$$\min\theta = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{K+F}}\left(\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{K}}\gamma_k + \sum_{\mathrm{f=1}}^{\mathrm{F}}\varphi_f\right)} = \frac{K+F}{\sum_{k=1}^{K}\gamma_k + \sum_{f=1}^{F}\varphi_f}$$

$$\mathrm{X_{io}} \geq \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} (\lambda_{\mathrm{j}}+\mu_{\mathrm{j}})\mathrm{X_{ij}} \qquad ,\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{I}$$

$$\tilde{Z}_c \leq \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{j}}\, \mathrm{Z_{cj}} \qquad , \ \mathrm{c} = 1, \dots, \mathrm{C}$$

$$\gamma_k \mathrm{V_{ko}} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{j}}\, \mathrm{V_{kj}} \qquad , \ \mathrm{k} = 1, \dots, \mathrm{K}$$

$$\mathrm{Q_{bo}} \leq \textstyle\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{j}} \mathrm{Q_{bj}} \qquad , \quad \mathrm{b} = 1, \dots, \mathrm{B}$$

$$\varphi_f \mathrm{Y_{fo}} \leq \textstyle\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{j}} \mathrm{Y_{fj}} \qquad , \quad \mathrm{f} = 1, \dots, \mathrm{F}$$

$$\tilde{Z}_c \geq \textstyle\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{j}} \mathrm{Z_{cj}} \qquad , \ \mathrm{c} = 1, \dots, \mathrm{C}$$

$$\mathrm{W_{ro}} \geq \textstyle\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{j}}\, \mathrm{W_{rj}} \qquad , \ \mathrm{r} = 1, \dots, \mathrm{R}$$

$$\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} (\lambda_{\mathrm{j}} + \mu_{\mathrm{j}}) = 1,$$

$$\textstyle\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{j}} = 1 \qquad \mu_{\mathrm{j}} \geq 0\,, \lambda_{\mathrm{j}} \geq 0, \beta_{\mathrm{j}} \geq 0 \qquad (۸)$$

۳-۲ محاسبه مدل کارایی سنجی با داده های تصادفی

با توجه به این که در دنیای واقعی داده ها غیر قطعی هستند. استفاده از برنامه ریزی تصادفی برای ورودی ها و خروجی ها ی غیر قطعی ضروری است. در استفاده از برنامه ریزی تصادفی تابع توزیع احتمال داده ها باید مشخص

و قابل اندازه گیری باشد. یکی از مهم ترین روش های حل مسائل برنامه ریزی تصادفی استفاده از روش هامحدودیت های احتمالی است. در استفاده از این مدل بر روی n واحد تصمیم گیرنده ($DMU_j(j = 1, \dots, n)$)، داده های تصادفی به صورت $\hat{X} = (\widehat{X_{1J}}, \dots, \widehat{X_{IJ}}) \geq 0$ ورودی مرحله اول، $\hat{V} = (\hat{V}_{1J}, \dots, \hat{V}_{kJ}) \geq 0$ خروجی نامطلوب مرحله اول، $\hat{Z} = (\hat{Z}_{1j}, \dots, \hat{Z}_{cj}) \geq 0$ عنصرمیانی، $\hat{Q} = (\hat{Q}_{1j}, \dots, \hat{Q}_{bj}) \geq 0$ ورودی مرحله دوم، $\widehat{W} = (\widehat{W}_{1j}, \dots, \widehat{W}_{rj}) \geq 0$ خروجی نامطلوب مرحله دوم، $\hat{Y} = (\hat{Y}_{1j}, \dots, \hat{Y}_{fj}) \geq 0$ خروج نهایی وجود دارند. مدل کارایی سنجی (۸) با داده های تصادفی به صورت مدل (۱۰) در زیر ارائه شد.

$$
\begin{aligned}
& min\theta \\
& \text{s.t } pr\{\textstyle\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\mu_j)\hat{X}_{ij} - \hat{X}_{io} \leq 0 \} \geq 1-\alpha, \quad i = 1, \dots, I \\
& pr\left\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{Z}_{cj} - \hat{\hat{Z}}_c \geq 0\right\} \geq 1-\alpha \quad , \ c = 1, \dots, C \\
& pr\left\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{V}_{kj} - \gamma_k \tilde{V}_{ko} = 0\right\} \geq 1-\alpha \quad , \quad k = 1, \dots, K \\
& pr\left\{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \tilde{Q}_{bj} - \tilde{Q}_{bo} \geq 0\right\} \geq 1-\alpha \quad , \quad b = 1, \dots, B \\
& pr\left\{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \tilde{Y}_{fj} - \varphi_f \tilde{Y}_{fo} \geq 0\right\} \geq 1-\alpha \quad , \quad f = 1, \dots, F \\
& pr\left\{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \tilde{Z}_{cj} - \tilde{Z}_{co} \leq 0\right\} \geq 1-\alpha \quad , \quad c = 1, \dots, C \\
& pr\left\{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widetilde{W}_{rj} - \widetilde{W}_{ro} \leq 0\right\} \geq 1-\alpha, \quad r = 1, \dots, R \qquad (۹) \\
& \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \mu_j) = 1, \\
& \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1 \\
& \mu_j \geq 0, \lambda_j \geq 0, \beta_j \geq 0
\end{aligned}
$$

مقدار α در مدل فوق بین صفر و یک است. مدل فوق را با اضافه کردن متغیرهای خارجی $\varepsilon_i, \varepsilon_c, \varepsilon_k, \varepsilon_b, \varepsilon_f, \varepsilon_r$ می توان به صورت تساوی تبدیل کرد که در مدل(۱۰) ارائه شده است.

$$
\begin{aligned}
& min\rho \\
& \text{s.t } pr\{\textstyle\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\mu_j)\hat{X}_{ij} - \hat{X}_{io} \leq 0 \} = 1-\alpha+\varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, I
\end{aligned}
$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\hat{Z}_{cj}-\hat{\tilde{Z}}_{co}\geq 0\right\}=1-\alpha\;+\varepsilon_c\qquad,\;\; c=1,\ldots,C$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{V}_{kj}-\gamma_k\,\tilde{V}_{ko}=0\;\right\}=1-\alpha\;\;+\varepsilon_k\;\;,\qquad \mathrm{k}=1,\ldots,\mathrm{K}$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\tilde{Q}_{bj}-\tilde{Q}_{bo}\geq 0\right\}=1-\alpha\;+\varepsilon_b\;\;,\quad b=1,\ldots,B$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\tilde{Y}_{fj}-\;\varphi_f\tilde{Y}_{fo}\geq 0\right\}=1-\alpha\;\;+\varepsilon_f\;,\quad f=1,\ldots,F$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\tilde{Z}_{cj}-\tilde{Z}_{co}\leq 0\;\right\}=1-\alpha\;+\varepsilon_c\;\;,\;\;\mathrm{c}=1,\ldots,\mathrm{C}$$

$$pr\{\textstyle\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,\widetilde{W}_{rj}-\widetilde{W}_{ro}\leq 0\;\}=1-\alpha+\varepsilon_r\;,\;\;\mathrm{r}=1,\ldots,\mathrm{R}\qquad (۱۰)$$

با توجه به تعریف متغیر کمکی ، با استفاده از متغیر های کمکی $s_k^+, s_i^-, s_r^-, s_c^+, s_c^-, s_b^+, s_f^+$ مدل(۱۰) به صورت مدل(۱۱) بازنویسی شد.

$$min\rho$$

$$pr\{\textstyle\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\mu_j)\tilde{X}_{ij}\;+s_i^-\leq\tilde{X}_{io}\;\}=\;1-\alpha\,,\qquad \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{I}$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{Z}_{cj}-s_c^+\geq\tilde{Z}_{co}\right\}=1-\alpha\qquad,\;\; c=1,\ldots,C$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{V}_{kj}-\gamma_k\,\tilde{V}_{ko}=0\;\right\}=1-\alpha\quad,\qquad \mathrm{k}=1,\ldots,\mathrm{K}$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\tilde{Q}_{bj}-\tilde{Q}_{bo}\geq s_b^+\right\}=1-\alpha\;\;,\quad b=1,\ldots,B$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\tilde{Y}_{fj}-\;\varphi_f\tilde{Y}_{fo}\geq s_f^+\right\}=1-\alpha\;\;,\;\; f=1,\ldots,F$$

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{Z}_{cj}+s_c^-\leq\tilde{Z}_{co}\right\}=1-\alpha\;\;,\;\;\mathrm{c}=1,\ldots,\mathrm{C}$$

(۱۱)

$$pr\left\{\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,\widetilde{W}_{rj}+s_r^+\leq\widetilde{W}_{ro}\;\right\}=1-\alpha\,,\;\;\mathrm{r}=1,\ldots,\mathrm{R}$$

برای ارزیابی واحدهای تحت بررسی به کمک مدل(۱۲) نیاز است که این مدل به مدل قطعی تبدیل شود. با توجه به این که تمام متغیرها دارای توزیع نرمال هستند. با بکارگیری توزیع نرمال استاندارد می توان قیود مدل(۱۲) را به مدل (۱۳) قطعی سازی نمود.δ

$min\rho$
$s.t$

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\mu_j)\tilde{X}_{ij}-\theta_i x_{io}+s_i^- -\omega^{-1}(\alpha)\delta_{\mathrm{i}}(\lambda)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{Z}_{cj}-s_c^+-\tilde{Z}_{co}+\omega^{-1}(\alpha)\delta_C(\lambda)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{V}_{kj}-\gamma_k\,\tilde{V}_{ko}=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{Q}_{bj}-\tilde{Q}_{bo}-s_b^+ +\omega^{-1}(\alpha)\delta_b(\beta)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,\tilde{Z}_{cj}+s_c^- -\tilde{Z}_{co}-\omega^{-1}(\alpha)\delta_C(\beta)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j\tilde{Y}_{fj}-\ \varphi_f\tilde{Y}_{fo}-s_f^+ +\omega^{-1}(\alpha)\delta_f(\beta)=0$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,\widetilde{W}_{rj}+s_r^+ -\widetilde{W}_{ro}-\omega^{-1}(\alpha)\delta_\delta(\beta)=0 \qquad (۱۳)$$

در مدل(۱۳) ω تابع نرمال استاندارد است و ω^{-1} معکوس این تابع است. مقادیر $\delta_f(\beta), \delta_b(\beta)$،$\delta_i(\lambda), \delta_r(\beta), \delta_C(\beta), \delta_C(\lambda)$ که در مدل (۱۳) آمده است. به شرح زیربا توجه به ویژگی های توزیع نرمال محاسبه می شود. صورت قطعی این دسته از محدودیت ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta_i{}^2(\lambda)=\sum_{j\neq 0}\sum_{h\neq 0}\lambda_j\lambda_h cov(\tilde{X}_{ij},\tilde{X}_{ih})$$

$$\delta_C{}^2(\lambda)=\sum_{j\neq 0}\sum_{h\neq 0}\lambda_j\lambda_h cov(\tilde{Z}_{cj},\tilde{Z}_{ch})$$

$$\delta_b{}^{2(\beta)}=\textstyle\sum_{J\neq 0}\sum_{h\neq 0}\beta_J\beta_h cov(\tilde{Q}_{bj},\tilde{Q}_{bh})$$

$$\delta_C{}^2(\beta)=\sum_{i\neq 0}\sum_{h\neq 0}\beta_j\beta_h cov(\tilde{Z}_{cj},\tilde{Z}_{ch})$$

$$\delta_f{}^2(\beta)=\sum_{J\neq 0}\sum_{h\neq 0}\beta_j\beta_f cov(\tilde{Y}_{fj},\tilde{Y}_{fh})$$

$$\delta_r{}^2(\beta)=\sum_{i\neq 0}\sum_{h\neq 0}\beta_{\mathrm{j}}\beta_h cov(\widetilde{W}_{\mathrm{r}j},\widetilde{W}_{\mathrm{rh}})$$

و همچنین داریم:

$$\sigma_i^2(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\lambda_j\lambda_h cov\left(\tilde{X}_{ij},\tilde{X}_{ih}\right)+var\left(\tilde{X}_{io}\right)-2\sum_{j\neq 0}\lambda_j\, cov\left(\tilde{X}_{ij},\tilde{X}_{io}\right)$$

$$\sigma_c^2(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\lambda_j\lambda_h cov\left(\tilde{z}_{cj},\tilde{z}_{ch}\right)+var(\tilde{z}_{co})-2\sum_{j\neq 0}\lambda_j\, cov\left(\tilde{z}_{cj},\tilde{z}_{co}\right)$$

$$\sigma_b^2(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\beta_j\beta_h cov\left(\tilde{Q}_{bj},\tilde{Q}_{bh}\right)+var\left(\tilde{Q}_{bo}\right)-2\sum_{j\neq 0}\beta_J\, cov\left(\tilde{Q}_{bj},\tilde{Q}_{bo}\right)$$

$$\sigma_c^2(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\beta_j\beta_h cov\left(\tilde{z}_{cj},\tilde{z}_{ch}\right)+var(\tilde{z}_{co})-2\sum_{j\neq 0}\beta_J\, cov\left(\tilde{z}_{cj},\tilde{z}_{co}\right)$$

$$\sigma_f^2(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\beta_j\beta_h cov\left(\tilde{Y}_{fj},\tilde{Y}_{fh}\right)+var\left(\tilde{Y}_{fo}\right)-2\sum_{j\neq 0}\beta_J\, cov\left(\tilde{Y}_{fj},\tilde{Y}_{fo}\right)$$

$$\sigma_r^2(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\beta_j\beta_h cov\left(\widetilde{W}_{rj},\widetilde{W}_{rh}\right)+var\left(\widetilde{W}_{ro}\right)-2\sum_{j\neq 0}\beta_J\, cov\left(\widetilde{W}_{rj},\widetilde{W}_{ro}\right)$$

بنابراین مدل درجه دو به فرم مدل (۱۴) خواهد بود:

$min\rho$

$s.t$

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\mu_j)\tilde{X}_{ij}-\theta_i x_{io}+s_i^- -\omega^{-1}(\alpha)\delta_i(\lambda)=0 \qquad \mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{I}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{Z}_{cj}-s_c^+-\tilde{Z}_{co}+\omega^{-1}(\alpha)\delta_C(\lambda)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,\tilde{V}_{kj}-\gamma_k\,\tilde{V}_{ko}=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{Q}_{bj}-\tilde{Q}_{bo}-s_b^+ +\omega^{-1}(\alpha)\delta_b(\beta)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,\tilde{Z}_{cj}+s_c^- -\tilde{Z}_{co}-\omega^{-1}(\alpha)\delta_C(\beta)=0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \tilde{Y}_{fj} - \varphi_f \tilde{Y}_{fo} - s_f^+ + \omega^{-1}(\alpha)\delta_f(\beta) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widetilde{W}_{rj} + s_r^+ - \widetilde{W}_{ro} - \omega^{-1}(\alpha)\delta_\delta(\beta) = 0$$

$$\sigma_i^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \lambda_j\lambda_h cov\left(\tilde{X}_{ij}, \tilde{X}_{ih}\right) + var\left(\tilde{X}_{io}\right) - 2\sum_{j\neq 0} \lambda_j\, cov\left(\tilde{X}_{ij}, \tilde{X}_{io}\right)$$

$$\sigma_c^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \lambda_j\lambda_h cov\left(\tilde{z}_{cj}, \tilde{z}_{ch}\right) + var(\tilde{z}_{co}) - 2\sum_{j\neq 0} \lambda_j\, cov\left(\tilde{z}_{cj}, \tilde{z}_{co}\right)$$

$$\sigma_b^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \beta_J\beta_h cov\left(\tilde{Q}_{bj}, \tilde{Q}_{bh}\right) + var\left(\tilde{Q}_{bo}\right) - 2\sum_{j\neq 0} \beta_J\, cov\left(\tilde{Q}_{bj}, \tilde{Q}_{bo}\right)$$

$$\sigma_c^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \beta_J\beta_h cov\left(\tilde{z}_{cj}, \tilde{z}_{ch}\right) + var(\tilde{z}_{co}) - 2\sum_{j\neq 0} \beta_J\, cov\left(\tilde{z}_{cj}, \tilde{z}_{co}\right)$$

$$\sigma_f^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \beta_J\beta_h cov\left(\tilde{Y}_{fj}, \tilde{Y}_{fh}\right) + var\left(\tilde{Y}_{fo}\right) - 2\sum_{j\neq 0} \beta_J\, cov\left(\tilde{Y}_{fj}, \tilde{Y}_{fo}\right)$$

$$\sigma_r^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \beta_J\beta_h cov\left(\widetilde{W}_{rj}, \widetilde{W}_{rh}\right) + var\left(\widetilde{W}_{ro}\right) - 2\sum_{j\neq 0} \beta_J\, cov\left(\widetilde{W}_{rj}, \widetilde{W}_{ro}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \mu_j) = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$$

$$\mu_j \geq 0\,, \lambda_j \geq 0, \beta_j \geq 0$$