مشتقات جزئی در توابع چند متغیره :

در این جا، مشتق‌گیری جزئی توابع چند متغیره را بیان می‌کنیم. ابتدا برای توابع دو متغیره تعریف می‌کنیم.

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. مشتق جزئی f نسبت به x را با نماد $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا f_x نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

به زبان ساده، در مشتق جزئی نسبت به x یعنی $\frac{\partial f}{\partial x}$ (یا f_x)، متغیرها x است و y را مانند عدد ثابت در نظر می‌گیریم.

به صورت مشابه، مشتق جزئی f نسبت به y را با نماد $\frac{\partial f}{\partial y}$ یا f_y نمایش می‌دهیم و برابر است با حد زیر

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

به شرطی که این حد موجود باشد،

به زبان ساده، در مشتق جزئی نسبت به y یعنی $\frac{\partial f}{\partial y}$ (یا f_y)، متغیرها y است و x ها را مانند عدد ثابت در نظر می‌گیریم. به f_x، f_y مشتقات جزئی مرتبه اول می‌گوییم.

مثال: فرض کنید $f(x,y) = x^3y^2 + 2xy + 4y$. مشتق‌های جزئی مرتبه اول f را محاسبه کنید.

حل: تابع داده شده، دو متغیره است، پس دو مشتق جزئی f_x، f_y را خواهیم داشت.

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2 + 2xy + 4y) = 3x^2y^2 + 2y$$

توضیح: یعنی تمام y ها را مانند عدد ثابت در نظر بگیریم زیرا متغیرها در اینجا x است

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + 2xy + 4y) = 2x^3y + 2x + 4$$

توضیح: یعنی تمام x ها را مانند عدد ثابت در نظر بگیریم زیرا متغیرها در اینجا y است

مثال: فرض کنید $f(x,y)=4y+\sqrt{x}\,y^5-4$. مشتقات جزئی مرتبه اول f را بیابید.

حل: دو متغیر داریم، پس باید f_x و f_y را بیابیم. در f_x، متغیرها x است، پس تمام y ها را به عنوان عدد ثابت و ضریب در نظر می‌گیریم. و در f_y، متغیرها y است، پس تمام x ها را به عنوان عدد ثابت و ضریب در نظر می‌گیریم. پس خواهیم داشت

$$f(x,y)=4y+\sqrt{x}\,y^5-4 \longrightarrow \begin{cases} f_x = 0+\frac{1}{2\sqrt{x}}y^5-0=\frac{1}{2\sqrt{x}}y^5 \\ f_y = 4+\sqrt{x}\times 5y^4-0=4+5\sqrt{x}\,y^4 \end{cases}$$

مثال: مشتقات جزئی مرتبه اول تابع $f(x,y,z)=x^3y^2\sin z+xz^2+y$ را بیابید.

حل: تابع سه متغیر دارد، پس سه مشتق جزئی f_x ، f_y ، f_z را باید محاسبه کنیم.

برای محاسبه f_x، متغیرها x است، پس هر چیزی غیر از x مثل عدد ثابت در نظر می‌گیریم یعنی تمام y ها و z ها مثل عدد ثابت می‌بینیم. برای محاسبه f_y، متغیرها y است، پس هر چیزی غیر از y مثل عدد ثابت در نظر می‌گیریم یعنی تمام x ها و z ها مثل عدد ثابت می‌بینیم. برای محاسبه f_z، متغیرها z است، پس هر چیزی غیر از z را عدد ثابت می‌بینیم یعنی تمام x ها و y ها را به عنوان عدد ثابت در نظر می‌گیریم.

با این توضیحات، مشتق‌های جزئی به صورت زیر می‌شوند.

$$f(x,y,z)=x^3y^2\sin z+xz^2+y \longrightarrow \begin{cases} f_x = 3x^2y^2\sin z+z^2 \\ f_y = 2x^3y\sin z+1 \\ f_z = x^3y^2\cos z+2xz \end{cases}$$

مثال: مشتق‌های جزئی مرتبه اول $f(x,y)=e^x(2x+y)$ را بیابید.

حل: داریم

$$f_x=e^x(2x+y)+e^x(2+0)=e^x(2x+y)+2e^x$$

$$f_y=e^x(0+1)=e^x$$

آهنگ تغییر: گاهی اوقات از مشتق به عنوان آهنگ تغییر نام می‌برند. به عبارت دیگر $f_x(a,b)$ آهنگ تغییر تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) نسبت به x است به همین صورت، $f_y(a,b)$ آهنگ تغییر تابع $f(x,y)$ در نقطه (a,b) نسبت به y است.

مثال: یک صفحه فلزی را در نظر بگیرید. دمای این صفحه فلزی در نقطه (x,y) از رابطه $T(x,y)=54-\frac{2}{3}x^2-4y^2$ بدست می‌آید. آهنگ تغییر T را در نقطه $(2,3)$ روی خط‌های $y=3$ و $x=2$ بدست آورید.

حل: آهنگ تغییر T روی خط $y=3$ یعنی مشتق جزئی نسبت به x (زیرا $y=3$ ثابت است)

می‌دانیم $T_x=-\frac{4}{3}x$ و در نتیجه در نقطه $(2,3)$ برابر است با

$$T_x(2,3)=-\frac{4}{3}\times 2=\frac{-8}{3}$$

آهنگ تغییر T روی خط $x=2$ یعنی مشتق جزئی نسبت به y (زیرا $x=2$ ثابت است)،

می‌دانیم $T_y=-8y$ و در نتیجه در نقطه $(2,3)$ برابر است با

$$T_y(2,3)=-8\times 3=-24$$

تمرین: دمای یک صفحه فلزی در نقطه (x,y) از رابطه $T(x,y)=10(x^2+y^2)^2$ بدست می‌آید. آهنگ تغییر T را در نقطه $(1,2)$ در جهت محور x و در جهت محور y بدست آورید.

مشتق‌های جزئی مراتب بالاتر

همان طور که برای توابع یک متغیره، مشتق اول و دوم و سوم و ... را معرفی و محاسبه ~~می‌کنند~~ می‌شود، برای توابع چند متغیره نیز مشتق‌های جزئی مراتب بالاتر تعریف می‌شوند.

فرض کنید $f(x,y)$ تابع دو متغیره باشد. توابع f_x و f_y مشتق‌های جزئی مرتبه اول f هستند. با مشتق گرفتن مجدد از این توابع، مشتق‌های جزئی مراتب بالاتر بدست می‌آید.

مشتق های جزئی مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می شوند

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
یعنی از f_x یک بار دیگر نسبت به x مشتق بگیریم

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
یعنی از f_y یک بار دیگر نسبت به y مشتق بگیریم

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
یعنی از f_x نسبت به y مشتق بگیریم

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
یعنی از f_y نسبت به x مشتق بگیریم.

مثال: مشتق های جزئی مرتبه دوم تابع $f(x,y)=3x^2-\sqrt{2}\,xy^2+y^5-2$ را بیابید.

حل: ابتدا مشتق های جزئی مرتبه اول را باید بیابیم

$$f_x = 6x - \sqrt{2}\,y^2 \longrightarrow \begin{cases} f_{xx} = 6 \\ f_{xy} = -2\sqrt{2}\,y \end{cases}$$

یعنی از f_x دوبار نسبت به x مشتق بگیریم

یعنی از f_x نسبت به y مشتق بگیریم

$$f_y = -2\sqrt{2}\,xy + 5y^4 \longrightarrow \begin{cases} f_{yy} = -2\sqrt{2}\,x + 20y^3 \\ f_{yx} = -2\sqrt{2}\,y \end{cases}$$

یعنی از f_y دوبار نسبت به y مشتق بگیریم

یعنی از f_y نسبت به x مشتق بگیریم

مثال: فرض کنید $f(x,y)=xy^2+y\sin x-3$ ، مشتق های جزئی مرتبه دوم آن را بیابید.

حل: داریم:

$$f_x = y^2 + y\cos x$$

پس

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2+y\cos x\right) = -y\sin x$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2+y\cos x\right) = 2y+\cos x$$

و همچنین $f_y = 2xy + \sin x$

پس

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + \sin x) = 2x$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + \sin x) = 2y + \cos x$$

تذکر: در حالت کلی ممکن است $f_{xy} \neq f_{yx}$، اما اگر f در نقطه (a,b) پیوسته باشد و مشتقات جزئی آن یعنی f_x و f_y و f_{xy} و f_{yx} نیز در (a,b) پیوسته باشند، آنگاه خواهیم داشت

$f_{yx}(a,b) = f_{xy}(a,b)$ و در نتیجه $f_{xy} = f_{yx}$.

تمرین: مشتقات جزئی مرتبه دوم $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + 5x^2y + x$ را بیابید.

مثال ۵: فرض کنید $f(x,y) = \sin(xy^2)$، مشتق های جزئی مرتبه دوم f را بیابید.

حل: ابتدا مشتقات جزئی مرتبه اول f را محاسبه می کنیم. داریم

$$f_x = y^2\cos(xy^2) \quad , \quad f_y = 2xy\cos(xy^2)$$

حال داریم

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2\cos xy^2) = -y^4\sin(xy^2)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2\cos xy) = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy\cos(xy^2)) = 2x\cos(xy^2) - 4x^2y^2\sin(xy^2)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy\cos(xy^2)) = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2)$$

تعریف: فرض کنید $f(x,y)$ تابع دو متغیره باشد. معادله $f_{xx} + f_{yy} = 0$ را معادله لاپلاس می نامیم. اگر $f(x,y,z)$ تابع سه متغیره باشد، معادله لاپلاس آن به صورت $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ خواهد بود.

تابعی که در معادله لاپلاس صدق می کند را تابع همساز یا هارمونیک می نامند.

مثال: بررسی کنید کدام یک از تابع‌های زیر همساز است.

الف: $f(x,y) = x^2y^2 + x$ ب: $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

حل: مورد الف را بررسی می‌کنیم. باید f_{xx} و f_{yy} را محاسبه کنیم. برای این کار داریم

$$f_x = 2xy^2+1 \Rightarrow f_{xx} = 2y^2 \quad \text{و} \quad f_y = 2x^2y \Rightarrow f_{yy} = 2x^2$$

بنابراین $f_{xx} + f_{yy} = 2y^2+2x^2 \neq 0$، پس تابع f مورد الف همساز نیست.

برای مورد ب، خودتان بررسی کنید.

قاعده زنجیره‌ای برای توابع چندمتغیره: برای توابع دومتغیره، دو حالت قاعده زنجیره‌ای داریم.

حالت اول: فرض کنید $z = f(x,y)$ تابع دومتغیره از x و y باشد و خود x و y توابعی برحسب t باشند، در این صورت داریم

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{یا} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

(یعنی در تابع f متغیر t ظاهر نشده است که بتوانیم مستقیم نسبت به t از آن مشتق بگیریم. در f متغیرهای x و y ظاهر شده و در x و y متغیر t ظاهر شده است، پس برای اینکه از f نسبت به t مشتق بگیریم، باید از x و y به عنوان واسطه استفاده کنیم)

بهترین راه برای به خاطر سپردن قاعده زنجیره‌ای استفاده از نمودارهای زیر است. برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial t}$ کافی است از f شروع کنیم و از هر مسیری که به t می‌رسد حرکت کنیم و سپس مشتق‌ها را در هم ضرب و در آخر همه را با هم جمع کنیم و در آنها x و y را جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

f مستقیم با t نمی‌رسد باید به راه از x و y عبور کند پس از آنها کمک می‌گیریم

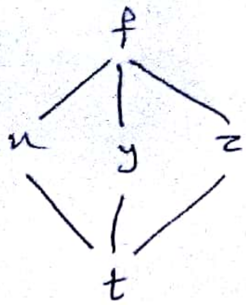
از شاخه چپ، f به x می‌رسد پس $\frac{\partial f}{\partial x}$ را محاسبه کنیم

بعد x به t می‌رسد پس $\frac{\partial x}{\partial t}$ را محاسبه کنیم

از شاخه سمت راست، f به y می‌رسد پس $\frac{\partial f}{\partial y}$ را داریم

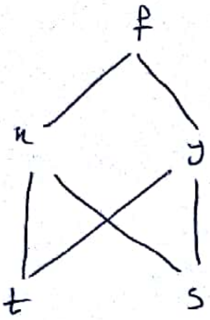
y به t می‌رسد پس $\frac{\partial y}{\partial t}$ را محاسبه کنیم

برای تابع سه متغیره $w=f(x,y,z)$ ، مشتق زنجیره‌ای حالت اول به صورت زیر است



$$\frac{\partial f}{\partial t}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}}_{\text{شاخه چپ}}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}}_{\text{شاخه وسط}}+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}}_{\text{شاخه راست}}$$

حالت دوم فرض کنید $z=f(x,y)$ و $x=g_1(t,s)$ و $y=g_2(t,s)$ ، در این صورت



$$\frac{\partial f}{\partial t}=\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}}^{\text{شاخه چپ}}+\overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}}^{\text{شاخه راست}}$$ و

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

یعنی در f مستقیماً t و s ظاهر نشده ولی می‌خواهیم نسبت به t و s از آن مشتق بگیریم، از روی نمودار هر روی ببینیم از چه شاخه‌هایی می‌توانیم از f به t و s برسیم.

مثال: فرض کنید $f=e^x\sin y$ و $x=t^2+1$ و $y=Ln\,t$ ، عبارت $\frac{\partial f}{\partial t}$ را بیابید.

حل: در f متغیر t ظاهر نشده است پس نمی‌توانیم مستقیماً حساب کنیم. از روی شاخه‌های نمودار زیر انجام می‌دهیم

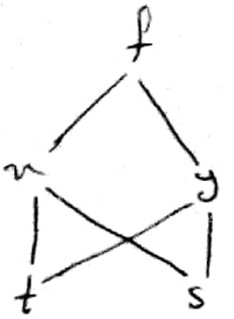
$$\frac{\partial f}{\partial t}=\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}}^{\text{شاخه چپ}}+\overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}}^{\text{شاخه راست}}$$

$$=e^x\sin y\times 2t+e^x\cos y\times\frac{1}{t}$$

$$=e^{t^2+1}\sin(Ln\,t)\times 2t+e^{t^2+1}\sin(Ln\,t)\times\frac{1}{t}$$

مثال: فرض کنید $f=\sqrt{x}+y^2x^3$ و $x=1+t^2+s^2$ و $y=ts$ ، عبارات $\frac{\partial f}{\partial t}$ و $\frac{\partial f}{\partial s}$ را بیابید. چون t و s در f مستقیماً ظاهر نشده‌اند پس باید از مشتق زنجیره‌ای استفاده کنیم، برای این کار، از نمودار زیر کمک می‌گیریم تا ببینیم f از بالا از چه شاخه‌هایی به t و s می‌رسد جداجدا حساب می‌کنیم.

۲۵



$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$=\left(\frac{1}{۲\sqrt{x}}+۳y^{۲}x^{۲}\right)\times(۲t)+۲yx^{۳}\times s$$

$$=\left(\frac{1}{۲\sqrt{(1+t^{۲}+s^{۲})}}+۳(ts)^{۲}(1+t^{۲}+s^{۲})^{۲}\right)\times ۲t+۲ts(1+t^{۲}+s^{۲})^{۳}\times s$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$=\left(\frac{1}{۲\sqrt{x}}+۳y^{۲}x^{۲}\right)\times ۲s+۲yx^{۳}\times t$$

$$=\left(\frac{1}{۲\sqrt{(1+t^{۲}+s^{۲})}}+۳(ts)^{۲}(1+t^{۲}+s^{۲})^{۲}\right)۲s+۲ts(1+t^{۲}+s^{۲})^{۳}\times t$$