به نام خدا

پروژه ۱ درس محاسبات عددی **دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات تهران** **دکترمحمدعلی بدری**

۲ نمره **کارشناسی مهندسی هوافضا** **نیمسال ۲-۱۴۰۱-۱۴۰۲**

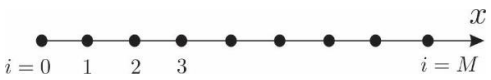
معادله دیفرانسیل بیضی‌گون زیر را به روش اختلاف محدود حل کنید:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -100e^{-x} \qquad 0 \le x \le 1$$

$$u(0) = U_L = 10 \qquad u(1) + \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = U_R = 8$$

در حل این مساله که از نوع BVP[1]است مراحل زیر را طی کنید:

1. با توجه به دامنه تغییرات x ابتدا یک شبکه محاسباتی یکنواخت یک بعدی ایجاد کنید که در راستا محور x ها دارای M فاصله مساوی باشد. فواصل شبکه از رابطه $\Delta x = 1/M$ محاسبه می‌شود. تعداد فواصل M می‌تواند ۳۲ ، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶، ۵۱۲ و ۱۰۲۴ باشد. شماره اولین گره افقی $i = 0$ و آخرین گره افقی $i = M$ است.



2. ابتدا تعیین کنید کدام گره‌ها مجهول هستند. سپس معادله دیفرانسیل را روی گره‌ای مجهول به روش اختلاف محدود از درجه ۲ گسسته‌سازی کنید و پس از اعمال شرایط مرزی دستگاه معادلات جبری خطی حاصل را به دست آورید.

3. دستگاه معادلات جبری خطی حاصل را به روش تکرار Gauss-Seidel حل کنید. برای معیار همگرایی فرض کنید نرم بی‌نهایت خطای نسبی گره‌های مجهول $L_\infty(u)$ (یا همان $\|\delta\|_\infty$) کمتر از 10^{-8} باشد:

$$\|\delta\|_\infty \le 10^{-8} \qquad ; \qquad \delta_i = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{u_i^{k+1}} \quad i = 1, \dots, M-1$$

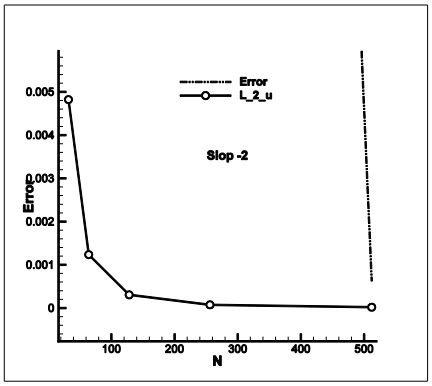
4. انتظار می‌رود که با ریزتر شدن شبکه محاسباتی دقت حل افزایش یابد. نرم دوی خطای نسبی $\|\epsilon\|_2$ حل با ۳۲، ۶۴، ۱۲۸ و ۲۵۶ گره را در مقایسه با حل دقیق (Exact Solution) محاسبه کرده و نمودار لگاریتمی $\|\delta\|_\infty$ را برحسب M رسم کنید و نشان دهید که خطای محاسباتی حل عددی شما همانطور که انتظار دارید از مرتبه ۲ می‌باشد. تعریف نرم دوی خطا مطلق را به صورت زیر است:

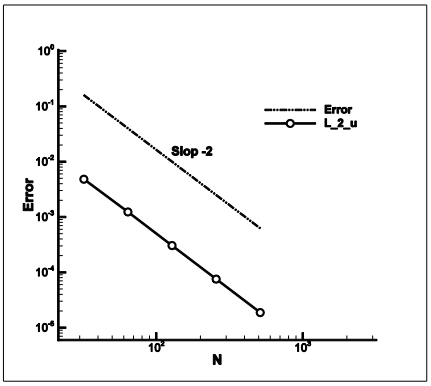
$$L_2(u) = \|\epsilon\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{31}\left(u_i - u_i^{exact}\right)}{31}}$$

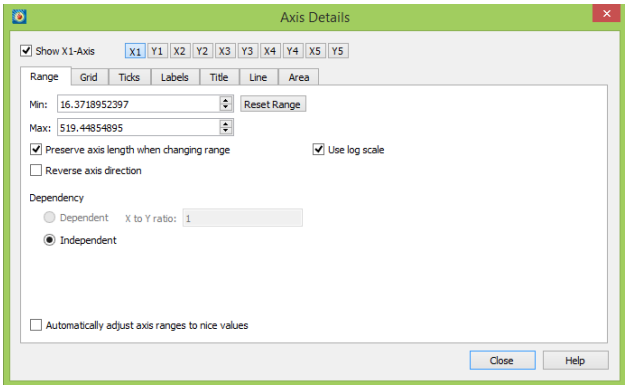
توجه : از آنجایی که حل دقیق این مساله در دسترس نیست لذا فرض می‌کنیم که نتایج حل با $M = 1024$ گره به جای حل دقیق درنظر گرفته شود. همچنین دقت کنید وقتی شبکه ۳۲ نقطه‌ای یا ۲۵۶ نقطه‌ای را روی شبکه ۱۰۲۴ نقطه‌ای منطبق کنیم گره‌هایی که روی هم منطبق می‌شوند دارای یک شماره نیستند. مثلا نقطه ۱ و ۲ و ۳ از شبکه ۳۲ نقطه‌ای با نقاط ۱ و ۴ و ۶ از شبکه ۶۴ نقطه‌ای و نقاط ۱ و ۸ و ۱۲ از شبکه ۱۲۸ نقطه‌ای و .... و نقاط ۱ و ۳۲ و ۹۶ از شبکه ۱۰۲۴ نقطه‌ای منطبق هستند. در حالیکه نرم ۲ خطا فقط برای نقاط منطبق بر شبکه ۳۲ نقطه‌ای محاسبه می‌شود و فرقی ندارد که M چقدر باشد. اگر محل نقاط تغییر داده شود نرم خطای به دست آمده درست نبوده و نمی‌توان مرتبه خطا را بررسی کرد.

5. راهنمایی: برای رسم نمودار لگاریتمی در نرم افزار Tecplot360 گزینه Use Log Scale را برای هر دو محور افقی و قائم فعال کنید. اگر این گزینه فعال نباشد نمودار خطا بر حسب تعداد نقاط شبکه به صورت شکل چپ و در صورت فعال بودن به صورت شکل راست خواهد شد. شکل راست مورد نظر است.

[1] Boundary value Problem مساله مقدار مرزی







برای فعال کردن این گزینه در Tecplot360 کافیست روی محور افقی دبل کلیک کنید و در تب Range مانند شکل بالا تیک Use log scale را فعال کنید. سپس همین کار را برای محور عمودی تکرار کنید.

6. راهنمایی: برای نمایش شبکه محاسباتی و کانتور توزیع $u(x)$ در میدان محاسباتی در نرم‌افزار Tecplot360 مطابق نمونه کد فرترن ارائه شده اقدام کنید. (نحوه دانلود و نصب نرم‌افزار فوق در گروه تلگرامی به صورت فایل pdf ارسال شده است):

```
 OPEN(12,FILE="x-u.dat")
WRITE(12,*)'title="U test" '
WRITE(12,*)'variables=x,U'
WRITE(12,*)'zone t="plane 1"  '
do i=0,M
WRITE(12,*)x(i),u(i)
end do
```

7. مساله را بار دیگر حل کنید ولی این بار برای حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی به جای روش تکرار گوس سایدل از روش تکرار[۲]SOR استفاده کنید. ابتدا مقدار بهینه ضریب فوق تخفیف ω را برای شبکه با $M = 64$ به دست آورید. برای این کار نموداری رسم کنید که محور افقی آن ω و محور عمودی آن تعداد تکرار لازم برای همگرایی حل باشد. هر مقدار از ω که دارای کمترین تعداد تکرار باشد را به عنوان ω_{opt} درنظر بگیرید (Optimum به معنی بهینه). معیار همگرایی را مثل بند شماره ۳ درنظر بگیرید. پس از تعیین ضریب فوق تخفیف بهینه، آن را برای همه مقایر M استفاده کنید.

8. تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی به روش گوس سایدل و روی SOR را در جدولی مانند زیر مقایسه کنید:

M	Gauss-Seidel	SOR
32		
64		
128		
256		
512		

موفق باشید. بدری

[۲] Successive Over Relaxation Algorithm