^2 V_{i2}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 V_{i3}(T_0, T_2) \\
W_i(T_0, T_2) &= \varepsilon W_{i1}(T_0, T_2) + \varepsilon^2 W_{i2}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 W_{i3}(T_0, T_2) \quad (i=1,2) \\
\phi_i(T_0, T_2) &= \varepsilon \phi_{i1}(T_0, T_2) + \varepsilon^2 \phi_{i2}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 \phi_{i3}(T_0, T_2)
\end{aligned} \tag{۳۹-۴}$$

و با استفاده از مشتق زنجیری (یعنی رابطه (۴-۱)) برای روابط (۴-۳۵)-(۴-۳۸) و جدا کردن ضریب با توان یکسان ε معادلات در مراتب مختلف بصورت زیر بدست می آیند

$$O(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U_{11}(T_0, T_2) + A_{11} \pi^2 U_{11}(T_0, T_2) - \frac{32}{3} B_{16} \pi \phi_{21}(T_0, T_2) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U_{21}(T_0, T_2) + 4A_{11} \pi^2 U_{21}(T_0, T_2) + \frac{16}{3} B_{16} \pi \phi_{11}(T_0, T_2) &= 0
\end{aligned} \tag{۴۰-۴}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V_{11}(T_0, T_2) + D_{11} \pi^4 V_{11}(T_0, T_2) + I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} W_{11}(T_0, T_2) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V_{21}(T_0, T_2) + 16D_{11} \pi^4 V_{21}(T_0, T_2) + 4I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} W_{21}(T_0, T_2) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W_{11}(T_0, T_2) + D_{11} \pi^4 W_{11}(T_0, T_2) - I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} V_{11}(T_0, T_2) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W_{21}(T_0, T_2) + 16D_{11} \pi^4 W_{21}(T_0, T_2) - 4I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} V_{21}(T_0, T_2) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \phi_{11}(T_0, T_2) + D_{66} \pi^2 \phi_{11}(T_0, T_2) + \frac{64}{3} B_{16} \pi U_{21}(T_0, T_2) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \phi_{21}(T_0, T_2) + 4D_{66} \pi^2 \phi_{21}(T_0, T_2) - \frac{8}{3} B_{16} \pi U_{11}(T_0, T_2) &= 0
\end{aligned}$$

$$O(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U 1_2(T_0, T_2) - \frac{32}{3} B_{16} \pi \varphi 2_2(T_0, T_2) + A_{11} \pi^2 U 1_2(T_0, T_2) = \\ & -\sqrt{2} A_{11} \pi^3 [W 1_1(T_0, T_2) W 2_1(T_0, T_2) + V 1_1(T_0, T_2) V 2_1(T_0, T_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U 2_2(T_0, T_2) + \frac{16}{3} B_{16} \pi \varphi 1_2(T_0, T_2) + 4 A_{11} \pi^2 U 2_2(T_0, T_2) = \\ & -\frac{1}{2} \sqrt{2} A_{11} \pi^3 [(W 1_1(T_0, T_2))^2 + (V 1_1(T_0, T_2))^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V 1_2(T_0, T_2) + D_{11} \pi^4 V 1_2(T_0, T_2) + I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} W 1_2(T_0, T_2) = \\ & -\sqrt{2} A_{11} \pi^3 [V 1_1(T_0, T_2) U 2_1(T_0, T_2) + V 2_1(T_0, T_2) U 1_1(T_0, T_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V 2_2(T_0, T_2) + 16 D_{11} \pi^4 V 2_2(T_0, T_2) + 4 I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} W 2_2(T_0, T_2) = \\ & -\sqrt{2} A_{11} \pi^3 V 1_1(T_0, T_2) U 1_1(T_0, T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W 1_2(T_0, T_2) + D_{11} \pi^4 W 1_2(T_0, T_2) - I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} V 1_2(T_0, T_2) = \\ & -\sqrt{2} A_{11} \pi^3 [W 2_1(T_0, T_2) U 1_1(T_0, T_2) + W 1_1(T_0, T_2) U 2_1(T_0, T_2)] \end{aligned} \quad (41-4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W 2_2(T_0, T_2) + 16 D_{11} \pi^4 W 2_2(T_0, T_2) - 4 I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} V 2_2(T_0, T_2) = \\ & \sqrt{2} A_{11} \pi^3 W 1_1(T_0, T_2) U 1_1(T_0, T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \varphi 1_2(T_0, T_2) + \frac{64}{3} B_{16} \pi U 2_2(T_0, T_2) + D_{66} \pi^2 \varphi 1_2(T_0, T_2) = \\ & \sqrt{2} D_{66} \pi^4 [W 2_1(T_0, T_2) V 1_1(T_0, T_2) - 2 W 1_1(T_0, T_2) V 2_1(T_0, T_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} P 2_2(T_0, T_2) - \frac{8}{3} B_{16} \pi U 1_2(T_0, T_2) + 4 D_{66} \pi^2 P 2_2(T_0, T_2) = \\ & -\sqrt{2} D_{66} \pi^4 W 1_1(T_0, T_2) V 1_1(T_0, T_2) \end{aligned}$$

$O(\varepsilon^3)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U_{13}(T_0, T_2) + A_{11} \pi^2 U_{13}(T_0, T_2) - \frac{32}{3} B_{16} \pi P_{23}(T_0, T_2) = \frac{3}{2} A_{11} \pi^3 \{ \pi [(V_{11}(T_0, T_2))^2 U_{11}(T_0, T_2) + \\ \frac{3}{2} (W_{11}(T_0, T_2))^2 U_{11}(T_0, T_2) + 4 (W_{21}(T_0, T_2))^2 U_{11}(T_0, T_2) + 8 W_{11}(T_0, T_2) W_{21}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) + \\ 8 V_{11}(T_0, T_2) V_{21}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) + 4 (V_{21}(T_0, T_2))^2 U_{11}(T_0, T_2)] - \sqrt{2} W_{11}(T_0, T_2) W_{22}(T_0, T_2) - \\ \sqrt{2} W_{12}(T_0, T_2) W_{21}(T_0, T_2) - \sqrt{2} V_{12}(T_0, T_2) V_{21}(T_0, T_2) - \sqrt{2} V_{11}(T_0, T_2) V_{22}(T_0, T_2) \} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} U_{11}(T_0, T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} U_{23}(T_0, T_2) + \frac{16}{3} B_{16} \pi P_{13}(T_0, T_2) + 4 A_{11} \pi^2 U_{23}(T_0, T_2) = 4 A_{11} \pi^3 \{ \pi [(W_{11}(T_0, T_2))^2 U_{21}(T_0, T_2) + \\ 24 (W_{21}(T_0, T_2))^2 U_{21}(T_0, T_2) + 8 W_{11}(T_0, T_2) W_{21}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) + 4 (V_{11}(T_0, T_2))^2 U_{21}(T_0, T_2) + \\ 24 (V_{21}(T_0, T_2))^2 U_{21}(T_0, T_2) + 8 V_{11}(T_0, T_2) V_{21}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2)] - \sqrt{2} W_{11}(T_0, T_2) V_{12}(T_0, T_2) - \\ \sqrt{2} W_{11}(T_0, T_2) W_{12}(T_0, T_2) \} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} U_{21}(T_0, T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11} \pi^4 V_{13}(T_0, T_2) + I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} W_{13}(T_0, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V_{13}(T_0, T_2) = 6 A_{11} \pi^3 \{ \pi [- (V_{21}(T_0, T_2))^2 V_{11}(T_0, T_2) + \\ \frac{3}{2} V_{11}(T_0, T_2) (U_{11}(T_0, T_2))^2 - \frac{3}{4} (V_{11}(T_0, T_2))^3 + 8 V_{21}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) - \\ 4 W_{21}(T_0, T_2) V_{21}(T_0, T_2) W_{11}(T_0, T_2) + 4 W_{11}(T_0, T_2) (U_{21}(T_0, T_2))^2 - 2 (W_{21}(T_0, T_2))^2 V_{11}(T_0, T_2) - \\ \frac{3}{4} (W_{11}(T_0, T_2))^2 V_{11}(T_0, T_2)] - \sqrt{2} V_{22}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) - \sqrt{2} V_{12}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) - \\ \sqrt{2} V_{11}(T_0, T_2) U_{22}(T_0, T_2) - \sqrt{2} V_{21}(T_0, T_2) U_{12}(T_0, T_2) \} + \Omega^2 [-e_1 \sin(\Omega T_0) + e_2 \cos(\Omega T_0)] - \\ c \frac{\partial}{\partial T_0} V_{11}(T_0, T_2) - I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_2} W_{11}(T_0, T_2) - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} V_{11}(T_0, T_2) \end{aligned}$$

(۴۲-۴)

$$\begin{aligned} -16 D_{11} \pi^4 V_{23}(T_0, T_2) + 4 I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} W_{23}(T_0, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} V_{23}(T_0, T_2) = 12 A_{11} \pi^3 \{ \pi [- (V_{21}(T_0, T_2))^3 + \\ 24 V_{21}(T_0, T_2) (U_{21}(T_0, T_2))^2 - 4 W_{11}(T_0, T_2) V_{11}(T_0, T_2) W_{21}(T_0, T_2) - 6 (V_{11}(T_0, T_2))^2 V_{21}(T_0, T_2) + \\ 8 V_{11}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) - 12 (W_{21}(T_0, T_2))^2 V_{21}(T_0, T_2) + 4 V_{21}(T_0, T_2) (U_{11}(T_0, T_2))^2 - \\ 2 (W_{11}(T_0, T_2))^2 V_{21}(T_0, T_2)] - \sqrt{2} V_{12}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) - \sqrt{2} V_{11}(T_0, T_2) U_{12}(T_0, T_2) \} - \\ 4 I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_2} W_{21}(T_0, T_2) - c \frac{\partial}{\partial T_0} V_{21}(T_0, T_2) - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} V_{21}(T_0, T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} V_{13}(T_0, T_2) + D_{11} \pi^4 W_{13}(T_0, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W_{13}(T_0, T_2) = A_{11} \pi^3 \left\{ \pi \left[-\frac{3}{4} (W_{11}(T_0, T_2))^3 \right. \right. \\
& + \frac{3}{2} W_{11}(T_0, T_2) (U_{11}(T_0, T_2))^2 + 8 W_{21}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) - 2 W_{11}(T_0, T_2) (V_{21}(T_0, T_2))^2 \\
& - 4 W_{21}(T_0, T_2) V_{11}(T_0, T_2) V_{21}(T_0, T_2) + 4 W_{11}(T_0, T_2) (U_{21}(T_0, T_2))^2 - \frac{3}{4} W_{11}(T_0, T_2) (V_{11}(T_0, T_2))^2 \\
& - 6 (W_{21}(T_0, T_2))^2 W_{11}(T_0, T_2)] - \sqrt{2} W_{22}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) - \sqrt{2} W_{12}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) \\
& - \sqrt{2} W_{21}(T_0, T_2) U_{12}(T_0, T_2) - \sqrt{2} W_{11}(T_0, T_2) U_{22}(T_0, T_2) \} - c \frac{\partial}{\partial T_0} W_{11}(T_0, T_2) + I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_2} V_{11}(T_0, T_2) \\
& - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} W_{11}(T_0, T_2) + \Omega^2 [e_1 \cos(\Omega T_0) + e_2 \sin(\Omega T_0)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16 D_{11} \pi^4 W_{23}(T_0, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} W_{23}(T_0, T_2) - 4 I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_0} V_{23}(T_0, T_2) = A_{11} \pi^3 \left\{ \pi [-12 (W_{21}(T_0, T_2))^3 \right. \\
& - 2 W_{21}(T_0, T_2) (V_{11}(T_0, T_2))^2 + 4 W_{21}(T_0, T_2) (U_{11}(T_0, T_2))^2 + 8 W_{11}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) \\
& + 24 W_{21}(T_0, T_2) (U_{21}(T_0, T_2))^2 - 6 (W_{11}(T_0, T_2))^2 W_{21}(T_0, T_2) - 12 W_{21}(T_0, T_2) (V_{21}(T_0, T_2))^2 \\
& - 4 W_{11}(T_0, T_2) V_{21}(T_0, T_2) V_{11}(T_0, T_2)] - \sqrt{2} W_{12}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) - \sqrt{2} W_{11}(T_0, T_2) U_{12}(T_0, T_2) \} \\
& + 4 I_p \Omega \pi^2 \frac{\partial}{\partial T_2} V_{21}(T_0, T_2) - c \frac{\partial}{\partial T_0} W_{21}(T_0, T_2) - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} W_{21}(T_0, T_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{64}{3} B_{16} \pi U_{23}(T_0, T_2) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} P_{13}(T_0, T_2) + D_{66} \pi^2 P_{13}(T_0, T_2) = D_{66} \pi^4 \{ -2 \sqrt{2} W_{11}(T_0, T_2) V_{22}(T_0, T_2) \\
& + \sqrt{2} W_{21}(T_0, T_2) V_{12}(T_0, T_2) - 2 \sqrt{2} W_{12}(T_0, T_2) V_{21}(T_0, T_2) + \sqrt{2} W_{22}(T_0, T_2) V_{11}(T_0, T_2) \\
& + \pi [\frac{3}{2} V_{11}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) W_{11}(T_0, T_2) + 8 V_{11}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) W_{21}(T_0, T_2) \\
& + 4 V_{21}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) W_{21}(T_0, T_2)] \} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} P_{11}(T_0, T_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} P_{23}(T_0, T_2) + 4 D_{66} \pi^2 P_{23}(T_0, T_2) - \frac{8}{3} B_{16} \pi U_{13}(T_0, T_2) = D_{66} \pi^4 \{ -\sqrt{2} W_{11}(T_0, T_2) V_{12}(T_0, T_2) \\
& - \sqrt{2} W_{12}(T_0, T_2) V_{11}(T_0, T_2) + \pi [48 V_{21}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) W_{21}(T_0, T_2) \\
& + 16 V_{21}(T_0, T_2) U_{11}(T_0, T_2) W_{11}(T_0, T_2) + 8 V_{11}(T_0, T_2) U_{21}(T_0, T_2) W_{11}(T_0, T_2)] \} - 2 \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_0} P_{21}(T_0, T_2)
\end{aligned}$$

حل عمومی رابطه (۴-۴۰) را می‌توان به صورت زیر فرض کرد

$$\begin{aligned}
V_{11}(T_0, T_2) &= F_1(T_2) e^{\beta_f T_0 i} + F_2(T_2) e^{\beta_b T_0 i} + \bar{F}_1(T_2) e^{-\beta_f T_0 i} + \bar{F}_2(T_2) e^{-\beta_b T_0 i} \\
W_{11}(T_0, T_2) &= \alpha i F_1(T_2) e^{\beta_f T_0 i} + \delta i F_2(T_2) e^{\beta_b T_0 i} - \alpha i \bar{F}_1(T_2) e^{-\beta_f T_0 i} - \delta i \bar{F}_2(T_2) e^{-\beta_b T_0 i} \\
V_{21}(T_0, T_2) &= Y_1(T_2) e^{4\beta_f T_0 i} + Y_2(T_2) e^{4\beta_b T_0 i} + \bar{Y}_1(T_2) e^{-4\beta_f T_0 i} + \bar{Y}_2(T_2) e^{-4\beta_b T_0 i} \\
W_{21}(T_0, T_2) &= \alpha i Y_1(T_2) e^{4\beta_f T_0 i} + \delta i Y_2(T_2) e^{4\beta_b T_0 i} - \alpha i \bar{Y}_1(T_2) e^{-4\beta_f T_0 i} - \delta i \bar{Y}_2(T_2) e^{-4\beta_b T_0 i}
\end{aligned} \tag{۴۳-۴}$$

$$\begin{aligned}
U 1_1(T_0, T_2) &= \zeta H_1(T_2) e^{\beta_u T_0 i} + \zeta \bar{H}_1(T_2) e^{-\beta_u T_0 i} + \lambda H_2(T_2) e^{\beta_{\varphi 2} T_0 i} + \lambda \bar{H}_2(T_2) e^{-\beta_{\varphi 2} T_0 i} \\
\varphi 2_1(T_0, T_2) &= H_1(T_2) e^{\beta_u T_0 i} + \bar{H}_1(T_2) e^{-\beta_u T_0 i} + H_2(T_2) e^{\beta_{\varphi 2} T_0 i} + \bar{H}_2(T_2) e^{-\beta_{\varphi 2} T_0 i} \\
U 2_1(T_0, T_2) &= \eta G_1(T_2) e^{\beta_{u 2} T_0 i} + \eta \bar{G}_1(T_2) e^{-\beta_{u 2} T_0 i} + \mu G_2(T_2) e^{\beta_{\varphi 1} T_0 i} + \mu \bar{G}_2(T_2) e^{-\beta_{\varphi 1} T_0 i} \\
\varphi 1_1(T_0, T_2) &= G_1(T_2) e^{\beta_{u 2} T_0 i} + \bar{G}_1(T_2) e^{-\beta_{u 2} T_0 i} + G_2(T_2) e^{\beta_{\varphi 1} T_0 i} + \bar{G}_2(T_2) e^{-\beta_{\varphi 1} T_0 i}
\end{aligned}$$

باید به این نکته توجه شود که پاسخ مود اول U با پاسخ مود دوم φ کوپل شده است و برعکس. توابع مختلطی هستند که در مرتبه سوم تعیین می‌شوند. $(i=1,2), G_i, T_2$ و $F_i(T_2), Y_i(T_2), H_i(T_2)$ به ترتیب فرکانس‌های طبیعی خطی پیش گشت و پس گشت هستند و $\beta_b, \beta_f, \beta_{\varphi 2}, \beta_{u 2}, \beta_{\varphi 1}, \beta_{u 1}$ فرکانس‌های طبیعی خطی متناظر با جهات U و φ به ترتیب برای مود اول و دوم هستند. بنابراین

$$\begin{aligned}
\beta_f &= -\frac{1}{2}i \sqrt{-2\sqrt{\pi^8 I_p^2 \Omega^2 (I_p^2 \Omega^2 + 4D_{11})} + (-4D_{11} - 2I_p^2 \Omega^2) \pi^4} \\
\beta_b &= -\frac{1}{2}i \sqrt{2\sqrt{\pi^8 I_p^2 \Omega^2 (I_p^2 \Omega^2 + 4D_{11})} + (-4D_{11} - 2I_p^2 \Omega^2) \pi^4} \\
\beta_{u 1} &= -\frac{1}{6}i \sqrt{-6\sqrt{9} \sqrt{\left((A_{11} - 4D_{66})^2 \pi^2 + \frac{1024}{9} B_{16}^2\right) \pi^2 + (-72D_{66} - 18A_{11}) \pi^2}} \\
\beta_{u 2} &= -\frac{1}{6}i \sqrt{-6\sqrt{144} \sqrt{\left(\left(A_{11} - \frac{1}{4}D_{66}\right)^2 \pi^2 + \frac{256}{9} B_{16}^2\right) \pi^2 + (-18D_{66} - 72A_{11}) \pi^2}} \quad (44-4) \\
\beta_{\varphi 1} &= -\frac{1}{6}i \sqrt{6\sqrt{144} \sqrt{\left(\left(A_{11} - \frac{1}{4}D_{66}\right)^2 \pi^2 + \frac{256}{9} B_{16}^2\right) \pi^2 + (-18D_{66} - 72A_{11}) \pi^2}} \\
\beta_{\varphi 2} &= -\frac{1}{6}i \sqrt{6\sqrt{9} \sqrt{\left((A_{11} - 4D_{66})^2 \pi^2 + \frac{1024}{9} B_{16}^2\right) \pi^2 + (-72D_{66} - 18A_{11}) \pi^2}}
\end{aligned}$$

$\mu, \alpha, \delta, \zeta, \lambda, \eta$ ضرایبی هستند که در پیوست به طور کامل آورده شده‌اند. با جایگذاری رابطه (4-43) در رابطه (4-41) و حل معادله غیرهمگن پاسخ‌های $V 2_2(T_0, T_2), V 1_2(T_0, T_2), U 2_2(T_0, T_2), U 1_2(T_0, T_2), \varphi 2_2(T_0, T_2)$ و $\varphi 1_2(T_0, T_2), W 2_2(T_0, T_2), W 1_2(T_0, T_2)$ بدست می‌آیند که شرح کامل آنها در پیوست آورده شده است.

روش بدست آوردن شرایط حل پذیری در این مرحله همانند بخش قبلی می‌باشد تنها با این تفاوت که در این بخش به علت وجود دو مود در گسسته سازی تعداد عملیات‌ها دوبرابر شده است. باز هم برای نمایش نزدیکی فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی از رابطه (4-23) استفاده شده است. روابط زیر برای بدست آوردن یک دستگاه معادلات و محاسبه شرایط حل پذیری برای v و w برای مود اول و دوم فرض شده است.

$$\begin{aligned} V 1_3(T_0, T_1, T_2) &= P_{11}(T_1, T_2)e^{i\beta_f T_0} + P_{12}(T_1, T_2)e^{i\beta_b T_0} \\ W 1_3(T_0, T_1, T_2) &= P_{21}(T_1, T_2)e^{i\beta_f T_0} + P_{22}(T_1, T_2)e^{i\beta_b T_0} \end{aligned} \quad (45-4)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۲۳)، (۴-۴۳)، (۴-۴۵) و پاسخ‌های حاصل از حل غیر همگن بدست آمده در رابطه (۴-۴۲) و با فاکتور گیری از عبارات $e^{i\beta_f T_0}$ و $e^{i\beta_b T_0}$ در دو طرف رابطه حاصل، شرایط حل پذیری بصورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} &\Gamma_v^1 F_1(T_2)H_1(T_2)\bar{H}_1(T_2) + \Phi_v^1 F_1(T_2)H_2(T_2)\bar{H}_2(T_2) + \Delta_v^1 F_1(T_2)G_1(T_2)\bar{G}_1(T_2) + X_v^1 D_2 F_1(T_2) \\ &+ \Psi_v^1 F_1(T_2)G_2(T_2)\bar{G}_2(T_2) + \Lambda_v^1 F_1(T_2)Y_1(T_2)\bar{Y}_1(T_2) + K_v^1 F_1(T_2)Y_2(T_2)\bar{Y}_2(T_2) + \Theta_v^1 F_1(T_2)^2 \bar{F}_1(T_2) \\ &+ Z_v^1 F_1(T_2)F_2(T_2)\bar{F}_2(T_2) + (\beta_1^3 \alpha - D_{11} \pi^4 \alpha \beta_1 - I_p \Omega \pi^2 \beta_1^2) c F_1(T_2) = \\ &\frac{1}{2}(-\beta_1^2 - I_p \Omega \pi^2 \beta_1 + D_{11} \pi^4)(e_1 - i e_2) \Omega^2 e^{i \sigma T_2} \end{aligned} \quad (46-4)$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_w^1 F_2(T_2)H_1(T_2)\bar{H}_1(T_2) + \Phi_w^1 F_2(T_2)H_2(T_2)\bar{H}_2(T_2) + \Delta_w^1 F_2(T_2)G_1(T_2)\bar{G}_1(T_2) + X_w^1 D_2 F_2(T_2) \\ &+ \Lambda_w^1 F_2(T_2)Y_1(T_2)\bar{Y}_1(T_2) + K_w^1 F_2(T_2)Y_2(T_2)\bar{Y}_2(T_2) + Z_w^1 F_2(T_2)F_1(T_2)\bar{F}_1(T_2) + \Theta_w^1 F_2(T_2)^2 \bar{F}_2(T_2) \\ &+ \Psi_w^1 F_2(T_2)G_2(T_2)\bar{G}_2(T_2) + (\delta \beta_2^3 - D_{11} \pi^4 \delta \beta_2 - I_p \Omega \pi^2 \beta_2^2) c F_2(T_2) = 0 \end{aligned}$$

از همین طریق شرایط حل پذیری برای مود دوم بصورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} &\Gamma_v^2 Y_1(T_2)H_1(T_2)\bar{H}_1(T_2) + \Phi_v^2 Y_1(T_2)H_2(T_2)\bar{H}_2(T_2) + \Delta_v^2 Y_1(T_2)G_1(T_2)\bar{G}_1(T_2) + X_v^2 D_2 Y_1(T_2) \\ &+ \Lambda_v^2 Y_1(T_2)F_1(T_2)\bar{F}_1(T_2) + K_v^2 Y_1(T_2)F_2(T_2)\bar{F}_2(T_2) + Z_v^2 Y_1(T_2)Y_2(T_2)\bar{Y}_2(T_2) + \Theta_v^2 Y_1(T_2)^2 \bar{Y}_1(T_2) \\ &+ \Psi_v^2 Y_1(T_2)G_2(T_2)\bar{G}_2(T_2) + (-\beta_1^3 \alpha + D_{11} \pi^4 \alpha \beta_1 + I_p \Omega \pi^2 \beta_1^2) 64 c Y_1(T_2) = 0 \end{aligned} \quad (47-4)$$

$$\begin{aligned} &\Gamma_w^2 Y_2(T_2)H_1(T_2)\bar{H}_1(T_2) + \Phi_w^2 Y_2(T_2)H_2(T_2)\bar{H}_2(T_2) + \Delta_w^2 Y_2(T_2)G_1(T_2)\bar{G}_1(T_2) + X_w^2 D_2 Y_2(T_2) \\ &+ \Lambda_w^2 Y_2(T_2)F_1(T_2)\bar{F}_1(T_2) + K_w^2 Y_2(T_2)F_2(T_2)\bar{F}_2(T_2) + Z_w^2 Y_2(T_2)Y_1(T_2)\bar{Y}_1(T_2) + \Theta_w^2 Y_2(T_2)^2 \bar{Y}_2(T_2) \\ &+ \Psi_w^2 Y_2(T_2)G_2(T_2)\bar{G}_2(T_2) + (-\beta_2^3 \delta + D_{11} \pi^4 \delta \beta_2 + I_p \Omega \pi^2 \beta_2^2) 64 c Y_2(T_2) = 0 \end{aligned}$$

که $\Gamma_j^i, \Phi_j^i, \Delta_j^i, \Psi_j^i, \Lambda_j^i, K_j^i, Z_j^i, \Theta_j^i, X_j^i$ ($i = 1, 2$), $j = v, w$ ضرایبی هستند که به علت حجم بالای آنها نمی‌توان به صورت تحلیلی آن‌ها را نشان داد در نتیجه فرم عددی آنها مربوط به مثال بررسی شده در بخش ۵ آورده شده است. برای دو معادله حرکت متناظر با U و φ ، شرایط حل پذیری از طریق جایگذاری رابطه (۴-۴۳) و پاسخ مرتبه دوم در رابطه (۴-۴۲) و دنبال کردن روش استفاده شده در بالا بصورت زیر برای مود اول بدست می‌آید

$$\begin{aligned} & \Gamma_u^1 H_1(T_2) Y_1(T_2) \bar{Y}_1(T_2) + \Phi_u^1 H_1(T_2) Y_2(T_2) \bar{Y}_2(T_2) + \Lambda_u^1 H_1(T_2) F_1(T_2) \bar{F}_1(T_2) \\ & + K_u^1 H_1(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_2(T_2) + X_u^1 D_2 H_1(T_2) = 0 \end{aligned} \quad (48-4)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_\phi^2 H_2(T_2) Y_1(T_2) \bar{Y}_1(T_2) + \Phi_\phi^2 H_2(T_2) Y_2(T_2) \bar{Y}_2(T_2) + \Lambda_\phi^2 H_2(T_2) F_1(T_2) \bar{F}_1(T_2) \\ & + K_\phi^2 H_2(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_2(T_2) + X_\phi^2 D_2 H_2(T_2) = 0 \end{aligned}$$

و برای مود دوم

$$\begin{aligned} & \Gamma_u^2 G_1(T_2) Y_1(T_2) \bar{Y}_1(T_2) + \Phi_u^2 G_1(T_2) Y_2(T_2) \bar{Y}_2(T_2) + \Lambda_u^2 G_1(T_2) F_1(T_2) \bar{F}_1(T_2) \\ & + K_u^2 G_1(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_2(T_2) + X_u^2 D_2 G_1(T_2) = 0 \end{aligned} \quad (49-4)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_\phi^1 G_2(T_2) Y_1(T_2) \bar{Y}_1(T_2) + \Phi_\phi^1 G_2(T_2) Y_2(T_2) \bar{Y}_2(T_2) + \Lambda_\phi^1 G_2(T_2) F_1(T_2) \bar{F}_1(T_2) \\ & + K_\phi^1 G_2(T_2) F_2(T_2) \bar{F}_2(T_2) + X_\phi^1 D_2 G_2(T_2) = 0 \end{aligned}$$

بطوریکه $(i=1,2), (j=u, \phi, \Gamma_j^i, \Phi_j^i, \Lambda_j^i, K_j^i, X_j^i)$ ضرایب هستند و مثل حالات قبلی با آنها رفتار می شود. با نمایش توابع مختلط $(i=1,2), F_i(T_2), H_i(T_2), G_i(T_2)$ به صورت قطبی داریم

$$\begin{aligned} F_1(T_2) &= \frac{1}{2} a_{f1}(T_2) e^{i\theta_{f1}(T_2)}, \quad F_2(T_2) = \frac{1}{2} a_{f2}(T_2) e^{i\theta_{f2}(T_2)}, \quad H_1(T_2) = \frac{1}{2} a_{h1}(T_2) e^{i\theta_{h1}(T_2)} \\ H_2(T_2) &= \frac{1}{2} a_{h2}(T_2) e^{i\theta_{h2}(T_2)}, \quad G_1(T_2) = \frac{1}{2} a_{g1}(T_2) e^{i\theta_{g1}(T_2)}, \quad G_2(T_2) = \frac{1}{2} a_{g2}(T_2) e^{i\theta_{g2}(T_2)} \end{aligned} \quad (50-4)$$

بطوریکه مقادیر حقیقی $a_i(T_2)$ و $\theta_i(T_2)$ به ترتیب دامنه و زاویه فاز پاسخ هستند. با جایگذاری رابطه (4-50) در روابط (4-46)-(4-49) و جدا کردن قسمت های حقیقی و موهومی، روابط زیر حاصل می شوند

$$\begin{aligned} & X_v^1 D_2 a_{f1} + c a_{f1} [\alpha \beta_1^3 - D_{11} \pi^4 \alpha \beta_1 - I_p \Omega \pi^2 \beta_1^2] = \\ & \Omega^2 (\sin(\gamma_1) e_2 + e_1 \cos(\gamma_1)) (-\beta_1^2 - I_p \Omega \pi^2 \beta_1 + D_{11} \pi^4) \\ & \frac{1}{4} a_{f1} [4 \sigma X_v^1 - 4 X_v^1 D_2 \gamma_1 + Z_v^1 a_{f2}^2 + K_v^1 a_{y2}^2 + \Lambda_v^1 a_{y1}^2 + \Psi_v^1 a_{g2}^2 \\ & + \Delta_v^1 a_{g1}^2 + \Phi_v^1 a_{h2}^2 + \Theta_v^1 a_{f1}^2 + \Gamma_v^1 a_{h1}^2] = \\ & \Omega^2 (-\beta_1^2 - I_p \Omega \pi^2 \beta_1 + D_{11} \pi^4) (e_1 \sin(\gamma_1) - e_2 \cos(\gamma_1)) \end{aligned} \quad (51-4)$$

$$X_w^1 D_2 a_{f2} + c a_{f2} [\delta \beta_2^3 - D_{11} \pi^4 \delta \beta_2 - I_p \Omega \pi^2 \beta_2^2] = 0$$

$$a_{f2}[4X_w^1\sigma - 4X_w^1D_2\gamma_2 + \Theta_w^1a_{f2}^2 + K_w^1a_{y2}^2 + \Lambda_w^1a_{y1}^2 + \Psi_w^1a_{g2}^2 + \Delta_w^1a_{g1}^2 + \Phi_w^1a_{h2}^2 + \Gamma_w^1a_{h1}^2 + Z_w^1a_{f1}^2] = 0$$

$$\frac{1}{4}[\Gamma_u^1a_{h1}a_{y1}^2 + \Phi_u^1a_{h1}a_{y2}^2 + \Lambda_u^1a_{h1}a_{f1}^2 + K_u^1a_{h1}a_{f2}^2] - X_u^1a_{h1}D_2\theta_{h1} = 0$$

$$X_u^1D_2a_{h1} = 0$$

(۵۲-۴)

$$\frac{1}{4}[\Gamma_\phi^2a_{h2}a_{y1}^2 + \Phi_\phi^2a_{h2}a_{y2}^2 + \Lambda_\phi^2a_{h2}a_{f1}^2 + K_\phi^2a_{h2}a_{f2}^2] - X_\phi^2a_{h2}D_2\theta_{h2} = 0$$

$$X_\phi^2D_2a_{h2} = 0$$

که $\gamma_i = \sigma T_2 - \theta_i$ ، $(i=1,2)$ و برای مود دوم بدست می آید

$$\frac{1}{2}X_v^2D_2a_{y1} + 32ca_{y1}[-\alpha\beta_1^3 + D_{11}\pi^4\alpha\beta_1 + I_p\Omega\pi^2\beta_1^2] = 0$$

$$\frac{1}{4}[\Psi_v^2a_{y1}a_{g2}^2 + Z_v^2a_{y1}a_{y2}^2 + \Lambda_v^2a_{y1}a_{f1}^2 + K_v^2a_{y1}a_{f2}^2 + \Delta_v^2a_{y1}a_{g1}^2 + \Phi_v^2a_{y1}a_{h2}^2 + \Theta_v^2a_{y1}^3 + \Gamma_v^2a_{y1}a_{h1}^2] + X_v^2a_{y1}D_2\theta_{y1} = 0$$

(۵۳-۴)

$$\frac{1}{2}X_w^2D_2a_{y2} - 32ca_{y2}[\delta\beta_2^3 + D_{11}\pi^4\delta\beta_2 + I_p\Omega\pi^2\beta_2^2] = 0$$

$$\frac{1}{4}[\Lambda_w^2a_{y2}a_{f1}^2 + \Psi_w^2a_{y2}a_{g2}^2 + Z_w^2a_{y2}a_{y1}^2 + \Delta_w^2a_{y2}a_{g1}^2 + K_w^2a_{y2}a_{f2}^2 + \Theta_w^2a_{y2}^3 + \Gamma_w^2a_{y2}a_{h1}^2 + \Phi_w^2a_{y2}a_{h2}^2] + X_w^2a_{y2}D_2\theta_{y2} = 0$$

$$\frac{1}{4}a_{g1}[\Gamma_u^2a_{y1}^2 + \Phi_u^2a_{y2}^2 + \Lambda_u^2a_{f1}^2 + K_u^2a_{f2}^2] - X_u^2a_{g1}D_2\theta_{g1} = 0$$

$$X_u^2D_2a_{g1} = 0$$

(۵۴-۴)

$$\frac{1}{4}a_{g2}[\Gamma_\phi^1a_{y1}^2 + \Phi_\phi^1a_{y2}^2 + \Lambda_\phi^1a_{f1}^2 + K_\phi^1a_{f2}^2] - X_\phi^1a_{g2}D_2\theta_{g2} = 0$$

$$X_\phi^1D_2a_{g2} = 0$$

برای پاسخ حالت ماندگار مشتقات زمانی در (۴-۵۱)-(۴-۵۴) صفر شده است که موجب می شود

$$a_{f2} = a_{y1} = a_{y2} = a_{g1} = a_{g2} = a_{h1} = a_{h2} = 0 \quad (55-4)$$

با جایگذاری رابطه (55-4) در روابط (51-4)-(54-4) و حذف γ بین روابط باقی مانده در نهایت بدست می آید

$$\mathcal{G}_1 a_{f1}^6 + \mathcal{G}_2 a_{f1}^4 + \mathcal{G}_3 a_{f1}^2 = \frac{1}{4} \Omega^4 e_t^2 \left(-\beta_1^2 - I_p \Omega \pi^2 \beta_1 + D_{11} \pi^4 \right)^2 \quad (56-4)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \frac{1}{64} \Theta_v^{1,2} \\ \mathcal{G}_2 &= \frac{1}{8} X_v^1 \sigma \Theta_v^1 \\ \mathcal{G}_3 &= \frac{1}{4} c^2 \beta_1^2 \left(-\beta_1^2 \alpha + D_{11} \pi^4 \alpha + I_p \Omega \pi^2 \beta_1 \right)^2 + \frac{1}{4} (X_v^1)^2 \sigma^2 \\ e_t &= \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \end{aligned} \quad (57-4)$$

در این قسمت توضیحی در مورد تاثیر مود دوم در پاسخ ارائه می شود. در ابتدا فرض می شود که تحریک در همسایگی مود اول تنظیم شده است و یا به عبارت دیگر فقط مود اول با تحریک خارجی مستقیما تحریک می شود. در نتیجه تحریک خارجی بطور مستقیم بروی دیگر مودها تاثیری ندارد، بنابراین پاسخ خطی مود دوم (حل مرتبه اول) تماما صفر می شوند ولی در عین حال پاسخ مرتبه دوم صفر نمی شود که این امر به دلیل وجود ترم های غیر خطی در سمت راست معادله غیر همگن مرتبه دوم از مود دوم می باشد. بنابراین این امر ثابت می کند که اگرچه پاسخ خطی مرتبه اول در مود دوم صفر می شود ولی عبارات آن باید تا آخرین مراحل حل باقی بمانند.

فصل ۵

مثال‌های عددی

۵- مثال‌های عددی

در این بخش مثال‌های عددی برای بررسی ارتعاشات اجباری شفت کامپوزیت با پارامترهای بی بعد زیر مورد تحلیل قرار می‌گیرند.

$$\begin{aligned} I_p &= 0.000657 & I_2 &= 0.000328 & D_{66} &= 0.0224 & D_{11} &= 0.101 \\ A_{11} &= 307.754 & B_{16} &= -0.00105 & c &= 0.05 \end{aligned} \quad (۱-۵)$$

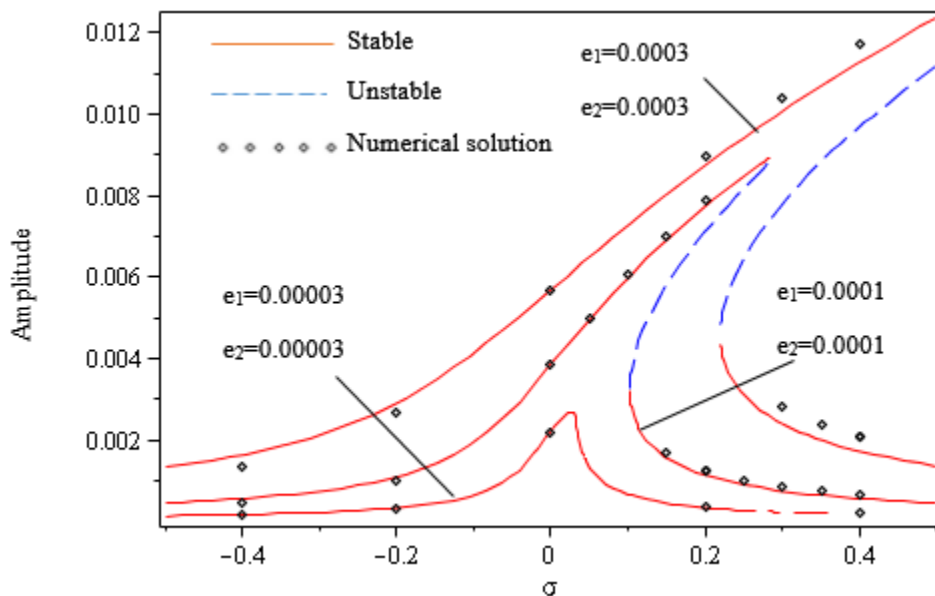
لایه چینی بصورت $[90^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 0^\circ_6 / 90^\circ]$ می‌باشد که از لایه داخلی شفت توخالی شروع می‌شود. با جایگذاری پارامترهای (۱-۵) و معادله (۴-۵) در رابطه (۴-۵) بدست می‌آید.

$$937446.506a_{f1}^6 - 786.524a_{f1}^4\sigma + (0.164\sigma^2 + 0.0001)a_{f1}^2 = 0.413e_t^2 \quad (۲-۵)$$

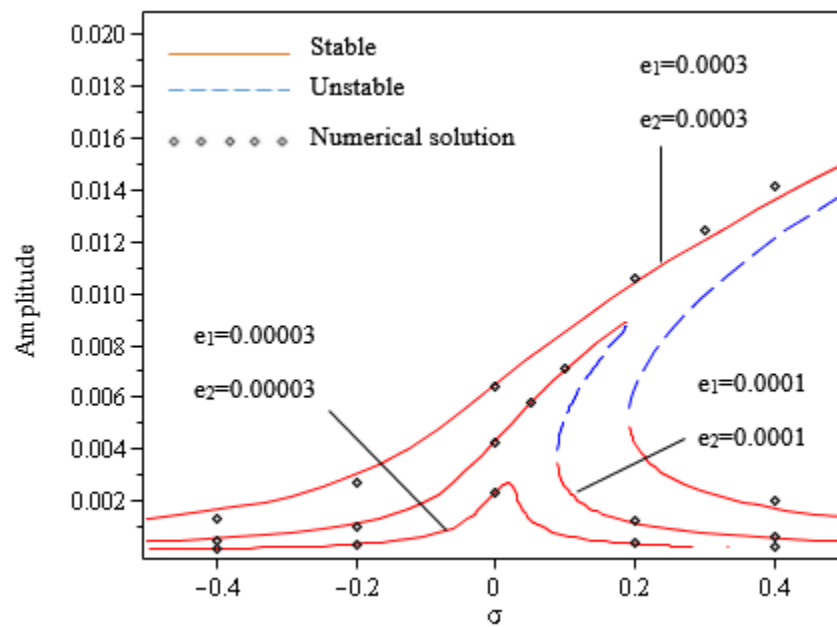
و برای حالت گسسته سازی توسط یک مود بدست می‌آید

$$2109255.490a_{f1}^6 - 1179.786a_{f1}^4\sigma + (0.164\sigma^2 + 0.0001)a_{f1}^2 = 0.413e_t^2 \quad (۳-۵)$$

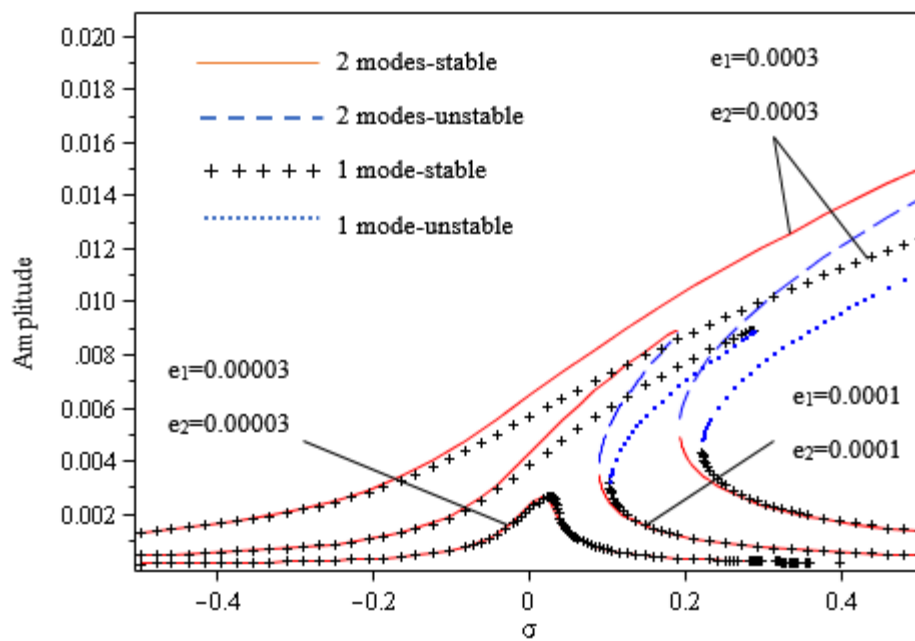
این عبارات رابطه دامنه-فرکانس (نمودار انشعاب^۱) برای گسسته سازی توسط یک مود و دو مود هستند. این روابط به روشنی تفاوت بین دو روش گسسته سازی را نشان می‌دهند.



شکل ۵-۱- منحنی پاسخ فرکانسی برای خارج از مرکزیت‌های مختلف و گسسته سازی تک مود

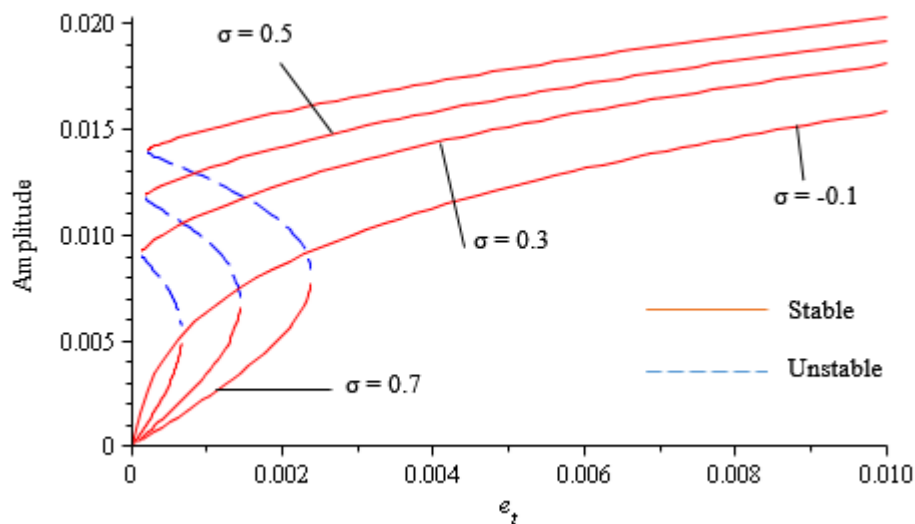


شکل ۵-۲- منحنی پاسخ فرکانسی برای خارج از مرکزیت‌های مختلف و گسسته سازی دو مود



شکل ۵-۳- مقایسه ای بین منحنی پاسخ فرکانسی برای گسسته سازی تک مود و دو مود

شکل ۵-۱ و ۵-۲ منحنی پاسخ فرکانسی برای یک شفت کامپوزیت را با گسسته سازی تک مود و دو مود نشان می‌دهد. این نمودارها بر اساس مقادیر مختلف خارج از مرکزیت رسم شده‌اند. همانطور که شکل ۵-۱ و ۵-۲ نشان می‌دهند، منحنی‌ها در نزدیکی قله به سمت راست خمیده شده‌اند. که این امر بدین معنی است که در اینجا غیر خطی از نوع **سخت شونده**^۱ می‌باشد. برای بعضی مقادیر σ یک پاسخ و برای بعضی مقادیر دیگر سه پاسخ وجود دارد که یکی از آنها ناپایدار است. بنابراین پرش اتفاق می‌افتد و پدیده انشعاب رخ می‌دهد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که برای مقادیر کوچک خارج از مرکزیت تمامی شاخه‌های پاسخ پایدار هستند. با افزایش خارج از مرکزیت دامنه رشد می‌کند و شاخه‌های ناپایدار پدیدار می‌شوند. در این شکل‌ها برای اعتبار سنجی به پاسخ حاصل از تئوری اغتشاشات برای گسسته سازی توسط یک مود و دو مود از شبیه سازی عددی استفاده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از دو روش تطبیق دارند بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که نتایج حاصل از تئوری اغتشاشات معتبر می‌باشند.

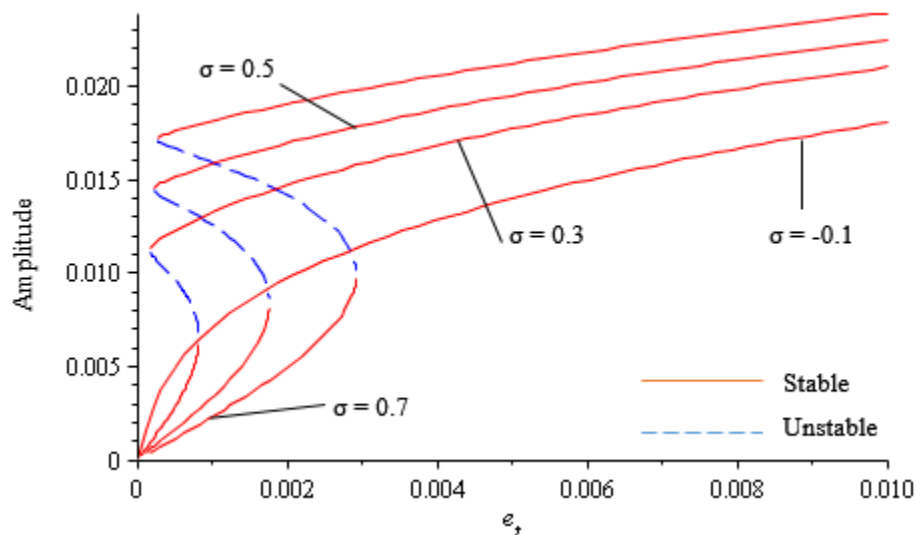


شکل ۵-۴- دامنه بر حسب خارج از مرکزیت کلی برای گسسته سازی تک مود

شکل ۵-۳ مقایسه‌ای بین منحنی‌های پاسخ فرکانسی حاصل از گسسته سازی توسط یک مود و دو مود را نشان می‌دهد که تفاوت قابل توجهی بین دو منحنی مخصوصاً در نزدیکی قله مشاهده می‌شود. از شکل‌ها

^۱ hardening

واضح است که مقدار بیشینه برای هر دو حالت تقریباً یکسان است ولی این بیشینه در فرکانس‌های مختلفی رخ می‌دهد. این تفاوت‌ها با افزایش دامنه بیشتر می‌شوند. این تفاوت‌ها مهم هستند، بطور مثال برای $\sigma = 0.2$ پاسخ یک مود دو جواب پایدار را پیش بینی می‌کند در صورتی که پاسخ دو مود یک شاخه پایدار را پیش بینی می‌کند.

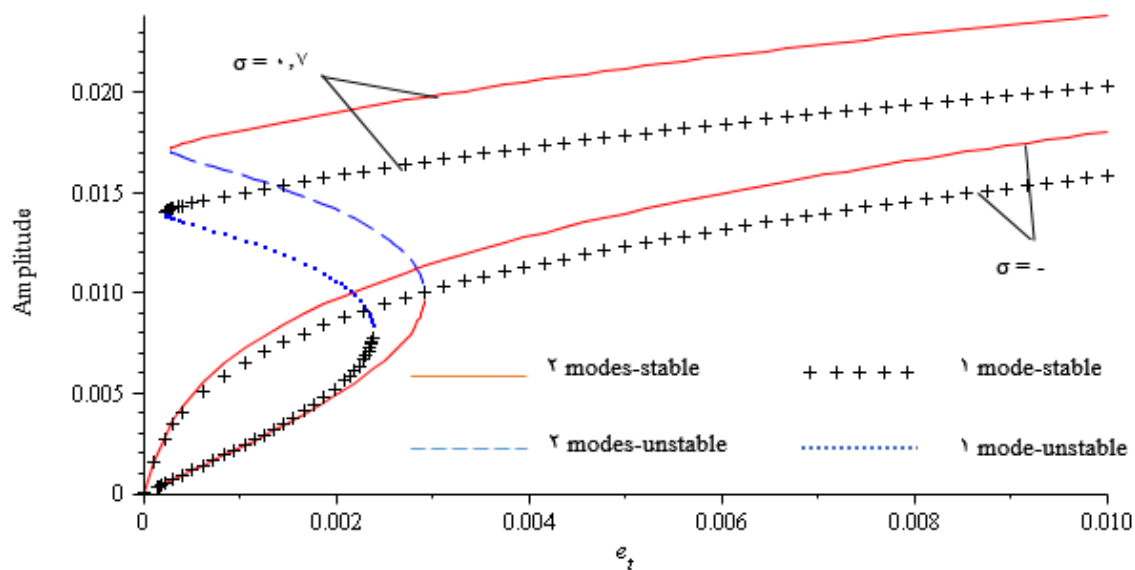


شکل ۵-۵- دامنه بر حسب خارج از مرکزیت کلی برای گسسته سازی دو مود

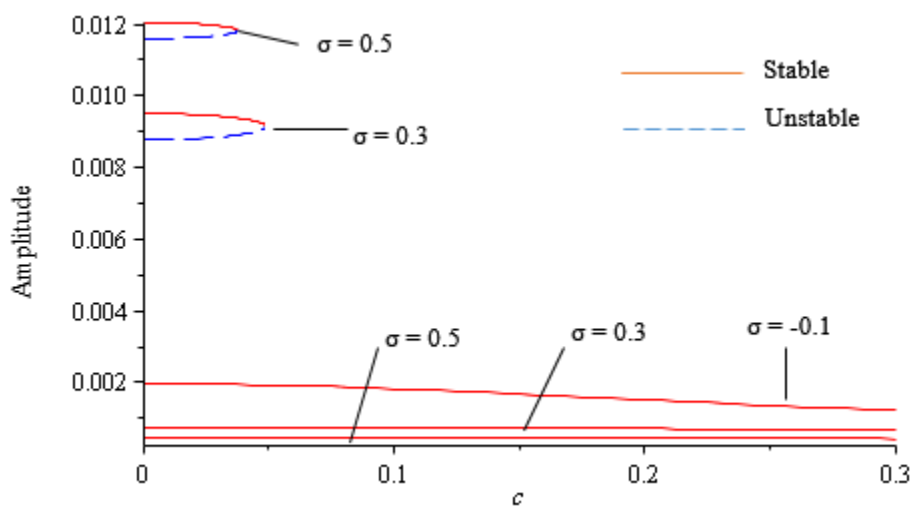
شکل‌ها نشان می‌دهد که گسسته سازی یک مود غیرخطی سخت‌تری دارد در حالی که غیرخطی گسسته سازی دو مود نرم‌تر است. نتایج حاضر جالب است، اگرچه تحریک (یعنی سرعت چرخش) در همسایگی مود اول خمشی تنظیم شده است و این مود با مودهای دیگر در تشدید داخلی درگیر نمی‌شود، نتایج حاضر نشان می‌دهند که گسسته سازی توسط یک مود کافی نمی‌باشد. این امر با ایده معمول در ارتعاشات غیر خطی [۲۹] در تناقض است که می‌گوید اگر تحریک در همسایگی یک مود تنظیم شود و این مود در تشدید داخلی درگیر نشود بنابراین بقیه مودها با گذر زمان از بین می‌روند و گسسته سازی توسط یک مود برای پاسخ حالت ماندگار کافی می‌باشد. در اینجا دلیل این امر وجود غیر خطی‌های مرتبه دوم است. در گسسته سازی، بعضی از ترم‌های غیرخطی مرتبه دو در مود اول عمود بوده و حذف می‌شوند. بنابراین تاثیر آنها در پاسخ مشاهده نمی‌شود. از طرف دیگر با استفاده از گسسته سازی توسط دو مود اثرات این عبارات در پاسخ لحاظ می‌شوند.

شکل‌های ۴-۵ و ۵-۵ نشان دهنده دامنه بر حسب توزیع کلی خارج از مرکزیت به ترتیب برای گسسته سازی توسط یک مود و دو مود به ازای مقادیر مختلف σ می‌باشد. برای بعضی مقادیر σ پدیده پرش رخ

می‌دهد. برای بعضی مقادیر σ و یک بازه مشخص از e_i منحنی شامل سه قسمت می‌باشد که یکی از آنها ناپایدار است. برای مثال در شکل ۵-۵ وقتی $\sigma = 0.3$ است برای $e_i < 0.00082$ منحنی دارای سه قسمت



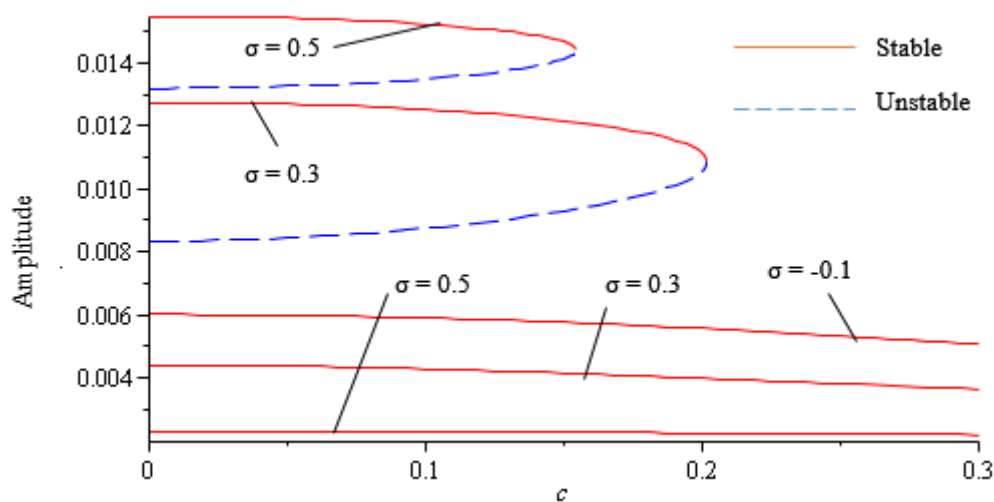
شکل ۵-۶- مقایسه بین منحنی‌های دامنه-خارج از مرکزیت برای گسسته سازی تک مود و دو مود



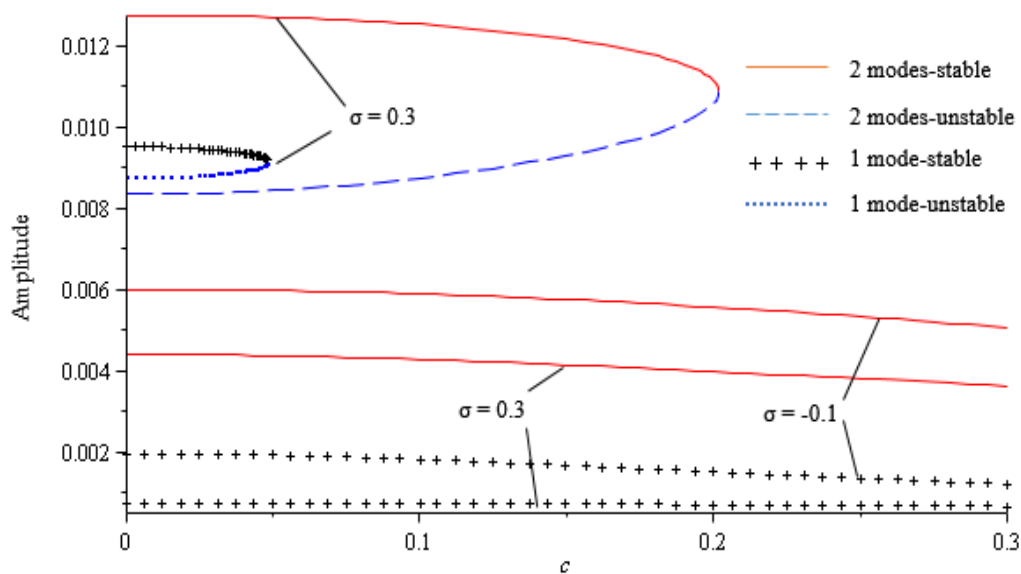
شکل ۵-۷- دامنه بر حسب میرایی خارجی برای گسسته سازی تک مود

است و برای $e_r > 0.00082$ منحنی یک قسمت دارد. شکل ۵-۶ مقایسه‌ای بین شکل‌های ۵-۴ و ۵-۵ انجام می‌دهد. همانطور که شکل نشان می‌دهد با افزایش خارج از مرکزیت تفاوت بین گسسته سازی تک مود و دو مود هم زیاد می‌شود.

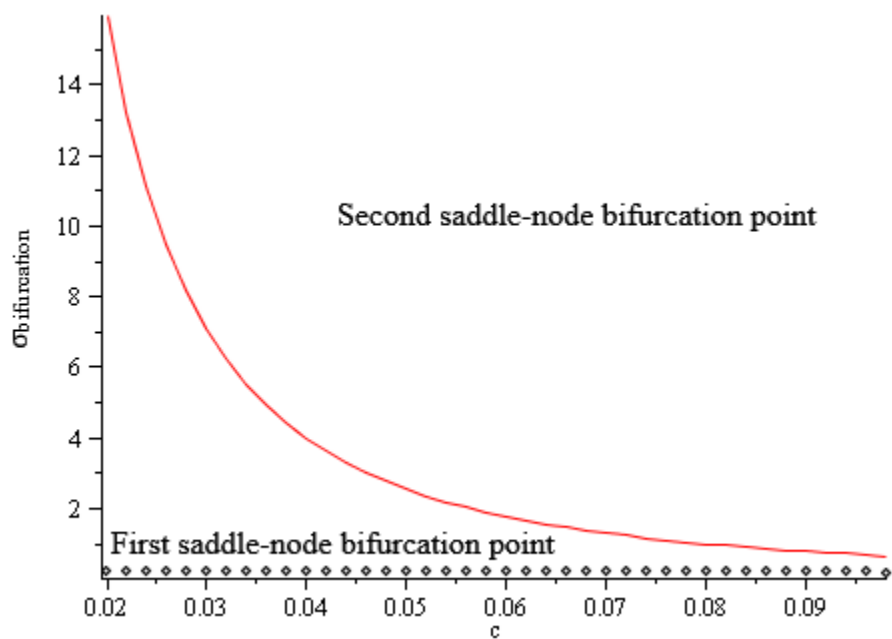
شکل‌های ۵-۷ و ۵-۸ نشان دهنده تغییرات دامنه بر حسب ضریب میرایی هستند. باز هم برای بعضی از مقادیر σ منحنی چند مقداری می‌شود. برای مثال در شکل ۵-۸ وقتی $\sigma = -0.1$ باشد برای تمامی مقادیر c ، منحنی تک مقداری است ولی وقتی $\sigma = 0.3$ برای $c < 0.1198$ منحنی شامل سه قسمت است که یکی از آنها ناپایدار است و برای $c > 0.1198$ منحنی باز هم تک مقداری است. باید توجه داشت که شکل‌های ۵-۷ و ۵-۸ به ترتیب برای گسسته سازی یک مود و دو مود هستند و شکل ۵-۹ مقایسه‌ای بین این دو نتیجه می‌باشد. شکل ۵-۸ هم نشان می‌دهد که دو روش گسسته سازی برای مقادیر مختلف ضریب میرایی موجب تفاوت‌های بزرگی می‌شوند.



شکل ۵-۸- دامنه بر حسب میرایی خارجی برای گسسته سازی دو مود

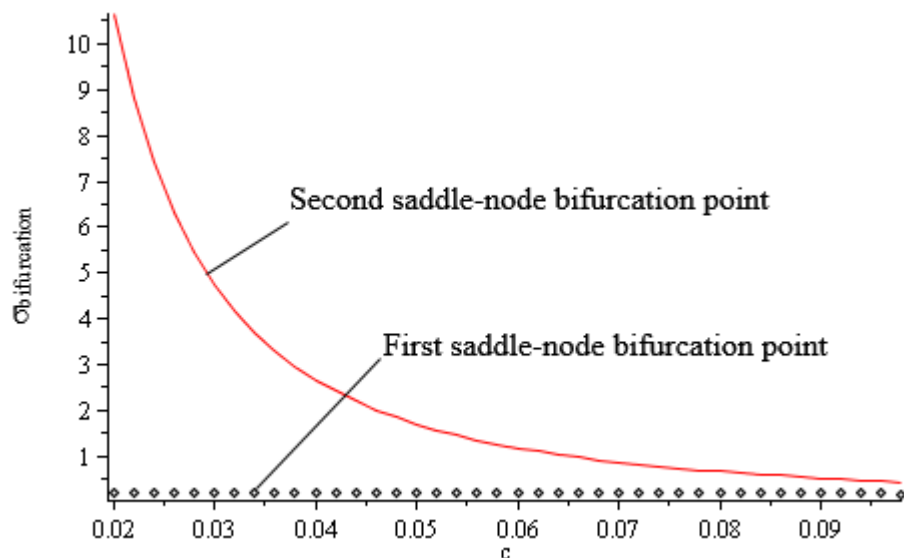


شکل ۹-۵- مقایسه بین منحنی دامنه-میرایی برای گسسته سازی یک مود و دو مود



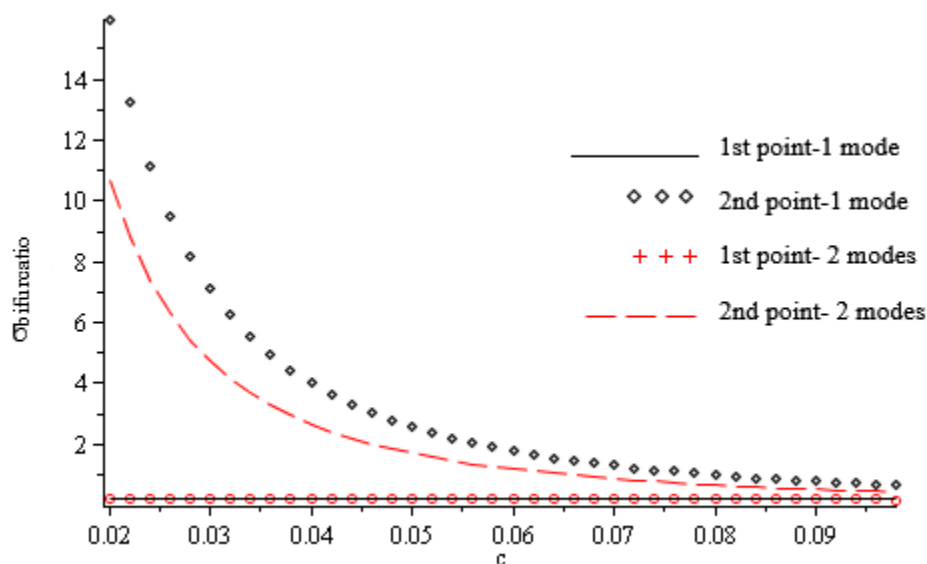
شکل ۱۰-۵- $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب ضریب میرایی برای گسسته سازی یک مود

از آنجایی که پدیده انشعاب رخ می‌دهد، بهتر است که نمودار مکان هندسی نقاط انشعاب بر حسب ضریب میرایی و خارج از مرکزیت رسم شود. در اینجا نقاط انشعاب با $\sigma_{bifurcation}$ بیان می‌شوند که نشان دهنده مختصاتی است که انشعاب در آن رخ می‌دهد (یعنی فاصله از مبدا در شکل‌های ۱-۵ و ۲-۵)، نقطه انشعاب



شکل ۵-۱۱- $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب ضریب میرایی برای گسسته سازی دو مود

اول، نقطه زینی پایین و نقطه انشعاب دوم نقطه زینی بالا می‌باشد. شکل‌های ۵-۱۰ و ۵-۱۱ نشان دهنده‌ی مکان هندسی نقطه انشعاب بر حسب ضریب میرایی برای گسسته سازی توسط یک مود و دو مود هستند. همانطور که این اشکال نشان می‌دهند نقطه انشعاب زینی اول تقریباً با تغییرات میرایی ثابت است ولی

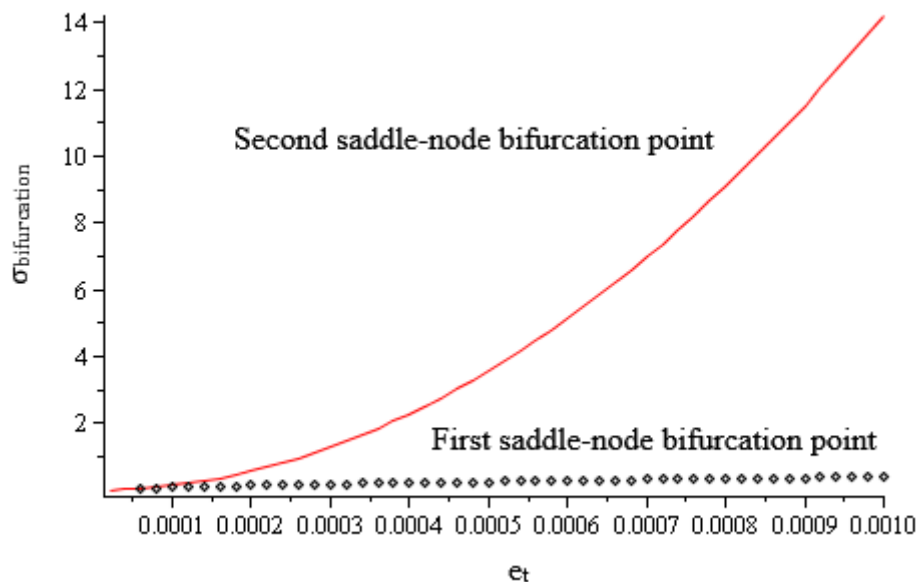


شکل ۵-۱۲- مقایسه ای بین نمودار $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب میرایی برای گسسته سازی تک مود و دو مود

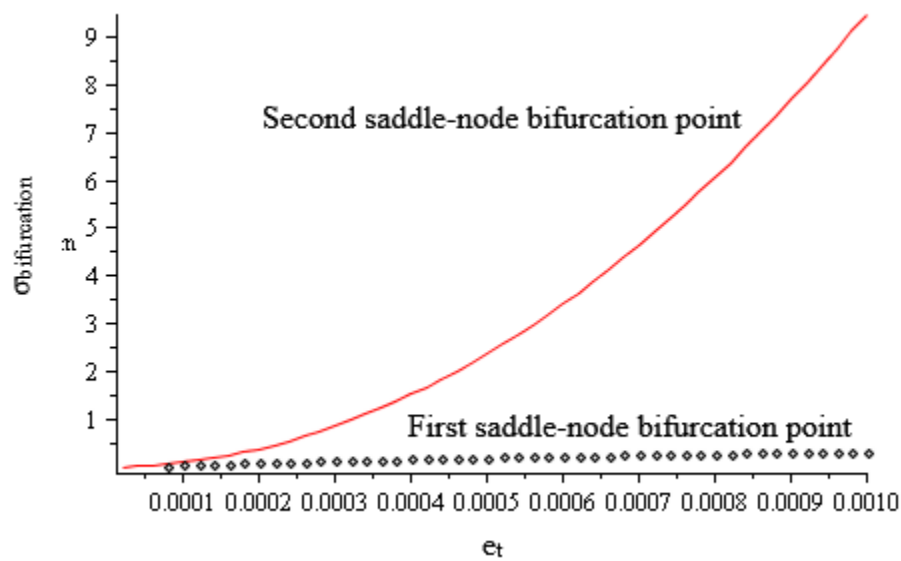
تغییرات نقطه دوم زیاد است. شکل ۵-۱۲ مقایسه ای بین این دو نتیجه است. باز هم تفاوت بین دو روش گسسته سازی قابل توجه است.

اشکال ۵-۱۳ و ۵-۱۴ نشان دهنده مکان هندسی نقاط انشعاب بر حسب توزیع خارج از مرکزیت کلی هستند. بر خلاف شکل‌های قبلی هر دو نقطه انشعاب اول و دوم با تغییرات خارج از مرکزیت تغییر می‌کنند، هرچند که تغییرات نقطه انشعاب دوم بیشتر است. علاوه بر این مشاهده می‌شود که $\sigma_{bifurcation}$ با افزایش e_t کاهش می‌یابد بر خلاف شکل‌های ۵-۱۰ و ۵-۱۱ که نشان دهنده افزایش $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب افزایش c هستند. شکل ۵-۱۵ نشان دهنده مقایسه بین اشکال ۵-۱۳ و ۵-۱۴ است که خطای زیادی را در استفاده از گسسته سازی توسط یک مود نشان می‌دهد.

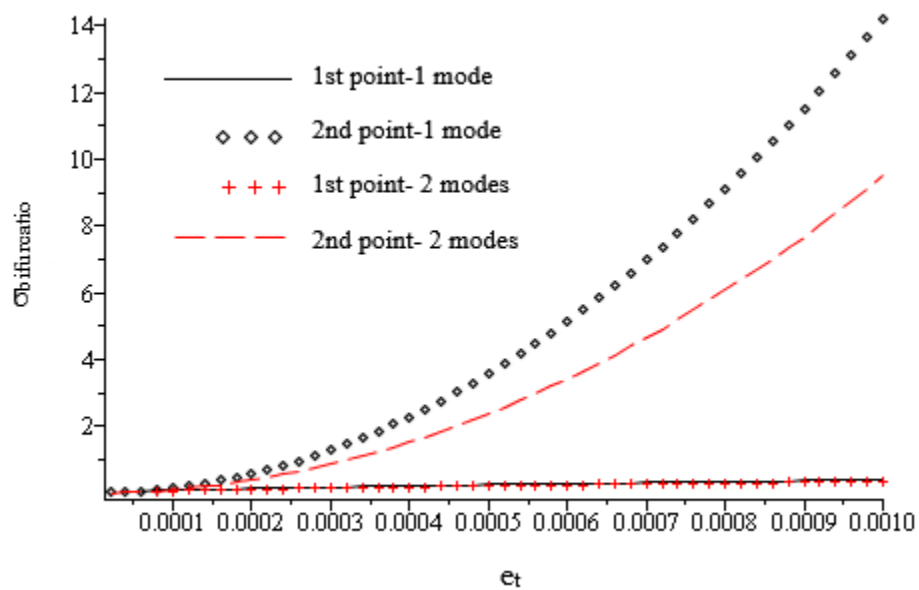
شکل ۵-۱۶ منحنی پاسخ فرکانسی را برای مقادیر ثابت خارج از مرکزیت و مقادیر مختلف زاویه الیاف برای گسسته سازی توسط دو مود نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که برای سه زاویه الیاف ارائه شده در اینجا نمودار انشعاب تغییرات چندانی ندارد. اگرچه اگر زاویه الیاف نسبت به مختصه محوری شفت افزایش یابد سیستم پاسخ نرم‌تری دارد.



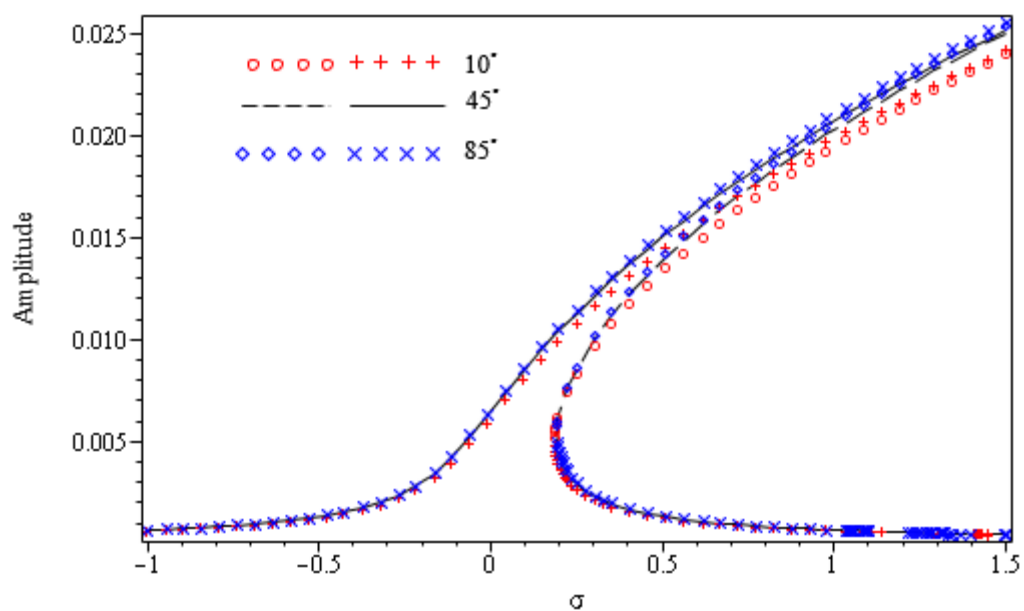
شکل ۵-۱۳ - $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب خارج از مرکزیت کلی؛ گسسته سازی تک مود



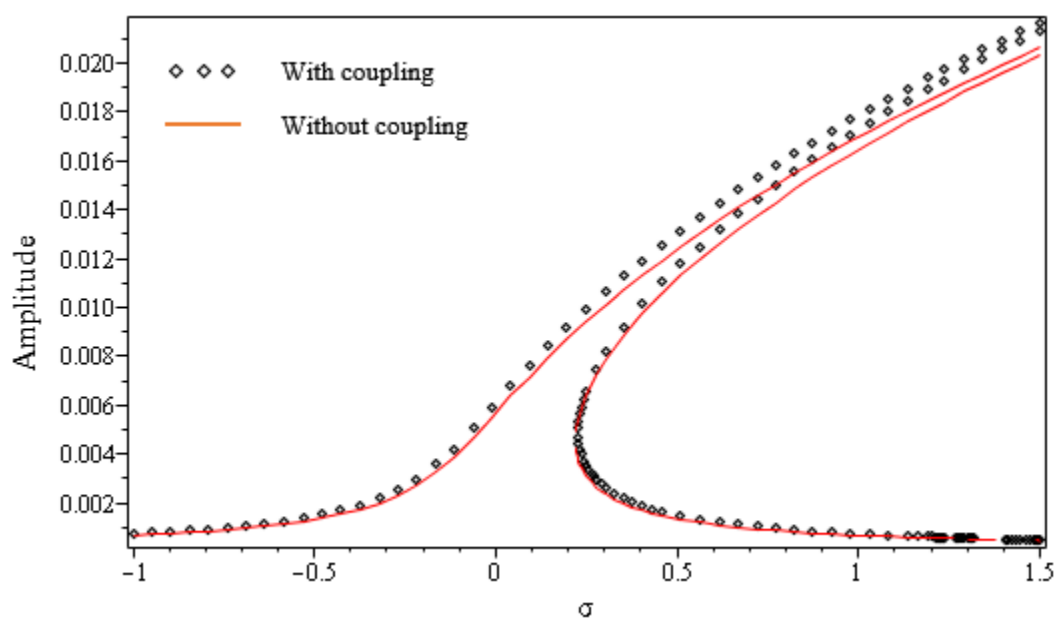
شکل ۵-۱۴- $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب خراج از مرکزیت کلی؛ گسسته سازی دو مود



شکل ۵-۱۵- مقایسه ای بین گسسته سازی یک مود و دو مود برای منحنی $\sigma_{bifurcation}$ بر حسب خراج از مرکزیت کلی



شکل ۱۶-۵- منحنی پاسخ فرکانسی برای مقادیر مختلف زاویه الیاف؛ $e_1=e_2=0.0003$

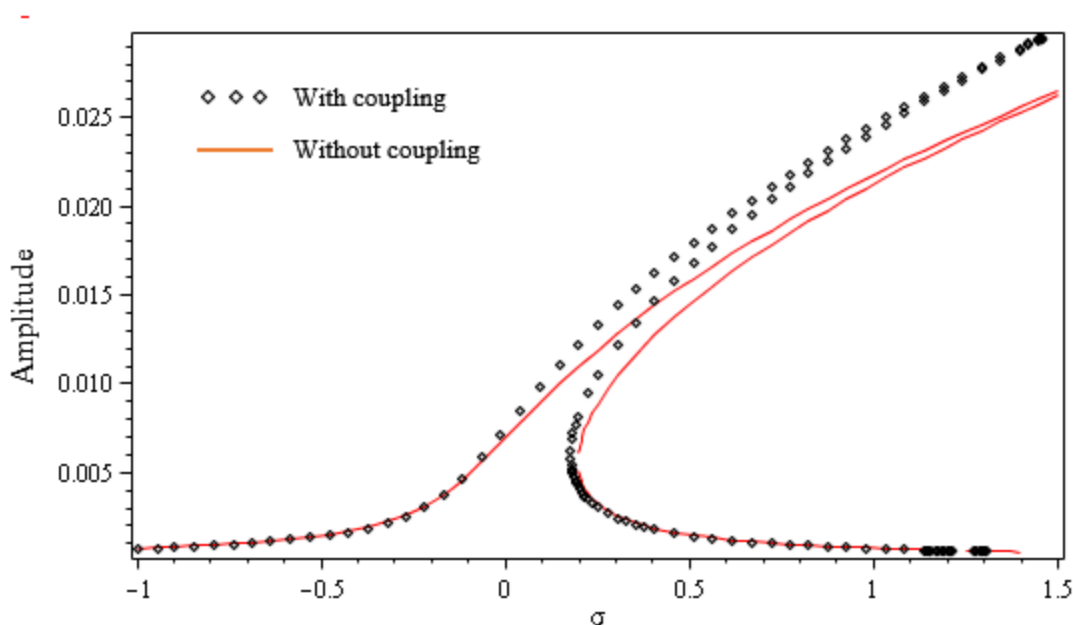


شکل ۱۷-۵- منحنی پاسخ فرکانسی بدست آمده با وجود کوپلینگ محوری-پیچشی و بدون آن برای گسسته سازی یک مود

یکی از نکات جالب در مورد این تحقیق استفاده از معادلات حرکت استخراج شده برای تحلیل بدون هیچ گونه ساده سازی (یعنی حذف کوپلینگ‌ها) می‌باشد. معادلات شامل کوپلینگ محوری-خمشی-خمشی-پیچشی می‌باشند. در حالی که در بعضی از تحقیقات مثل [۱۸] اثرات کوپلینگ‌ها نادیده گرفته شده است. در اینجا تاثیر کوپلینگ در پاسخ در نظر گرفته شده است.

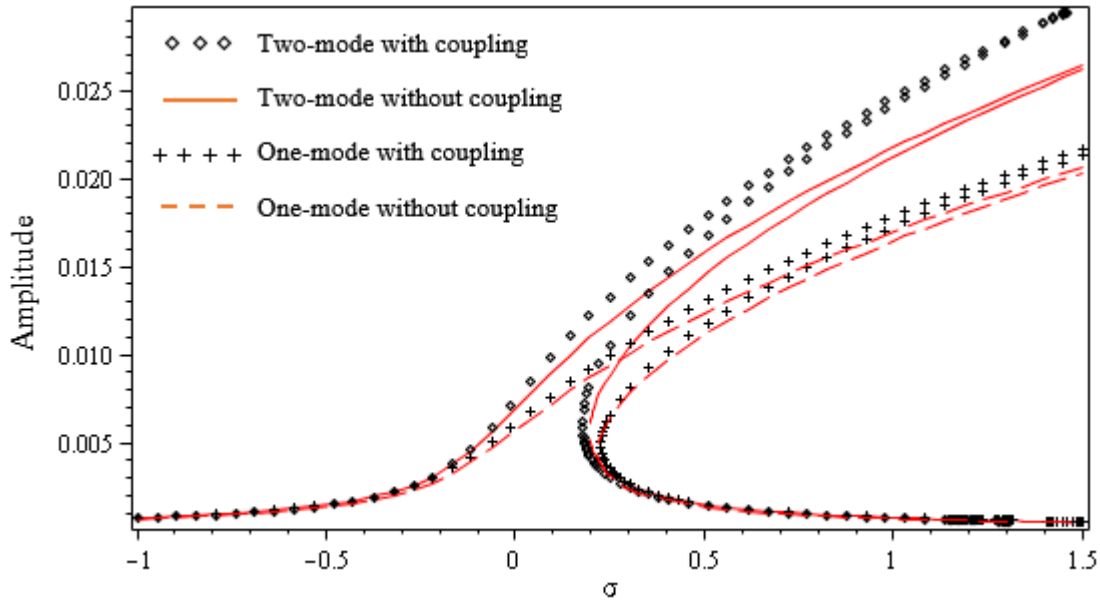
در واقع این کوپلینگ مربوط به حرکات **طولی** و پیچشی می‌باشد و اثرات آن در ضریب B_{16} منعکس شده است. این کوپلینگ وقتی که الیاف دارای زاویه 0° و 90° هستند (یعنی لایه گذاری عمود^۱) از بین می‌رود. در لایه چینی زاویه دار ضریب B_{16} غیر صفر است. حال در لایه چینی زاویه دار با توجه به تقارن موجود در لایه چینی مساله به دو حالت تقسیم می‌شود: لایه چینی متقارن^۲ و لایه چینی نامتقارن^۳.

در حالت اول (لایه چینی متقارن)، چون الیاف با زوایای θ و $-\theta$ پیچیده می‌شوند و با توجه به ضخامت کم لایه‌های کامپوزیت، هر جفت از الیاف که دارای زوایای متضاد هستند تقریباً یکدیگر را خنثی می‌کنند؛ بنابراین در این حالت ضریب کوپلینگ (B_{16}) حذف نمی‌شود بلکه مقدار کمی دارد.



شکل ۱۸-۵- منحنی پاسخ فرکانسی بدست آمده با وجود کوپلینگ محوری-پیچشی و بدون آن برای گسسته سازی یک مود

-
- ^۱ Cross-ply lamination
 - ^۲ Symmetric lamination
 - ^۳ Asymmetric lamination



شکل ۱۹-۵- مقایسه‌ای بین منحنی پاسخ فرکانسی برای گسسته سازی توسط یک مود با کوپلینگ و بدون آن

در حالت دوم (لایه چینی نا متقارن)، تاثیر کوپلینگ بخاطر وجود نا متقارنی در لایه چینی قابل توجه می‌باشد. بنابراین در نظر گرفتن کوپلینگ در تحلیل پاسخ لازم است. توضیحاتی که در ادامه می‌آیند این ادعا را تایید می‌کنند.

با حذف کوپلینگ محوری -پیچشی در معادلات (۳-۲۷) - (۳-۳۰) معادلات حرکت جدید بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\ddot{u} - \bar{A}_{11}(\bar{v}'\bar{v}'' + \bar{w}'\bar{w}'' - \bar{v}'^2\bar{u}'' - \bar{w}'^2\bar{u}'' + \bar{u}'' - 2\bar{v}'\bar{u}'\bar{v}'' - 2\bar{w}'\bar{u}'\bar{w}'') = 0 \quad (۴-۵)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{v}} + \bar{c}\dot{\bar{v}} - \bar{D}_{11}(-\bar{v}^{(IV)}) - \bar{I}_p\Omega\dot{\bar{w}}'' - \bar{A}_{11}(\bar{w}'\bar{v}'\bar{w}'' + \bar{v}'\bar{u}'' + \bar{v}''\bar{u}' + \frac{3}{2}\bar{v}'^2\bar{v}'') \\ + \frac{1}{2}\bar{v}'^2\bar{v}'' - 2\bar{w}'\bar{u}'\bar{u}'' - \bar{v}''\bar{u}'^2) = \bar{\Omega}^2(\bar{e}_y(\bar{x})\cos(\bar{\Omega}\bar{t}) - \bar{e}_z(\bar{x})\sin(\bar{\Omega}\bar{t})) \end{aligned} \quad (۵-۵)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}} + \bar{c}\dot{\bar{w}} - \bar{D}_{11}(-\bar{w}^{(IV)}) - \bar{I}_p\Omega\dot{\bar{v}}'' - \bar{A}_{11}(\bar{w}'\bar{v}'\bar{v}'' + \bar{w}'\bar{u}'' + \bar{w}''\bar{u}' + \frac{3}{2}\bar{w}'^2\bar{w}'') \\ + \frac{1}{2}\bar{v}'^2\bar{w}'' - 2\bar{w}'\bar{u}'\bar{u}'' - \bar{w}''\bar{u}'^2) = \bar{\Omega}^2(\bar{e}_z(\bar{x})\cos(\bar{\Omega}\bar{t}) + \bar{e}_y(\bar{x})\sin(\bar{\Omega}\bar{t})) \end{aligned} \quad (۶-۵)$$

$$\bar{I}_p\ddot{\bar{\phi}} - \bar{D}_{66}(\bar{v}''\bar{w}'' + \bar{\phi}'' + \bar{v}'''\bar{w}' - \bar{w}'''\bar{v}' - \bar{v}''\bar{v}'\bar{u}'' - 3\bar{u}''\bar{v}''\bar{w}' - 2\bar{u}'\bar{v}''\bar{w}'' - 2\bar{u}'\bar{v}'''\bar{w}' - \bar{w}''\bar{v}'\bar{u}''') = 0 \quad (۷-۵)$$

روش حل مثل قبل می باشد. منحنی پاسخ فرکانسی برای شفت بررسی شده در بخش ۵ بدست آمده است ولی با لایه چینی نا متقارن بصورت زیر

$$[90^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 90^\circ] \quad (۸-۵)$$

بنابراین پارامترهای بی بعد جدید می شوند

$$\begin{aligned} A_{11} &= 253.20, & D_{11} &= 0.08359, & D_{66} &= 0.03233, \\ I_2 &= 0.000328, & I_p &= 0.000657, & B_{16} &= .937, & c &= 0.05 \end{aligned} \quad (۹-۵)$$

و خارج از مرکزیت برابر است با $e_1 = e_2 = 0.0003$.

با استفاده از پارامترهای بدست آمده در بالا معادله نهایی برای یک مود و بدون کوپلینگ بصورت زیر می شود

$$2109255.49a_{f1}^6 - 1179.786a_{f1}^4\sigma + (0.165\sigma^2 + 0.0001)a_{f1}^2 = 0.412e_t^2 \quad (۱۰-۵)$$

و برای گسسته سازی توسط دو مود و بدون کوپلینگ می شود

$$523080.744a_{f1}^6 - 484.149a_{f1}^4\sigma + (0.112\sigma^2 + 0.000065)a_{f1}^2 = 0.34e_t^2 \quad (۱۱-۵)$$

و برای گسسته سازی یک مود و دو مود با کوپلینگ به ترتیب می شود

$$\begin{aligned} 1176931.678a_{f1}^6 - 726.224a_{f1}^4\sigma + (0.112\sigma^2 + 0.000066)a_{f1}^2 &= 0.34e_t^2 \\ 314961.871a_{f1}^6 - 375.685a_{f1}^4\sigma + (0.112\sigma^2 + 0.000066)a_{f1}^2 &= 0.34e_t^2 \end{aligned} \quad (۱۲-۵)$$

شکل های ۵-۱۷ و ۵-۱۸ منحنی پاسخ فرکانسی برای یک شفت کامپوزیتی با لایه چینی نا متقارن ذکر شده در بالا، با وجود کوپلینگ محوری-پیچشی و بدون آن برای گسسته سازی توسط یک مود و دو مود را نشان می دهند. همانطور که دیده می شود وجود کوپلینگ باعث می شود پاسخ دقیق تر شود. تفاوت بین دو حالت در نزدیکی تشدید قابل توجه است. مقایسه بین منحنی پاسخ فرکانسی اشکال ۵-۱۷ و ۵-۱۸ نشان می دهد که عبارت کوپلینگ اثر غیر خطی از نوع نرم شونده دارد.

شکل ۵-۱۹ مقایسه ای بین دو حالت با کوپلینگ و بدون کوپلینگ برای گسسته سازی توسط یک مود و دو مود را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود در گسسته سازی توسط دو مود وجود کوپلینگ تاثیر بیشتری بر روی منحنی پاسخ دارد.

نتیجه گیری و جمع بندی

در این تحقیق، ارتعاشات غیرخطی اجباری یک شفت کامپوزیت چرخان تحت تحریک ناشی از خارج از مرکزیت مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. معادلات حرکت محوری-خمشی-خمشی-پیچشی با بکارگیری روابط **اولیه** سه بعدی مواد و اصل همیلتون بدست آمدند. اینرسی چرخشی و اثر ژيروسکوپی در نظر گرفته شده است و به علت باریکی از تغییر شکل برشی صرف نظر شده است. برای تحلیل سیستم، روش مقیاس‌های چندگانه به معادلات حرکت گسسته شده توسط یک مود و دو مود اعمال شد. اگرچه فرکانس تحریک در همسایگی مود اول تنظیم شد، ولی گسسته سازی توسط یک مود پاسخ غیر صحیح می‌دهد و حداقل دو مود برای گسسته سازی لازم است.

اثرات میرایی خارجی، خارج از مرکزیت کلی و زاویه الیاف بروی پاسخ مورد بررسی قرار گرفتند. تمامی نتایج برای گسسته سازی تک مود و دو مود نشان داده شدند و نتایج با یکدیگر مقایسه شدند. اثر غیرخطی ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ شفت از نوع **سخت** شونده هستند. پدیده‌ی پرش وجود دارد و نقطه انشعاب تحت تاثیر میرایی خارجی و خارج از مرکزیت تغییر می‌کند بطوریکه با افزایش خارج از مرکزیت این تاثیر بیشتر می‌شود. زاویه الیاف نقطه انشعاب را نمی‌تواند تغییر دهد در حالی که با افزایش زاویه الیاف نسبت به مختصه محوری شفت سیستم نرم‌تر می‌شود. در پایان اثر کوپلینگ محوری-پیچشی بروی منحنی پاسخ فرکانسی مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که وقتی لایه چینی نا متقارن باشد این کوپلینگ باید در تحلیل‌ها در نظر گرفته شود تا نتایج دقیق‌تری حاصل شود. برای اعتبار سنجی به نتایج حاصل از روش تئوری اغتشاشات از شبیه سازی عددی استفاده شده است که همانطور از شکل‌ها برمی‌آید نتایج حاصل از این دو روش تطبیق خوبی با یکدیگر دارند.

پیشنهادهای برای ادامه کار

- بررسی ارتعاشات آزاد شفت‌های کامپوزیت بصورت غیر خطی
- تحلیل شفت‌های کامپوزیت با سرعت متغیر
- تحلیل شفت‌های کامپوزیت با دیسک آویزان
- تحلیل میرایی داخلی در شفت‌های کامپوزیت و تأثیرات آن بر ارتعاشات
- تحلیل اثر لایه چینی‌های متفاوت اعم از متقارن و نامتقارن
- بهینه سازی لایه چینی‌ها و استفاده از آن در جهت بهبود رفتار ارتعاشی شفت

$$\Gamma_1 = \left(-\frac{9}{2}\beta_1^2\pi^4\alpha\delta^2 + \frac{9}{2}I_p\Omega\pi^6\beta_1 + \frac{9}{2}\pi^8D_{11}\alpha\delta^2 + \frac{3}{2}I_p\Omega\pi^6\beta_1\delta^2 - \frac{3}{2}\beta_1^2\pi^4\alpha + \frac{3}{2}\pi^8D_{11}\alpha \right) A_{11}$$

$$\Lambda_1 = \left(\frac{3}{4}\pi^8D_{11}\alpha + \frac{9}{4}I_p\Omega\pi^6\beta_1 - \frac{9}{4}\beta_1^2\pi^4\alpha^3 + \frac{3}{4}I_p\Omega\pi^6\beta_1\alpha^2 + \frac{9}{4}\pi^8D_{11}\alpha^3 - \frac{3}{4}\beta_1^2\pi^4\alpha \right) A_{11}$$

$$\Psi_1 = \left(\frac{3}{4}\beta_1^2\pi^4\alpha - \frac{3}{4}\pi^8D_{11}\alpha - \frac{3}{4}I_p\Omega\pi^6\beta_1 \right) A_{11}$$

$$\Phi_1 = -2\pi^4D_{11}\alpha\beta_1 - I_p^2\Omega^2\pi^4\beta_1\alpha + 2\beta_1^3\alpha - \beta_1^2I_p\Omega\pi^2 - \pi^6D_{11}I_p\Omega$$

$$\Gamma_2 = \left(\frac{9}{2}I_p\Omega\pi^6\beta_2 - \frac{3}{2}\beta_2^2\pi^4\delta - \frac{9}{2}\beta_2^2\pi^4\alpha^2\delta + \frac{3}{2}I_p\Omega\pi^6\beta_2\alpha^2 + \frac{9}{2}\pi^8D_{11}\alpha^2\delta + \frac{3}{2}\pi^8D_{11}\delta \right) A_{11}$$

$$\Lambda_2 = \left(\frac{3}{4}I_p\Omega\pi^6\beta_2\delta^2 + \frac{9}{4}I_p\Omega\pi^6\beta_2 + \frac{3}{4}\pi^8D_{11}\delta + \frac{9}{4}\pi^8D_{11}\delta^3 - \frac{3}{4}\beta_2^2\pi^4\delta - \frac{9}{4}\beta_2^2\pi^4\delta^3 \right) A_{11}$$

$$\Psi_2 = \left(-\frac{3}{4}I_p\Omega\pi^6\beta_2 + \frac{3}{4}\beta_2^2\pi^4\delta - \frac{3}{4}\pi^8D_{11}\delta \right) A_{11}$$

$$\Phi_2 = 2\beta_2^3\delta - \beta_2^2I_p\Omega\pi^2 - I_p^2\Omega^2\pi^4\beta_2\delta - \pi^6D_{11}I_p\Omega - 2\pi^4D_{11}\delta\beta_2$$

$$\alpha = -\frac{i\left(\left(-2\sqrt{\pi^8\Omega^2I_p^2(\Omega^2I_p^2+4D_{11})}+(-4D_{11}-2\Omega^2I_p^2)\pi^4\right)^{3/2}\right)}{8I_{pp}\Omega\pi^6D_{11}} -$$

$$\frac{i\left(\pi^4(\Omega^2I_p^2+D_{11})\sqrt{-2\sqrt{\pi^8\Omega^2I_p^2(\Omega^2I_p^2+4D_{11})}+(-4D_{11}-2\Omega^2I_p^2)\pi^4}\right)}{2I_{pp}\Omega\pi^6D_{11}}$$

$$\delta = \frac{-i\left(\left(2\sqrt{\pi^8\Omega^2I_p^2(\Omega^2I_p^2+4D_{11})}+(-4D_{11}-2\Omega^2I_p^2)\pi^4\right)^{3/2}\right)}{8I_p\Omega\pi^6D_{11}}$$

$$-i\left(\pi^4(\Omega^2I_p^2+D_{11})\sqrt{2\sqrt{\pi^8\Omega^2I_p^2(\Omega^2I_p^2+4D_{11})}+(-4D_{11}-2\Omega^2I_p^2)\pi^4}\right)$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{3}\sqrt{9}\sqrt{\pi^2\left((A_{11}-4D_{66})^2\pi^2+\frac{1024}{9}B_{16}^2\right)}+\pi^2(A_{11}-4D_{66})\right)}{16B_{16}\pi}$$

$$\zeta = -\frac{3\left(-\frac{1}{3}\sqrt{9}\sqrt{\pi^2\left((A_{11}-4D_{66})^2\pi^2+\frac{1024}{9}B_{16}^2\right)}+\pi^2(A_{11}-4D_{66})\right)}{16B_{16}\pi}$$

$$\lambda = -\frac{3\left(\frac{1}{12}\sqrt{144}\sqrt{\left(\left(A_{11}-\frac{1}{4}D_{66}\right)^2\pi^2+\frac{256}{9}B_{16}^2\right)\pi^2+\left(A_{11}-\frac{1}{4}D_{66}\right)\pi^2}\right)}{32B_{16}\pi}$$

$$\eta = \frac{3\left(-\frac{1}{12}\sqrt{144}\sqrt{\left(\left(A_{11}-\frac{1}{4}D_{66}\right)^2\pi^2+\frac{256}{9}B_{16}^2\right)\pi^2+\left(A_{11}-\frac{1}{4}D_{66}\right)\pi^2}\right)}{32B_{16}\pi}$$

$$\mu = \frac{3\left(\frac{1}{12}\sqrt{144}\sqrt{\left(\left(A_{11}-\frac{1}{4}D_{66}\right)^2\pi^2+\frac{256}{9}B_{16}^2\right)\pi^2+\left(A_{11}-\frac{1}{4}D_{66}\right)\pi^2}\right)}{32B_{16}\pi}$$

$$\begin{aligned}
U1_2(T_0, T_1, T_2) = & \Pi_{u\phi1}(T_2)e^{-5i\beta_1T_0} + \Pi_{u\phi2}(T_2)e^{-5i\beta_2T_0} + \Pi_{u\phi3}(T_2)e^{-3i\beta_1T_0} + \Pi_{u\phi4}(T_2)e^{-3i\beta_2T_0} \\
& + \Pi_{u\phi5}(T_2)e^{-2i\beta_1T_0} + \Pi_{u\phi6}(T_2)e^{-2i\beta_2T_0} + \Pi_{u\phi7}(T_2)e^{-iT_0(-4\beta_2+\beta_1)} + \Pi_{u\phi8}(T_2)e^{-iT_0(-\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Pi_{u\phi9}(T_2)e^{-iT_0(-\beta_2+4\beta_1)} + \Pi_{u\phi10}(T_2)e^{-iT_0(\beta_2+\beta_1)} + \Pi_{u\phi11}(T_2)e^{-iT_0(\beta_2+4\beta_1)} + \Pi_{u\phi12}(T_2)e^{-iT_0(4\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Pi_{u\phi13}(T_2)e^{iT_0(-4\beta_2+\beta_1)} + \Pi_{u\phi14}(T_2)e^{iT_0(-\beta_2+\beta_1)} + \Pi_{u\phi15}(T_2)e^{iT_0(-\beta_2+4\beta_1)} + \Pi_{u\phi16}(T_2)e^{iT_0(\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Pi_{u\phi17}(T_2)e^{iT_0(\beta_2+4\beta_1)} + \Pi_{u\phi18}(T_2)e^{iT_0(4\beta_2+\beta_1)} + \Pi_{u\phi19}(T_2)e^{2i\beta_1T_0} + \Pi_{u\phi20}(T_2)e^{2i\beta_2T_0} + \Pi_{u\phi21}(T_2)e^{3i\beta_1T_0} \\
& + \Pi_{u\phi22}(T_2)e^{3i\beta_2T_0} + \Pi_{u\phi23}(T_2)e^{5i\beta_1T_0} + \Pi_{u\phi24}(T_2)e^{5i\beta_2T_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi2_2(T_0, T_1, T_2) = & \Theta2_{u\phi1}(T_2)e^{-5i\beta_1T_0} + \Theta2_{u\phi2}(T_2)e^{-5i\beta_2T_0} + \Theta2_{u\phi3}(T_2)e^{-3i\beta_1T_0} + \Theta2_{u\phi4}(T_2)e^{-3i\beta_2T_0} \\
& + \Theta2_{u\phi5}(T_2)e^{-2i\beta_1T_0} + \Theta2_{u\phi6}(T_2)e^{-2i\beta_2T_0} + \Theta2_{u\phi7}(T_2)e^{-iT_0(-4\beta_2+\beta_1)} + \Theta2_{u\phi8}(T_2)e^{-iT_0(-\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Theta2_{u\phi9}(T_2)e^{-iT_0(-\beta_2+4\beta_1)} + \Theta2_{u\phi10}(T_2)e^{-iT_0(\beta_2+\beta_1)} + \Theta2_{u\phi11}(T_2)e^{-iT_0(\beta_2+4\beta_1)} + \Theta2_{u\phi12}(T_2)e^{-iT_0(4\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Theta2_{u\phi13}(T_2)e^{iT_0(-4\beta_2+\beta_1)} + \Theta2_{u\phi14}(T_2)e^{iT_0(-\beta_2+\beta_1)} + \Theta2_{u\phi15}(T_2)e^{iT_0(-\beta_2+4\beta_1)} + \Theta2_{u\phi16}(T_2)e^{iT_0(\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Theta2_{u\phi17}(T_2)e^{iT_0(\beta_2+4\beta_1)} + \Theta2_{u\phi18}(T_2)e^{iT_0(4\beta_2+\beta_1)} + \Theta2_{u\phi19}(T_2)e^{2i\beta_1T_0} + \Theta2_{u\phi20}(T_2)e^{2i\beta_2T_0} \\
& + \Theta2_{u\phi21}(T_2)e^{3i\beta_1T_0} + \Theta2_{u\phi22}(T_2)e^{3i\beta_2T_0} + \Theta2_{u\phi23}(T_2)e^{5i\beta_1T_0} + \Theta2_{u\phi24}(T_2)e^{5i\beta_2T_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U2_2(T_0, T_2) = & \Pi2_{u\phi1}(T_2)e^{-5i\beta_1T_0} + \Pi2_{u\phi2}(T_2)e^{-5i\beta_2T_0} + \Pi2_{u\phi3}(T_2)e^{-3i\beta_1T_0} + \Pi2_{u\phi4}(T_2)e^{-3i\beta_2T_0} \\
& + \Pi2_{u\phi5}(T_2)e^{-2i\beta_1T_0} + \Pi2_{u\phi6}(T_2)e^{-2i\beta_2T_0} + \Pi2_{u\phi7}(T_2)e^{-iT_0(-4\beta_2+\beta_1)} + \Pi2_{u\phi8}(T_2)e^{-iT_0(-\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Pi2_{u\phi9}(T_2)e^{-iT_0(-\beta_2+4\beta_1)} + \Pi2_{u\phi10}(T_2)e^{-iT_0(\beta_2+\beta_1)} + \Pi2_{u\phi11}(T_2)e^{-iT_0(\beta_2+4\beta_1)} + \Pi2_{u\phi12}(T_2)e^{-iT_0(4\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Pi2_{u\phi13}(T_2)e^{iT_0(-4\beta_2+\beta_1)} + \Pi2_{u\phi14}(T_2)e^{iT_0(-\beta_2+\beta_1)} + \Pi2_{u\phi15}(T_2)e^{iT_0(-\beta_2+4\beta_1)} + \Pi2_{u\phi16}(T_2)e^{iT_0(\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Pi2_{u\phi17}(T_2)e^{iT_0(\beta_2+4\beta_1)} + \Pi2_{u\phi18}(T_2)e^{iT_0(4\beta_2+\beta_1)} + \Pi2_{u\phi19}(T_2)e^{2i\beta_1T_0} + \Pi2_{u\phi20}(T_2)e^{2i\beta_2T_0} \\
& + \Pi2_{u\phi21}(T_2)e^{3i\beta_1T_0} + \Pi2_{u\phi22}(T_2)e^{3i\beta_2T_0} + \Pi2_{u\phi23}(T_2)e^{5i\beta_1T_0} + \Pi2_{u\phi24}(T_2)e^{5i\beta_2T_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi1_2(T_0, T_2) = & \Theta1_{u\phi1}(T_2)e^{-5i\beta_1T_0} + \Theta1_{u\phi2}(T_2)e^{-5i\beta_2T_0} + \Theta1_{u\phi3}(T_2)e^{-3i\beta_1T_0} + \Theta1_{u\phi4}(T_2)e^{-3i\beta_2T_0} \\
& + \Theta1_{u\phi5}(T_2)e^{-2i\beta_1T_0} + \Theta1_{u\phi6}(T_2)e^{-2i\beta_2T_0} + \Theta1_{u\phi7}(T_2)e^{-iT_0(-4\beta_2+\beta_1)} + \Theta1_{u\phi8}(T_2)e^{-iT_0(-\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Theta1_{u\phi9}(T_2)e^{-iT_0(-\beta_2+4\beta_1)} + \Theta1_{u\phi10}(T_2)e^{-iT_0(\beta_2+\beta_1)} + \Theta1_{u\phi11}(T_2)e^{-iT_0(\beta_2+4\beta_1)} + \Theta1_{u\phi12}(T_2)e^{-iT_0(4\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Theta1_{u\phi13}(T_2)e^{iT_0(-4\beta_2+\beta_1)} + \Theta1_{u\phi14}(T_2)e^{iT_0(-\beta_2+\beta_1)} + \Theta1_{u\phi15}(T_2)e^{iT_0(-\beta_2+4\beta_1)} + \Theta1_{u\phi16}(T_2)e^{iT_0(\beta_2+\beta_1)} \\
& + \Theta1_{u\phi17}(T_2)e^{iT_0(\beta_2+4\beta_1)} + \Theta1_{u\phi18}(T_2)e^{iT_0(4\beta_2+\beta_1)} + \Theta1_{u\phi19}(T_2)e^{2i\beta_1T_0} + \Theta1_{u\phi20}(T_2)e^{2i\beta_2T_0} + \Theta1_{u\phi21}(T_2)e^{3i\beta_1T_0} \\
& + \Theta1_{u\phi22}(T_2)e^{3i\beta_2T_0} + \Theta1_{u\phi23}(T_2)e^{5i\beta_1T_0} + \Theta1_{u\phi24}(T_2)e^{5i\beta_2T_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V1_2(T_0, T_2) = & \Pi_{vw1}e^{-iT_0(\beta_1-\beta_{32})} + \Pi_{vw2}e^{-iT_0(\beta_1+\beta_{32})} + \Pi_{vw3}e^{-iT_0(\beta_1-\beta_\phi)} + \Pi_{vw4}e^{-iT_0(\beta_1+\beta_\phi)} + \Pi_{vw5}e^{-iT_0(4\beta_1-\beta_{31})} \\
& + \Pi_{vw6}e^{-iT_0(\beta_2-\beta_{32})} + \Pi_{vw7}e^{-iT_0(\beta_2+\beta_{32})} + \Pi_{vw8}e^{-iT_0(\beta_2-\beta_\phi)} + \Pi_{vw9}e^{-iT_0(\beta_2+\beta_\phi)} + \Pi_{vw10}e^{-iT_0(4\beta_2-\beta_{2\phi})} \\
& + \Pi_{vw11}e^{-iT_0(-\beta_{31}+4\beta_2)} + \Pi_{vw12}e^{-iT_0(\beta_{31}+4\beta_1)} + \Pi_{vw13}e^{-iT_0(\beta_{31}+4\beta_2)} + \Pi_{vw14}e^{-iT_0(-\beta_{2\phi}+4\beta_1)} \\
& + \Pi_{vw15}e^{-iT_0(\beta_{2\phi}+4\beta_1)} + \Pi_{vw16}e^{-iT_0(\beta_{2\phi}+4\beta_2)} + \Pi_{vw17}e^{iT_0(\beta_1-\beta_{32})} + \Pi_{vw18}e^{iT_0(\beta_1+\beta_{32})} + \Pi_{vw19}e^{iT_0(\beta_1-\beta_\phi)} \\
& + \Pi_{vw20}e^{iT_0(\beta_1+\beta_\phi)} + \Pi_{vw21}e^{iT_0(4\beta_1-\beta_{31})} + \Pi_{vw22}e^{iT_0(\beta_2-\beta_{32})} + \Pi_{vw23}e^{iT_0(\beta_2+\beta_{32})} + \Pi_{vw24}e^{iT_0(\beta_2-\beta_\phi)} \\
& + \Pi_{vw25}e^{iT_0(\beta_2+\beta_\phi)} + \Pi_{vw26}e^{iT_0(4\beta_2-\beta_{2\phi})} + \Pi_{vw27}e^{iT_0(-\beta_{31}+4\beta_2)} + \Pi_{vw28}e^{iT_0(\beta_{31}+4\beta_1)} + \Pi_{vw29}e^{iT_0(\beta_{31}+4\beta_2)} \\
& + \Pi_{vw30}e^{iT_0(-\beta_{2\phi}+4\beta_1)} + \Pi_{vw31}e^{iT_0(\beta_{2\phi}+4\beta_1)} + \Pi_{vw32}e^{iT_0(\beta_{2\phi}+4\beta_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W 1_2(T_0, T_2) = & \Theta 1_{vw 1} e^{-iT_0(\beta_1 - \beta_{32})} + \Theta 1_{vw 2} e^{-iT_0(\beta_1 + \beta_{32})} + \Theta 1_{vw 3} e^{-iT_0(\beta_1 - \beta_\phi)} + \Theta 1_{vw 4} e^{-iT_0(\beta_1 + \beta_\phi)} + \Theta 1_{vw 5} e^{-iT_0(4\beta_1 - \beta_{31})} \\
& + \Theta 1_{vw 6} e^{-iT_0(\beta_2 - \beta_{32})} + \Theta 1_{vw 7} e^{-iT_0(\beta_2 + \beta_{32})} + \Theta 1_{vw 8} e^{-iT_0(\beta_2 - \beta_\phi)} + \Theta 1_{vw 9} e^{-iT_0(\beta_2 + \beta_\phi)} + \Theta 1_{vw 10} e^{-iT_0(4\beta_2 - \beta_{2\phi})} \\
& + \Theta 1_{vw 11} e^{-iT_0(-\beta_{31} + 4\beta_2)} + \Theta 1_{vw 12} e^{-iT_0(\beta_{31} + 4\beta_1)} + \Theta 1_{vw 13} e^{-iT_0(\beta_{31} + 4\beta_2)} + \Theta 1_{vw 14} e^{-iT_0(-\beta_{2\phi} + 4\beta_1)} \\
& + \Theta 1_{vw 15} e^{-iT_0(\beta_{2\phi} + 4\beta_1)} + \Theta 1_{vw 16} e^{-iT_0(\beta_{2\phi} + 4\beta_2)} + \Theta 1_{vw 17} e^{iT_0(\beta_1 - \beta_{32})} + \Theta 1_{vw 18} e^{iT_0(\beta_1 + \beta_{32})} + \Theta 1_{vw 19} e^{iT_0(\beta_1 - \beta_\phi)} \\
& + \Theta 1_{vw 20} e^{iT_0(\beta_1 + \beta_\phi)} + \Theta 1_{vw 21} e^{iT_0(4\beta_1 - \beta_{31})} + \Theta 1_{vw 22} e^{iT_0(\beta_2 - \beta_{32})} + \Theta 1_{vw 23} e^{iT_0(\beta_2 + \beta_{32})} + \Theta 1_{vw 24} e^{iT_0(\beta_2 - \beta_\phi)} \\
& + \Theta 1_{vw 25} e^{iT_0(\beta_2 + \beta_\phi)} + \Theta 1_{vw 26} e^{iT_0(4\beta_2 - \beta_{2\phi})} + \Theta 1_{vw 27} e^{iT_0(-\beta_{31} + 4\beta_2)} + \Theta 1_{vw 28} e^{iT_0(\beta_{31} + 4\beta_1)} + \Theta 1_{vw 29} e^{iT_0(\beta_{31} + 4\beta_2)} \\
& + \Theta 1_{vw 30} e^{iT_0(-\beta_{2\phi} + 4\beta_1)} + \Theta 1_{vw 31} e^{iT_0(\beta_{2\phi} + 4\beta_1)} + \Theta 1_{vw 32} e^{iT_0(\beta_{2\phi} + 4\beta_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V 2_2(T_0, T_2) = & \Pi 2_{vw 1}(T_2) e^{-iT_0(\beta_1 - \beta_{31})} + \Pi 2_{vw 2}(T_2) e^{-iT_0(\beta_1 + \beta_{u1})} + \Pi 2_{vw 3}(T_2) e^{-iT_0(\beta_1 - \beta_{\phi 2})} \\
& + \Pi 2_{vw 4}(T_2) e^{-iT_0(\beta_1 + \beta_{\phi 2})} + \Pi 2_{vw 5}(T_2) e^{-iT_0(\beta_2 - \beta_{u1})} + \Pi 2_{vw 6}(T_2) e^{-iT_0(\beta_2 + \beta_{u1})} + \Pi 2_{vw 7}(T_2) e^{-iT_0(\beta_2 - \beta_{\phi 2})} \\
& + \Pi 2_{vw 8}(T_2) e^{-iT_0(\beta_2 + \beta_{\phi 2})} + \Pi 2_{vw 9}(T_2) e^{iT_0(\beta_1 - \beta_{u1})} + \Pi 2_{vw 10}(T_2) e^{iT_0(\beta_1 + \beta_{u1})} + \Pi 2_{vw 11}(T_2) e^{iT_0(\beta_1 - \beta_{\phi 2})} \\
& + \Pi 2_{vw 12}(T_2) e^{iT_0(\beta_1 + \beta_{\phi 2})} + \Pi 2_{vw 13}(T_2) e^{iT_0(\beta_2 - \beta_{u1})} + \Pi 2_{vw 14}(T_2) e^{iT_0(\beta_2 + \beta_{u1})} + \Pi 2_{vw 15}(T_2) e^{iT_0(\beta_2 - \beta_{\phi 2})} \\
& + \Pi 2_{vw 16}(T_2) e^{iT_0(\beta_2 + \beta_{\phi 2})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W 2_2(T_0, T_2) = & \Theta 2_{vw 1}(T_2) e^{-iT_0(\beta_1 - \beta_{31})} + \Theta 2_{vw 2}(T_2) e^{-iT_0(\beta_1 + \beta_{u1})} + \Theta 2_{vw 3}(T_2) e^{-iT_0(\beta_1 - \beta_{\phi 2})} \\
& + \Theta 2_{vw 4}(T_2) e^{-iT_0(\beta_1 + \beta_{\phi 2})} + \Theta 2_{vw 5}(T_2) e^{-iT_0(\beta_2 - \beta_{u1})} + \Theta 2_{vw 6}(T_2) e^{-iT_0(\beta_2 + \beta_{u1})} + \Theta 2_{vw 7}(T_2) e^{-iT_0(\beta_2 - \beta_{\phi 2})} \\
& + \Theta 2_{vw 8}(T_2) e^{-iT_0(\beta_2 + \beta_{\phi 2})} + \Theta 2_{vw 9}(T_2) e^{iT_0(\beta_1 - \beta_{u1})} + \Theta 2_{vw 10}(T_2) e^{iT_0(\beta_1 + \beta_{u1})} + \Theta 2_{vw 11}(T_2) e^{iT_0(\beta_1 - \beta_{\phi 2})} \\
& + \Theta 2_{vw 12}(T_2) e^{iT_0(\beta_1 + \beta_{\phi 2})} + \Theta 2_{vw 13}(T_2) e^{iT_0(\beta_2 - \beta_{u1})} + \Theta 2_{vw 14}(T_2) e^{iT_0(\beta_2 + \beta_{u1})} + \Theta 2_{vw 15}(T_2) e^{iT_0(\beta_2 - \beta_{\phi 2})} \\
& + \Theta 2_{vw 16}(T_2) e^{iT_0(\beta_2 + \beta_{\phi 2})}
\end{aligned}$$

- [١] Zinberg, H., Symonds, M.F., 1970. The Development of an advanced composite Tail Rotor Driveshaft. Presented at the 26th Annual Forum of the American helicopter Society, Washington, DC, June.
- [٢] dos Reis, H.L.M., Goldman, R.B., Verstrate, P.H., 1987. Thin-walled laminated composite cylindrical tubes: Part III---Critical speed analysis. *Journal of Composites Technology and Research* 9, 58-62.
- [٣] Ruhl, R.L., Booker, J.F., 1972. A finite element model for distributed parameter turborotor systems. *Journal of Engineering for Industry* (Feb.), 126-132.
- [٤] Bert, C.W., 1992. The effect of bending-twisting coupling on the critical speed of a driveshaft. In: *Proceedings, 6th Japan-US Conference on Composites Materials*, Orlando, FL. Technomic, Lancaster, PA, pp. 29-36.
- [٥] Kim, C.D., Bert, C.W., 1993. Critical speed analysis of laminated composite, hollow drive shafts. *Composites Engineering* 3, 633-643.
- [٦] Bert, C.W., Kim, C.D., 1995. Whirling of composite-material driveshafts including bending-twisting coupling and transverse shear deformation. *Journal of Vibration and Acoustics* 117, 17-21.
- [٧] Singh, S.P., Gupta, K., 1996. Composite shaft rotordynamic analysis using a layerwise theory. *Journal of Sound and Vibration* 191 (5), 739-756.
- [٨] Chen, L.-W., Peng, W.-K., 1998. Dynamic stability of rotating composite shafts under periodic axial compressive loads. *Journal of Sound and Vibration* 212 (2), 215-230.
- [٩] Song, O., Jeong, N.-H., Librescu, L., 2001. Implication of conservative and gyroscopic forces on vibration and stability of an elastically tailored rotating shaft modeled as a composite thin-walled beam. *Journal of Acoustical Society of America* 109 (3), 972-981.
- [١٠] Chang, M.-Y., Chen, J.-K., Chang, C.-Y., 2004. A simple spinning laminated composite shaft model. *Journal of Solids and Structures* 41, 637-662.
- [١١] Chang, C.-Y., Chang, M.-Y., Huang, J.H., 2004. Vibration analysis of rotating composite shafts containing randomly oriented reinforcements. *Journal of Composite Structures* 63, 21-32.

- [۱۲] Banerjee, J.R., Su, H., 2006. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of a spinning composite beam. *Journal of Computers and Structures* 84, 1208-1214.
- [۱۳] Sino, R., Baranger, T.N., Chatelet, E., Jacquet, G., 2008. Dynamic analysis of a rotating composite shaft. *Journal of Composites Science and Technology* 68, 337-345.
- [۱۴] Badie, M.A., Mahdi, E., Hamouda, A.M.S., 2011. An investigation into hybrid/glass fiber reinforced epoxy composite automotive drive shafts. *Journal of Materials and Design* 32, 1485-1500.
- [۱۵] Montagnier, O., Hochard, C., 2013. Optimisation of hybrid high-modulus/high-strength carbon fiber reinforced plastic composite drive. *Journal of Materials and Designs* 46, 88-100.
- [۱۶] Montagnier, O., Hochard, C., 2014. Dynamics of a supercritical composite shaft mounted on viscoelastic supports. *Journal of Sounds and Vibration* 333, 470-484.
- [۱۷] Yongsheng, R., Qiyi, D., Xingqi, Z., 2013. Modeling and dynamic analysis of rotating composite shaft. *Vibroengineering* 15, 1790-1806.
- [۱۸] Yongsheng, R., Yuhuan, Z., Qiyi, D., Xingqi, Z., 2015. Primary resonance of a rotating composite shaft with geometrical nonlinearity. *Vibroengineering* 17, 1694-1706.
- [۱۹] Hosseini, S.A.A., Khadem, S.E., 2009. Free vibration analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia. *Mechanism and Machine Theory* 44, 272-288.
- [۲۰] Hosseini, S.A.A., Khadem, S.E., 2009. Combination resonances in a rotating shaft. *Mechanism and Machine Theory* 44, 1535-1547.
- [۲۱] Khadem, S.E., Shahgholi, M., Hosseini, S.A.A., 2010. Primary resonances of a nonlinear in-extensional rotating shaft. *Mechanism and Machine Theory* 45, 1067-1081.
- [۲۲] Hosseini, S.A.A., Zamanian, M., 2013. Multiple scales solution for free vibrations of a rotating shaft with stretching nonlinearity. *Scientia Iranica* 20, 131-140.
- [۲۳] Shahgholi, M., Khadem, S.E., 2012. Primary and parametric resonances of asymmetrical rotating shafts with stretching nonlinearity. *Mechanism and Machine Theory* 51, 131-144.
- [۲۴] Pai, P.F., Qian, X., Du, X., 2013. Modeling and dynamic characteristics of spinning Rayleigh beams. *International Journal of Mechanical Sciences* 68, 291-303.

- [۲۵] Zhu, K., Chung, J., 2015. Nonlinear lateral vibrations of a deploying Euler-Bernoulli beam with a spinning motion. *International Journal of Mechanical Sciences* 90, 200-212.
- [۲۶] Hosseini, S.A.A., Zamanian, M., Shams, SH, Shooshtari, A., 2014. Vibration analysis of geometrically nonlinear spinning beams. *Mechanism and Machine Theory* 78, 15-35.
- [۲۷] Giancarlo Genta (2005) *Dynamics of rotating systems*
- [۲۸] A.Foppl, “Das problem der laval’shen turbinewelle,” *Civilingenieur*, pp. 332—342, 1895.
- [۲۹] G. Belluzzo, *Le turbine a vapore ed a gas*. Hoepli, Milano, Italy, 1905.
- [۳۰] A. Stodola, *Steam and Gas Turbines*. Mc Graw-Hill, New York, 1927.
- [۳۱] H. Jeffcott, “The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a wirling speed-the effect of want of balance,” *Phil. Mag.*, vol. 37,no. 6, pp. 304—314, 1919.
- [۳۲]G. Genta, *Vibration of Structures and Machines*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [۳۳]L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*. Wiley, New York, 1990.
- [۳۴] D. Inman, *Vibration with Control, Measurement, and Stability*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [۳۵] A. Muszynska, “Rotor instability,” *Senior Mechanical Engineering Seminar*, Carson City, Nevada, 1984.
- [۳۶] J.N. Reddy., (2004) *Mechanics of laminated composite plates and shells*
- [۳۷] Hosseini, S.A.A., 2008, *nonlinear vibration and stability analysis of rotating shafts*, PhD Thesis, Tarbiat Modares University (in Persian).
- [۳۸] Nayfeh, A.H., 1981, *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley-Interscience, New York.
- [۳۹] Nayfeh, A.H., and Mook, D.T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience, New York.

[१०] Hagedorn, P., DasGupta, A., 2007. Vibrations and Waves in Continues Mechanical Systems. Wiley-Interscience, New York.

Abstract

In this paper, the nonlinear dynamics of unbalanced composite spinning shaft is studied. Flexural-flexural-extensional-torsional equations of motion are derived via utilizing the three-dimensional constitutive relations of the material and application of Hamilton's principle. The gyroscopic effects, rotary inertia and coupling due to material anisotropy are included while the shear deformation is neglected. To analyze the rotor dynamical behavior, the full form of the equations without any simplification assumption (e.g. stretching or shortening assumption) are used. The method of multiple scales is applied to the discretized equations. An analytical expression as a function of the system parameters describing the forced vibration of spinning composite shaft in the neighborhood of the primary resonance is obtained. The discretization is done with both one and two modes and the results are compared. It is shown that although the excitation is tuned in the neighborhood of the first mode, one-mode discretization is not sufficient and it leads to inaccurate results. It shows the necessity of employing at least two modes in discretization due to coupling in the equations. The effects of the external damping, eccentricity and the lamination angle on the vibration amplitude are investigated. In addition, the effect of extensional-torsional coupling on the frequency response curves are investigated. To validate the perturbation results, numerical simulation is used.

Key words: rotating shaft; composite shaft; forced vibration; multiple scales method.



Mechanical Engineering Department
Engineering and Technical Facult
Kharazmi University

Nonlinear Dynamic Analysis of Rotating Composite Shaft

Supervisor

Dr. Seyed Ali Asghar Hosseini

Advisor

Dr. Mehdi Zamanian

By

Hossein Shaban Ali Nezhad

September 2015