

مبحث هشتم: مبانی برنامه‌ریزی ریاضی

اهداف یادگیری

- خواننده پس از مطالعه این مبحث قادر خواهد بود که:
- مسائل بهینه‌سازی چندهدفه را با استفاده از روابط ریاضی مدل‌سازی نماید.
- جواب بهینه مسائل برنامه‌ریزی خطی دو متغیره را به روش ترسیمی تعیین کند.
- از نرم‌افزار لینگو برای حل مسائل بهینه‌سازی ریاضی استفاده کند.
- جواب‌های پارتو را برای مسائل ساده بهینه‌سازی دوهدفه تعیین نماید.

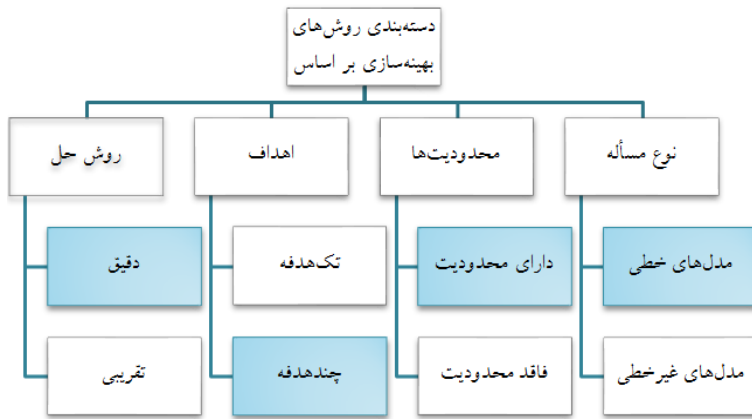
مقدمه

در مباحث قبل دیدیم که دو دسته مهم از تکنیک‌های تصمیم‌گیری عبارتند از تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندشاخصه و تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندهدفه. در تکنیک‌های چندشاخصه انتخاب از میان تعداد محدود و مشخصی گزینه و بر اساس تعدادی شاخص انجام می‌شود. اما در تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندهدفه اهداف محدودیت‌ها با روابط ریاضی مدل‌سازی شده و جواب برتر با استفاده از تکنیک‌های بهینه‌سازی تعیین می‌شود. در روش‌های چندشاخصه، منظور از شاخص ویژگی‌ها و خصوصیات است که عملکرد و میزان مطلوبیت هر گزینه بر اساس آن‌ها مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در حالی که در روش‌های چندهدفه، اهداف بیانگر خواسته‌های تصمیم‌گیرنده است که همراه با هر هدف، جهت مطلوب بهبود برای یک معیار عملکردی نیز بیان می‌شود، یعنی مشخص می‌شود که بیشینه کردن هدف منجر به افزایش مطلوبیت می‌گردد یا کمینه کردن آن. در تکنیک‌های چندشاخصه، فضای جواب گسسته است یعنی تعداد محدودی جواب داریم، محدودیت‌ها به صورت ضمنی بیان می‌شوند بدین معنا که وقتی تعدادی گزینه مشخص می‌شود که از میان آنها گزینه برتر تعیین شود، در انتخاب اولیه گزینه‌هایی که سبد انتخاب را تشکیل می‌دهند، محدودیت‌ها در نظر گرفته می‌شوند. روش‌های چندشاخصه برای غربال‌سازی اولیه، دسته‌بندی بر اساس میزان مطلوبیت و انتخاب گزینه برتر کاربرد دارند. در روش‌های چندهدفه، فضای جواب پیوسته است یعنی یک منطقه موجه شناسایی شده و تمام نقاطی که در این منطقه قرار می‌گیرند می‌توانند به عنوان گزینه برتر معرفی شوند، محدودیت‌ها نیز به صورت صریح و در قالب روابط ریاضی بیان می‌شوند. از تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندهدفه برای طراحی و تعیین پارامترهای بهینه یک سیستم می‌توان استفاده کرد. در این مبحث مفاهیم مقدماتی برنامه‌ریزی ریاضی که زیربنای تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندهدفه هستند مرور خواهد شد.

مدل‌سازی مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه

در بسیاری مسائل صنعتی و کسب و کار لازم است بهترین جواب با در نظر گرفتن همه محدودیت‌ها تعیین گردد. برنامه‌ریزی ریاضی از کارآمدترین روش‌ها جهت بهینه‌سازی این گونه مسائل است. در روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی توابع هدف و محدودیت‌های مسأله با روابط ریاضی معمولاً خطی مدل می‌شود. برای درک بهتر کاربرد تکنیک‌های MODM، به جایگاه آن‌ها در دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی توجه کنید (شکل ۱):

- براساس نوع مسأله، مدل‌سازی آن به صورت خطی یا غیرخطی انجام می‌شود. در این درس برای پرهیز از مسائل دارای پیچیدگی زیاد، مباحث عموماً به مسائل برنامه‌ریزی خطی محدود خواهد بود.



شکل ۱. دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی

- براساس نوع مسأله، مدل‌سازی بصورت خطی یا غیرخطی انجام می‌شود. برای پرهیز از مسائل دارای پیچیدگی زیاد، مباحث عموماً به مسائل برنامه‌ریزی خطی محدود می‌شود.
- مسائل بهینه‌سازی ممکن است دارا یا فاقد محدودیت باشند و در این درس با مسائل دارای محدودیت سروکار داریم.

- مسأله می‌تواند دارای یک یا چند هدف باشد و در این مبحث، مسائل بهینه‌سازی چندهدفه بررسی خواهد شد. البته این مسائل، تعمیم مسائل تک‌هدفه بوده و ابتدا مسائل تک‌هدفه تشریح می‌شوند.
 - برای حل مسائل بهینه‌سازی، می‌توان از روش‌های حل دقیق یا تقریبی استفاده شود. تکنیک‌هایی که در اینجا معرفی خواهد شد، روش‌های حل دقیق هستند.
- مثال:** چگونگی مدل‌سازی و حل مسائل بهینه‌سازی به کمک یک مثال تشریح می‌شود. شرکتی تولیدکننده دستگاه‌های تلویزیون در دو مدل A و B است. عملیات تولید در دو کارگاه مونتاژ و بسته‌بندی انجام می‌شود. اطلاعات مسأله به شرح زیر است:

- زمان لازم برای مونتاژ هر دستگاه از مدل A و B به ترتیب ۳ و ۲٫۵ ساعت است.
 - زمان بسته‌بندی نیز به ترتیب ۲ و ۵ ساعت است.
 - ظرفیت روزانه کارگاه‌های مونتاژ و بسته‌بندی ۴۵۰ و ۶۰۰ نفر ساعت
 - سود حاصل از فروش هر دستگاه از مدل A برابر با ۲ و مدل B برابر با ۳ واحد پول است.
- هدف عبارتست از تعیین مقدار تولید روزانه‌ی هر کدام از مدل‌ها بگونه‌ای که مجموع سود حداکثر گردد.

جدول ۱. مثال شرکت تولیدکننده دستگاه‌های تلویزیون

	زمان مورد نیاز	
	مدل A	مدل B
عملیات مونتاژ	۳	۲٫۵
عملیات بسته‌بندی	۲	۵
سود هر واحد	۲	۳

- در این مسأله دو متغیر تصمیم داریم که عبارتند از تعداد تولید روزانه از مدل A (x_1) و تعداد تولید روزانه از مدل B (x_2). تابع هدف مقدار سود روزانه است که باید بیشینه گردد و تابعی است از مقدار تولید از مدل‌های A و B: $Maximize f = 2x_1 + 3x_2$. مثلاً اگر از مدل A، ۱۰ واحد و از مدل B، ۲۰ واحد تولید شود کل سود برابر است با: $f(10, 20) = 2 \times 10 + 3 \times 20 = 80$
- مسأله دارای دو محدودیت است: محدودیت ظرفیت کارگاه مونتاژ و محدودیت ظرفیت کارگاه بسته‌بندی. برای بیان محدودیت‌ها به صورت رابطه ریاضی، در سمت چپ رابطه مقدار ظرفیت مورد نیاز برای تولید مقادیر

محدودیت ظرفیت روزانه کارگاه مونتاژ

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{ظرفیت کارگاه} \\ \hline \text{مونتاژ} \\ \hline \end{array} \leq \begin{array}{|c|} \hline \text{نفر ساعت مورد نیاز برای} \\ \text{مونتاژ } x_1 \text{ واحد از مدل A} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{نفر ساعت مورد نیاز برای} \\ \text{مونتاژ } x_2 \text{ واحد از مدل B} \\ \hline \end{array}$$

$$3x_1 + 2.5x_2 \leq 450$$

مشخص شده است که نباید از مقدار سمت راست یعنی ظرفیت موجود بیشتر شود. چون تولید مقدار منفی از محصولات بی‌معناست، متغیرهای تصمیم باید غیرمنفی در نظر گرفته شوند: $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$

محدودیت ظرفیت روزانه کارگاه بسته‌بندی

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{ظرفیت کارگاه} \\ \hline \text{بسته‌بندی} \\ \hline \end{array} \leq \begin{array}{|c|} \hline \text{نفر ساعت مورد نیاز برای} \\ \text{بسته‌بندی } x_1 \text{ واحد از مدل A} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{نفر ساعت مورد نیاز برای} \\ \text{بسته‌بندی } x_2 \text{ واحد از مدل B} \\ \hline \end{array}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 600$$

نکته: محدودیت‌ها می‌توانند اشکال دیگری هم داشته باشند:

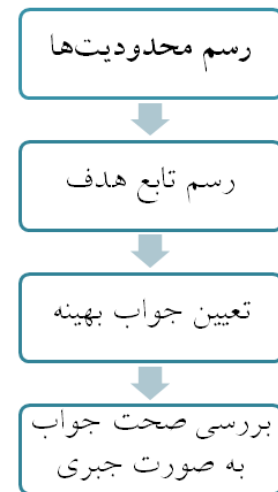
محدودیت بزرگتر یا مساوی: مثلاً وقتی که تعداد

تولید از مدل A باید حداقل ۲۰ دستگاه باشد: $x_1 \geq 20$

محدودیت مساوی: مثلاً اگر گفته می‌شد تعداد تولید از مدل A باید دو برابر مدل B باشد: $x_1 = 2x_2$

مدل نهایی مسأله به شکل روبرو خواهد شد. پس از ساخت مدل ریاضی باید جواب بهینه مسأله از میان جواب‌های موجه تعیین گردد. هر ترکیبی از مقادیر متغیرهای تصمیم که در تمام محدودیت‌ها صدق کند، یک جواب شدنی یا موجه است. مجموعه‌ای این جواب‌ها، منطقه موجه یا شدنی را تشکیل می‌دهند. حل مدل یا بهینه‌سازی یعنی یافتن

یک جواب شدنی که به ازای آن، تابع هدف دارای بهترین (در این مثال بیشترین) مقدار است. در ادامه برای حل مسأله دو روش معرفی خواهد شد: روش ترسیمی یا استفاده از نرم‌افزار Lingo.



شکل ۲. مراحل روش ترسیمی

حل مدل به روش ترسیمی

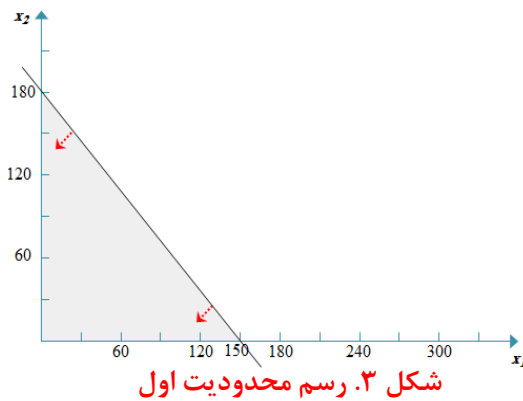
با توجه خطی بودن روابط و اینکه تنها دو متغیر تصمیم داریم، می‌توان طی چهار مرحله جواب بهینه را به روش ترسیمی تعیین نمود (شکل ۲):

گام ۱، رسم محدودیت‌ها: ابتدا هر متغیر تصمیم بر روی یک محور نشان داده (شکل ۳) و سپس با در نظر گرفتن محدودیت به صورت مساوی و تعیین دو نقطه از معادله خط حاصله، نمودار خط مربوط به آن محدودیت رسم می‌شود. برای رسم راحت‌تر نمودارها، می‌توان محل تقاطع خط با هر یک از محورهای افقی و عمودی را بدست آورد. به این منظور کافی است یکبار x_1 برابر صفر در نظر گرفته شده و مقدار x_2 و بار دیگر x_2 برابر با صفر در نظر گرفته شده و مقدار x_1 بدست آید.

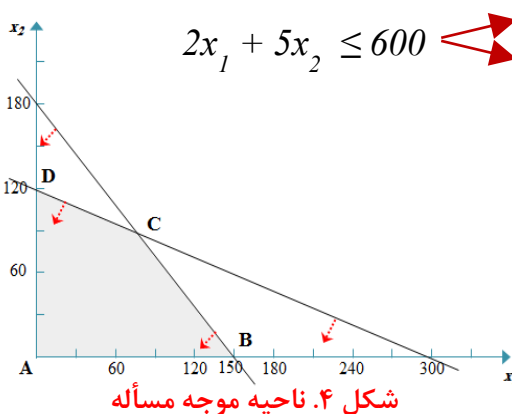
$$3x_1 + 2.5x_2 \leq 450 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 180 \rightarrow (0, 180) \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 150 \rightarrow (150, 0) \end{cases}$$

هر محدودیت $\leq$ یا $\geq$ صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند:

- نقاطی که در محدودیت صدق می‌کند.
- نقاطی که در محدودیت صدق نمی‌کند.



برای تشخیص این نواحی، کافی است چک شود که آیا نقطه‌ای دلخواه مثلاً $(0, 0)$ در محدودیت صدق می‌کند یا خیر. با قرار دادن مقدار صفر بجای x_1 و x_2 در محدودیت $3x_1 + 2.5x_2 \leq 450$ خواهیم داشت: $0 \leq 450$ از آنجا که یک رابطه درست بدست آمده است، بنابراین ناحیه‌ی شامل مبدأ مختصات یعنی نقاط در بخش پائین سمت چپ در محدودیت صدق می‌کند (شکل ۳). با توجه به شرط غیرمنفی بودن متغیرها، منطقه موجه تنها در ربع اول در نظر گرفته می‌شود. نمودار محدودیت دوم نیز به طور مشابه

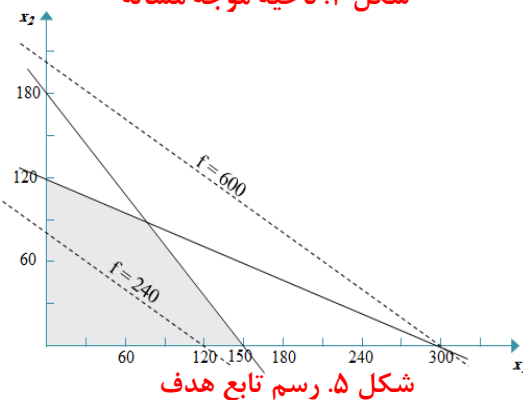


$$2x_1 + 5x_2 \leq 600 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 120 \rightarrow (0, 120) \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 300 \rightarrow (300, 0) \end{cases}$$

رسم می‌شود. برای این محدودیت نیز قسمت پایین سمت چپ، ناحیه موجه است. منطقه موجه مسأله عبارتست از اشتراک مناطق تعیین شده توسط تمام محدودیت‌ها در ربع اول. طبق شکل ۴، چهارضلعی ABCD منطقه موجه این مسأله است.

گام ۲، رسم تابع هدف: نقطه‌ای از منطقه موجه که

تابع هدف به ازای آن بیشترین مقدار را دارد نقطه بهینه است. برای تعیین نقطه بهینه ابتدا باید نمودار تابع هدف را رسم کرد. بدین منظور مقداری دلخواه به عنوان مقدار سمت راست (مثلاً ۶۰۰) برای تابع هدف در نظر گرفته و بر اساس آن تابع هدف رسم می‌شود (شکل ۵). تمام نقاط روی این خط، سودی برابر ۶۰۰ واحد پول خواهند داشت.



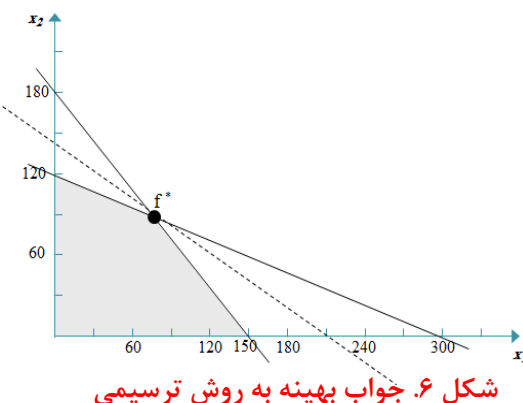
$$2x_1 + 3x_2 = 600 \begin{cases} (0, 200) \\ (300, 0) \end{cases}$$

با تغییر مقدار سمت راست، خطوطی موازی حاصل می‌شود که در مقدار سود متفاوتند (مثلاً ۲۴۰).

توجه کنید که هیچ‌یک از نقاط خط ۶۰۰ در منطقه موجه نیستند. یعنی هیچ جوابی نداریم که سود ۶۰۰ واحد داشته باشد. اما نقاط خط ۲۴۰ در منطقه موجه قرار دارند.

گام ۳، تعیین جواب بهینه: با فاصله گرفتن خط تابع

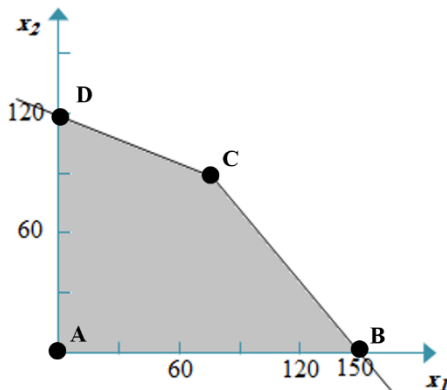
هدف از مبدأ مختصات مقدار سود افزایش می‌یابد. با حرکت دادن خط تابع هدف به موازات خود به سمت بالا به جایی خواهیم رسید که تابع هدف تنها در یک نقطه با منطقه موجه



اشتراک دارد. این نقطه (f^* در شکل ۶) ارائه دهنده بهترین جواب است، یعنی نقطه‌ای در منطقه موجه که بیشترین سود را دارد. برای محاسبه مختصات دقیق f^* ، دو محدودیتی که f^* از تقاطع آنها ایجاد شده را به صورت مساوی در نظر گرفته، یک دستگاه دو معادله دو مجهولی خواهیم داشت که از حل این دستگاه، مختصات f^* بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2.5x_2 = 450 \\ 2x_1 + 5x_2 = 600 \end{cases} \Rightarrow (75, 90) \Rightarrow f^* = 2 \times 75 + 3 \times 90 = 420$$

یعنی اگر از مدل A به میزان ۷۵ دستگاه و از مدل B تعداد ۹۰ دستگاه تولید شود، بیشترین مقدار سود (۴۲۰) را خواهیم داشت.



شکل ۷. نقاط گوشه‌ای

گام ۴، بررسی صحت جواب به صورت جبری: در

مدل‌های خطی، نقطه بهینه حتماً یکی از نقاط گوشه‌ای است. نقطه گوشه‌ای، نقطه‌ایست که از برخورد دو محدودیت بوجود آمده است. مطابق شکل ۷، در این مثال ساده ۴ نقطه گوشه‌ای وجود دارد. مقدار تابع هدف به ازای تمام نقاط گوشه‌ای محاسبه شده و جواب بهینه نقطه‌ای است که تابع هدف بیشترین مقدار را دارد.

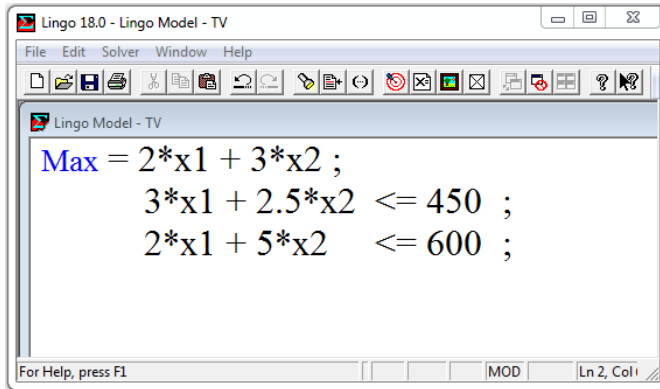
$$\begin{cases} A(0, 0) \Rightarrow f = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0 \\ B(150, 0) \Rightarrow f = 2 \times 150 + 3 \times 0 = 300 \\ C(75, 90) \Rightarrow f = 2 \times 75 + 3 \times 90 = 420 \\ D(0, 120) \Rightarrow f = 2 \times 0 + 3 \times 120 = 360 \end{cases} \Rightarrow \text{Max } f = f^* = 420 \Rightarrow \text{نقطه بهینه } C$$

یعنی جواب بهینه‌ای که به روش ترسیمی بدست آمد، صحیح است.

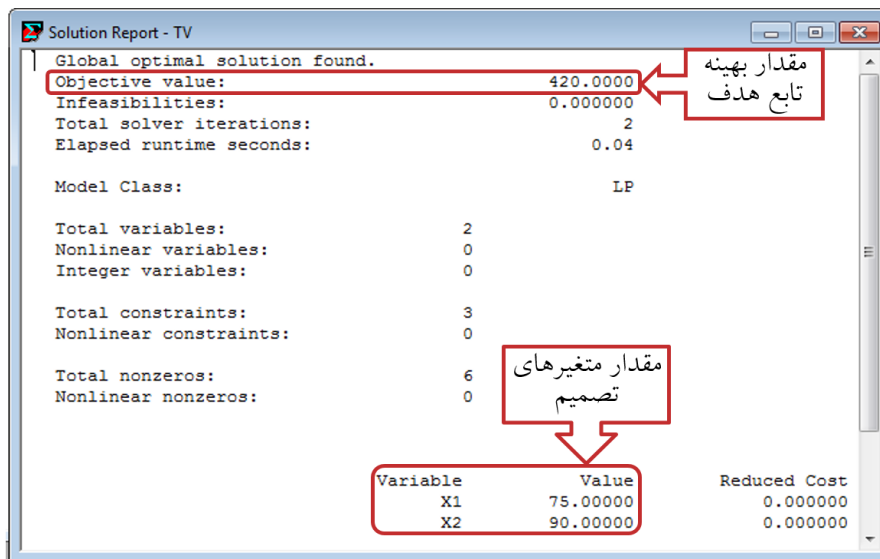
استفاده از نرم‌افزار Lingo

اگر مسأله‌ای بیش از دو متغیر داشته باشد، دیگر نمی‌توان از روش ترسیمی استفاده کرد. چنین مسائلی را باید با استفاده از روش‌هایی از قبیل الگوریتم سیمپلکس یا روش‌های فراابتکاری حل کرد. اما در این درس با توجه به این که تأکید بیشتر بر کاربرد روش‌های تصمیم‌گیری است، به منظور پرهیز از پیچیدگی‌های محاسباتی، از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی استفاده خواهد شد. نرم‌افزار LINGO یکی از قوی‌ترین نرم‌افزارهای بهینه‌سازی است که توسط شرکت Lindo System توسعه یافته است. LINGO قادر به حل انواع مدل‌های خطی، غیرخطی، عدد صحیح و غیره است. آخرین نسخه این نرم‌افزار را می‌توانید از سایت www.lindo.com دانلود و نصب کنید.

برای وارد کردن مدل، پس از اجرای نرم‌افزار، در پنجره Lingo Model تابع هدف و محدودیت‌ها نوشته می‌شوند. نام متغیرها با یک حرف شروع شده و حداکثر می‌تواند ۳۲ کاراکتر شامل حرف، عدد یا "_" باشد. روابط با استفاده از علائم ریاضی جمع (+) و تفریق (-)، ضرب (*)، تقسیم (/) و توان (^) ایجاد می‌شوند. ابتدا تابع هدف به صورت Max = یا Min = نوشته می‌شود. سپس محدودیت‌ها باید با استفاده از



شکل ۸. وارد کردن مدل در نرم‌افزار LINGO



شکل ۹. نمایش جواب در نرم‌افزار LINGO

بخش‌های مشخص شده از پنجره جواب، مقدار بهینه تابع هدف و متغیرهای تصمیم را می‌توان یافت. ملاحظه می‌شود که جواب با مقادیر بدست آمده به روش ترسیمی یکسان است.

مسئله بهینه‌سازی چندهدفه

$$\text{Max } F(X) = \{ f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X) \}$$

Subject to:

$$\begin{aligned} g_i(X) &\leq b_i & i=1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & j=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

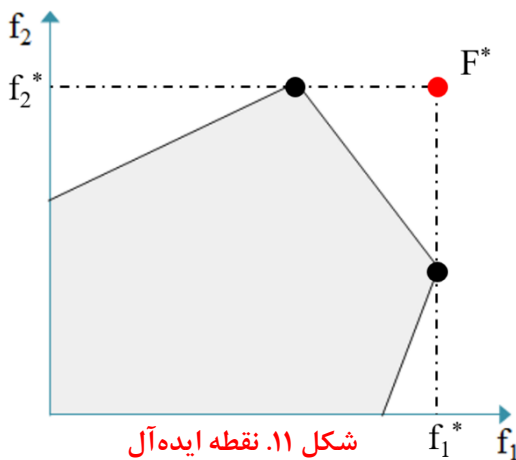
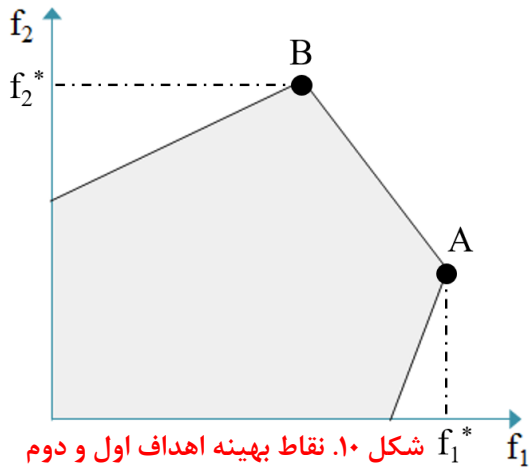
اگر مسئله بهینه‌سازی چندهدفه باشد به جای یک تابع هدف، چندین تابع هدف داریم. شکل عمومی یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه به صورت روبرو است:

ملاحظه می‌شود که در یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، همزمان باید چند هدف ($f_p(X)$) بهینه شود. در اینجا فرض شده تمام اهداف باید بیشینه شود. متغیرهای تصمیم را می‌توان به صورت یک بردار X نشان داده بگونه‌ای که $X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$

یکی از علائم $=$ ، $<$ یا $>$ وارد شوند. در پایان هر دستور باید ; گذاشت. نوشتن علامت ضرب (*) الزامی است مثلاً عبارت $2x_1$ باید به صورت $2*x_1$ نوشته شود. در لینگو متغیرها به صورت پیش‌فرض غیرمنفی در منظور شده و نیازی به درج محدودیت‌های $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$ نیست. پس از اطمینان از وارد کردن مدل به طول

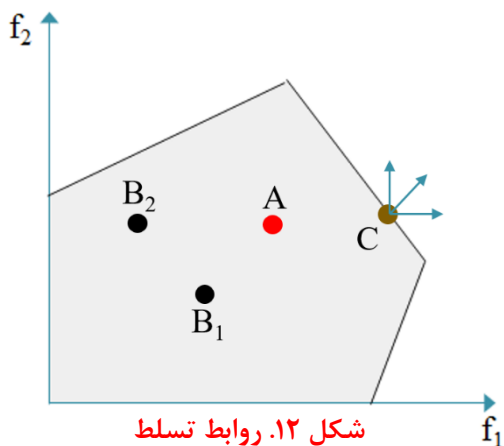
کامل، با زدن دکمه Solve  مسئله حل شده و جواب بهینه نمایش داده می‌شود. اگر در ورود مدل خطایی وجود داشته باشد، پیام خطا ظاهر شده و ابتدا باید ایراد مدل برطرف شود. پس از بستن پنجره Solver Status بهینه در پنجره Solution Report نمایش داده می‌شود (شکل ۹). در

جواب‌های موجه و ایده‌آل



فرض کنید یک مسئله بهینه‌سازی دو هدفه داریم که هر دو هدف باید بیشینه گردد. در شکل ۱۰ منطقه موجه در فضای اهداف رسم شده است. محورهای f_1 و f_2 اهداف هستند که با حرکت به سمت راست مقدار هدف اول و با حرکت به سمت بالا هدف دوم بهبود می‌یابد. اگر بخواهیم f_1 را بیشینه کنیم، به منتهی الیه سمت راست در منطقه موجه حرکت می‌کنیم تا به نقطه A برسیم که نقطه بهینه برای هدف اول است. مقدار بهینه هدف دوم نیز با حرکت به سمت بالا بدست می‌آید و بهترین مقدار موجه برای f_2 در نقطه B بدست می‌آید. اگر بخواهیم هر دو هدف همزمان این بهترین مقادیر را داشته باشند، به نقطه F^* می‌رسیم که نقطه ایده‌آل است (شکل ۱۱). جواب ایده‌آل جوابی است که همزمان در تمامی اهداف بهینه است. ملاحظه می‌شود که این نقطه در فضای موجه قرار ندارد. در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه جز در موارد استثنای جواب ایده‌آل جوابی شدنی نیست و سؤال این است که از میان جواب‌های موجه، کدام جواب یا جواب‌ها باید به عنوان جواب برتر معرفی شوند.

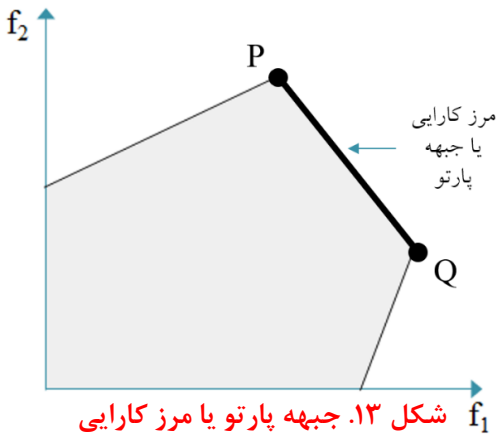
تسلط و جواب‌های پارتو



رابطه تسلط توسط اقتصاددان ایتالیایی، ویلفردو پارتو (۱۸۴۳-۱۹۲۳) مطرح شد. در یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه، گفته می‌شود جواب A بر B تسلط دارد، اگر در تمامی اهداف، A به خوبی B و حداقل در یک هدف از آن بهتر باشد. در شکل ۱۲، A بر B_1 و B_2 تسلط دارد چون در هر دو هدف نسبت به آن‌ها مقدار بیشتری دارد، اما B_2 و B_1 هیچ‌یک بر دیگری تسلط ندارند، B_1 از منظر هدف f_1 از B_2 بهتر اما در هدف دوم از آن ضعیف‌تر است.

جواب‌های کارا (بهینه پارتو)، مجموعه جواب‌هایی هستند که تحت سلطه هیچ جوابی نیستند. برای یک جواب کارا، بهبود در یک هدف تنها در صورت تنزل در حداقل یک هدف دیگر امکان پذیر است. در شکل ۱۲، نقطه C جواب پارتو است. به مجموعه جواب‌های کارا در فضای اهداف مرز کارایی یا جبهه پارتو گفته می‌شود. در حالتی که هر دو هدف باید بیشینه شود، برای بررسی این که آیا یک نقطه در منطقه موجه کارا هست یا

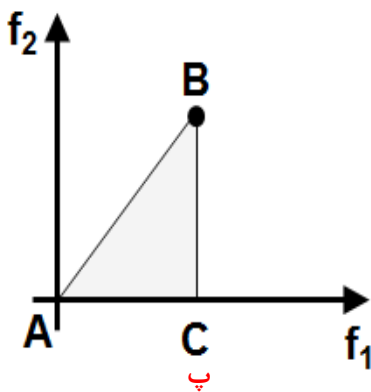
خیر باید دید که آیا امکان بهبود مقدار هدف اول (حرکت به سمت راست)، بهبود هدف دوم (حرکت به سمت



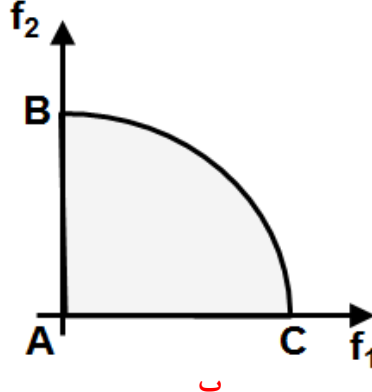
شکل ۱۳. جبهه پارتو یا مرز کارایی

بالا) یا بهبود همزمان هر دو (حرکت در جهت شمال شرقی) وجود دارد یا خیر. اگر با کوچکترین حرکت در هر یک از این جهات از منطقه موجه خارج شویم نتیجه می‌گیریم که این نقطه کارا بوده و بر روی مرز پارتو قرار داد. بنابراین در مسائل دوهدفه اگر هر دو هدف بیشینه‌سازی باشند، در فضای اهداف جواب‌های کارا در مرز شمال شرقی منطقه موجه قرار می‌گیرند (قاعده شمال شرقی). نقاط روی پاره خط PQ در شکل ۱۳ جبهه پارتو را تشکیل

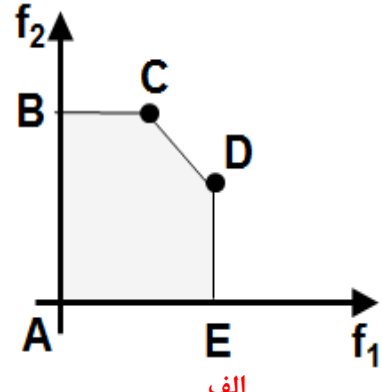
می‌دهند. چند مثال دیگر در مورد چگونگی تشخیص مرز کارایی به روش ترسیمی در شکل ۱۴ ارائه شده است. بر اساس قاعده شمال شرقی در شکل ۱۴-الف پاره خط CD مرز کاراست، در شکل ۱۴-ب منحنی BC مرز کارایی را تشکیل می‌دهد و در مجموعه جواب‌های موجه شکل ۱۴-پ تنها نقطه B یک جواب کارا است. در شکل اخیر نقطه B نقطه ایده‌آل نیز می‌باشد. (چرا؟)



پ



ب



الف

شکل ۱۴. مثال‌هایی برای تعیین مرز کارایی

$$\begin{aligned} \text{Maximize } f_1 &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Maximize } f_2 &= x_1 \\ \text{Subject to:} \\ 3x_1 + 2.5x_2 &\leq 450 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مراحل تعیین مرز پارتو به روش ترسیمی

در مثال تولیدکننده تلویزیون که هدف بیشینه‌سازی سود بود، هدف دومی به مسأله اضافه می‌شود: تولید حداکثر مقدار از تلویزیون نوع A. با افزودن این هدف، مدلی دوهدفه بصورت روبرو داریم. برای تعیین جواب‌های پارتو به روش ترسیمی، گام‌های زیر طی می‌شود:

گام ۱، رسم منطقه موجه در فضای تصمیم و تعیین نقاط گوشه: با

توجه به اینکه محدودیت‌های مسأله نسبت به حالت تک‌هدفه تغییر نکرده، منطقه موجه همانند حالت تک‌هدفه است که در شکل ۱۵ مجدداً ارائه شده است. در شکل ملاحظه می‌شود که نقاط گوشه عبارتند از A، B، C و D که f1 در نقطه C و f2 در نقطه B بهینه می‌شوند.

گام ۲، محاسبه مقدار هر یک از توابع هدف به ازای تمامی نقاط گوشه:

برای هر یک از نقاط گوشه مقدار اهداف تعیین می‌شود. مثلاً برای نقطه A(0,0) سود ۰ و تولید مدل A یعنی مقدار هدف دوم نیز ۰ خواهد بود. برای نقطه

رسم منطقه موجه در فضای تصمیم و تعیین نقاط گوشه

محاسبه مقدار هر یک از توابع هدف به ازای نقاط گوشه

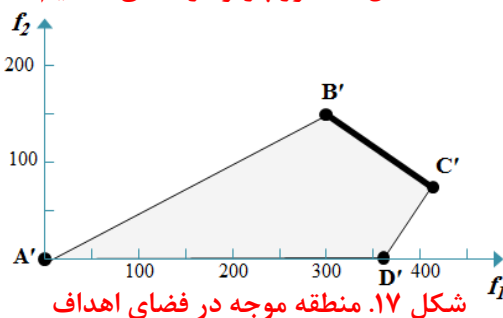
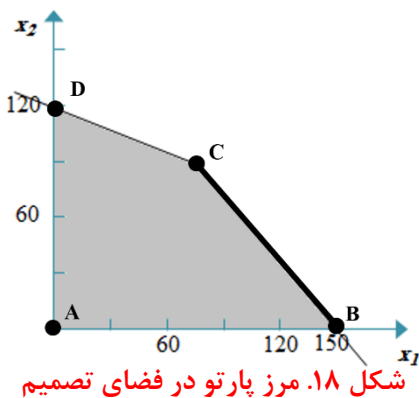
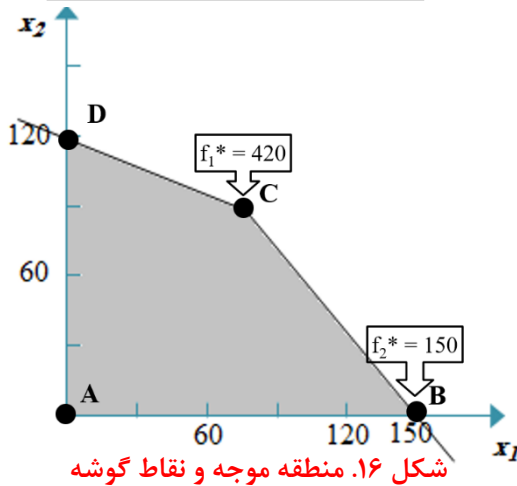
رسم نقاط متناظر و تشکیل منطقه موجه در فضای اهداف

تعیین مرز پارتو با قاعده شمال شرقی

شکل ۱۵. مراحل تعیین مرز پارتو به روش ترسیمی

جدول ۲. مقدار توابع هدف به ازای نقاط گوشه

(x_1, x_2)	(f_1, f_2)
A(0, 0)	A'(0, 0)
B(150, 0)	B'(300, 150)
C(75, 90)	C'(420, 75)
D(0, 120)	D'(360, 0)



$B(150,0)$ مقادیر تابع هدف ۳۰۰ و ۱۵۰ است و برای نقاط $C(75,90)$ و $D(0,120)$ نیز مقادیر تابع هدف محاسبه و نتایج در جدول ۲ آمده است. نقاط A' ، B' ، C' و D' متناظر نقاط A ، B ، C و D در فضای جواب هستند.

گام ۳، رسم نقاط متناظر و تشکیل منطقه موجه در فضای اهداف:

برای تعیین منطقه موجه در فضای اهداف، یک دستگاه مختصات با محورهای f_1 و f_2 در نظر گرفته شده، نقاط A' ، B' ، C' و D' روی آن مشخص می‌شود. اگر نقاط را با همان ترتیب فضای متغیرهای تصمیم به هم وصل کنیم، چهارضلعی $A'B'C'D'$ تشکیل می‌شود که نشان دهنده‌ی منطقه موجه در فضای اهداف است (شکل ۱۷).

گام ۴، تعیین مرز پارتو با قاعده شمال شرقی: بر اساس

قاعده شمال شرقی در شکل ۱۷ مرز کارایی پاره‌خط $B'C'$ است که متناظر آن در فضای تصمیم، پاره‌خط BC است. با توجه به اینکه گزینه برتر باید از میان جواب‌های مسلط انتخاب شود، در این مثال باید جواب نهایی از میان نقاطی انتخاب شود که بر روی پاره‌خط BC قرار دارند.

جمع‌بندی

روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه دسته مهمی از تکنیک‌های تئوری تصمیم و مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی هستند. در این جلسه دیدیم که در برنامه‌ریزی ریاضی اهداف و محدودیت‌ها به صورت روابط ریاضی بیان می‌شوند. برای جمع‌بندی آموزه‌های این جلسه از یک مثال کمک می‌گیریم.

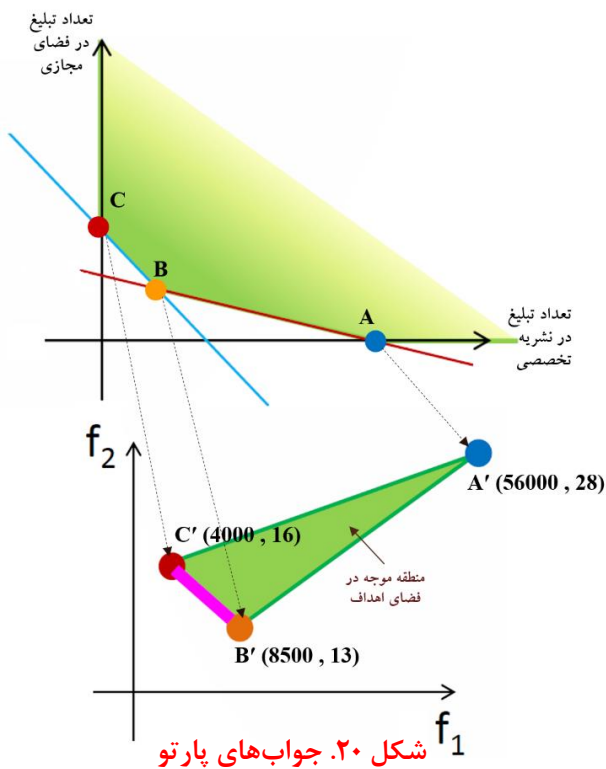
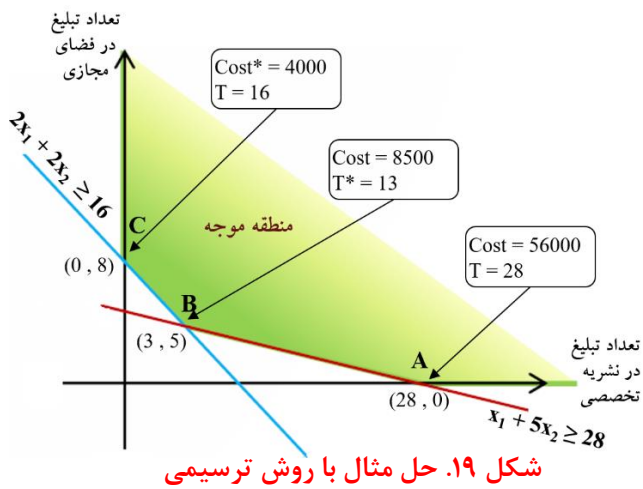
مثال: شرکتی می‌خواهد در خصوص تعداد تبلیغات ماهانه در نشریات تخصصی و فضای مجازی تصمیم‌گیری کند. متغیرهای تصمیم عبارتند از تعداد تبلیغ در نشریه تخصصی (x_1) و تعداد تبلیغ در فضای مجازی (x_2). مسأله دارای دو هدف است: کمینه‌سازی هزینه‌ها و کمینه‌سازی زمان تخصیص‌یافته توسط

کارشناس. هر تبلیغ در نشریه تخصصی ۲۰۰۰ و در فضای مجازی ۵۰۰ ریال هزینه دارد. همچنین کارشناس برای انجام امور مربوط به تبلیغ در نشریه تخصصی و فضای مجازی به ترتیب ۱ و ۲ ساعت زمان صرف می‌کند. این تبلیغات باید منجر به عقد حداقل ۱۶ قرارداد جدید شوند درحالی که هر تبلیغ در نشریه تخصصی منجر به ۲ قرارداد و هر تبلیغ در فضای مجازی نیز منجر به ۲ قرارداد می‌شود. هر ماه باید ۲۸ مشتری بالقوه شناسایی

$\text{Min } f_1 = 2000x_1 + 500x_2$	کمینه‌سازی هزینه
$\text{Min } f_2 = x_1 + 2x_2$	کمینه‌سازی زمان تخصیص
$2x_1 + 2x_2 \geq 16$	عقد حداقل ۱۶ قرارداد
$x_1 + 5x_2 \geq 28$	جذب حداقل ۲۸ مشتری بالقوه
$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$	نامنفی بودن متغیرها

شود و به تجربه می‌دانیم که هر تبلیغ در نشریه تخصصی و فضای مجازی به ترتیب منجر به شناسایی ۱ و ۵ مشتری بالقوه می‌شود. مدل ریاضی مسأله به صورت روبرو است.

از روش ترسیمی برای درک بهتر مفاهیم کمک گرفتیم. محدودیت‌ها رسم شده و اشتراک مناطق موجه آنها به عنوان منطقه موجه مسأله در نظر گرفته می‌شود. در این مثال محدودیت‌ها به صورت بزرگتر مساوی هستند، بنابراین ناحیه بالا سمت راست به عنوان ناحیه موجه معرفی می‌شود. با شناسایی نقاط گوشه و محاسبه



مقدار توابع هدف به ازای هر نقطه گوشه، جواب بهینه برای هر تابع هدف مشخص می‌شود. نقاط گوشه عبارتند از A, B و C. با توجه به مقدار توابع هدف در هر نقطه، هدف اول یعنی هزینه در نقطه C و هدف دوم یعنی زمان در نقطه B کمینه می‌شود. هر دو هدف در یک نقطه بهینه نمی‌شوند یعنی نقطه ایده‌آل یک نقطه موجه نیست. در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه باید جواب‌های پارتو تعیین گردد تا جواب نهایی از میان آن‌ها گزینش شود. برای تعیین جواب‌های پارتو به روش ترسیمی باید منطقه موجه را در فضای جواب‌ها رسم کنیم. یعنی در دستگاه مختصات به جای متغیرهای تصمیم، توابع هدف قرار می‌گیرند. هر نقطه در فضای اهداف نشان می‌دهد که چقدر هزینه و زمان کارشناس صرف خواهد شد. با توجه به اینکه هر دو هدف کمینه‌سازی هستند، به جای قاعده شمال شرقی، باید از قاعده جنوب غربی استفاده کرد یعنی مرز کارایی در بخش جنوب غربی منطقه موجه قرار می‌گیرد. در شکل ۲۰ ملاحظه می‌کنید که با نمایش نقاط گوشه متناظر در فضای اهداف منطقه موجه تعیین شده و بر اساس قاعده جنوب غربی، پاره خط B'C' در فضای اهداف و متناظر آن پاره خط BC در فضای تصمیم مرکز کارایی است. البته روش ترسیمی برای مسائل بزرگ که تعداد اهداف و متغیرها زیاد است، قابل استفاده نیست. در جلسات آینده با تکنیک‌هایی آشنا خواهیم شد که بدون نیاز به نمایش جواب‌ها و فضای موجه به صورت ترسیمی، بتوانیم جواب‌های پارتو و جواب برتر را تعیین کنیم.

مبحث نهم: روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه

اهداف یادگیری

- خواننده پس از مطالعه این مبحث قادر خواهد بود که:
- منطق و شرایط مناسب استفاده از روش‌های وزن‌دهی به توابع هدف، تبدیل اهداف به محدودیت و برنامه‌ریزی سازشی را درک کند.
- پارامترها و داده‌های مورد نیاز هر یک از روش‌های فوق را تشخیص دهد.
- جواب‌های کارا و جواب برتر را با هر یک از روش‌های وزن‌دهی به توابع هدف، تبدیل اهداف به محدودیت و برنامه‌ریزی سازشی تعیین کند.

مقدمه

در مبحث قبل دیدیم که در برنامه‌ریزی ریاضی، تابع هدف و محدودیت‌ها به صورت روابط ریاضی مدل می‌شوند. اگر مسأله دارای یک تابع هدف باشد به روش ترسیمی، استفاده از نرم‌افزار بهینه‌سازی یا سایر تکنیک‌ها می‌توان جواب بهینه مسأله را تعیین کرد. اما اگر مسأله دارای چندین هدف باشد، جوابی که تمام اهداف در آن بهینه می‌شوند و به آن جواب ایده‌آل گفته می‌شود عموماً یک جواب موجه نیست. در این حالت باید از جواب‌های پارتو یا کارا کمک گرفت. جواب کارا یعنی جوابی که بهبود یک هدف بدون تضعیف یک یا چند هدف دیگر امکان پذیر نیست. در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه، جواب نهایی باید از میان جواب‌های پارتو انتخاب شود. بنابراین ابتدا باید جواب‌های پارتو شناسایی شده و سپس از میان آن‌ها جواب برتر تعیین گردد. جواب برتر یا ترجیحی، جوابی است که تصمیم‌گیرنده بر اساس معیارهای ذهنی و ترجیحات شخصی از میان جواب‌های کارا انتخاب می‌کند. تکنیک‌های مختلف برای تعیین جواب‌های پارتو و جواب برتر پیشنهاد شده است که در این جلسه سه تکنیک در این مجموعه معرفی خواهند شد: روش وزن‌دهی به توابع هدف، روش تبدیل اهداف به محدودیت و تکنیک برنامه‌ریزی سازشی.

روش وزن‌دهی به توابع هدف

در روش‌های برنامه‌ریزی چندهدفه لازم است اهداف چندگانه تبدیل به یک هدف شوند تا امکان تعیین جواب بهینه با استفاده از تکنیک‌های تک‌هدفه فراهم گردد. تفاوت روش‌های مختلف برنامه‌ریزی چندهدفه در منطقی است که برای تبدیل مسأله چندهدفه به تک‌هدفه بکار می‌رود. رایج‌ترین روش این است که برای هر تابع هدف یک وزن w در نظر گرفته شده و هر هدف در وزن آن ضرب و جمع این حاصل‌ضرب‌ها، تابع هدف

$$\begin{aligned} \text{Max } f &= w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_r f_r \\ \text{Subject to:} \\ g_i(X) &\leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

نهایی در مسأله بهینه‌سازی تک‌هدفه را تشکیل می‌دهد. مدل عمومی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه به روش وزن‌دهی به اهداف به شکل روبرو است. در این مدل فرض شده تعداد

اهداف برابر است با r و وزن هدف r ام برابر است با w_r . تمام اهداف باید بیشینه شوند. البته اگر برخی اهداف به صورت کمینه‌سازی باشند کافی است با ضرب در -1 آن‌ها را تبدیل به بیشینه‌سازی کرد. مدل دارای m محدودیت به فرم عمومی $g_i(X) \leq b_i$ است و متغیرهای تصمیم نیز غیرمنفی فرض شده‌اند. چند نکته تکمیلی در مورد این روش:

- وزن‌های تخصیص یافته به اهداف باید مثبت باشند و مجموع آن‌ها نیز برابر با ۱ در نظر گرفته می‌شود.

$$\sum_{k=1}^r w_k = 1, \quad w_k > 0$$
- جوابی که برای هر ترکیب از مقادیر وزن‌ها بدست می‌آید یک جواب کارا است. بنابراین با حل مدل با مقادیر مختلف w می‌توان جواب‌های کارا را بدست آورد.
- برای بدست آوردن یک جواب به عنوان جواب برتر، به هر هدف باید بر اساس ترجیحات تصمیم‌گیرنده، وزنی نشان دهنده اهمیت نسبی آن تخصیص داده، جمع وزنی اهداف به عنوان تابع هدف در نظر گرفته شده، جواب بهینه‌ی مدل ریاضی حاصل جواب برتر خواهد بود.

مثال: برای تشریح تکنیک‌های بهینه‌سازی چندهدفه، از مسأله تولیدکننده تلویزیون که در مبحث قبلی مطرح شد، استفاده می‌کنیم. در این مسأله دو محدودیت وجود داشت: محدودیت ظرفیت کارگاه مونتاژ و محدودیت ظرفیت کارگاه بسته‌بندی، در حالی که سود باید بیشینه می‌شد. به منظور تبدیل آن به یک مسأله

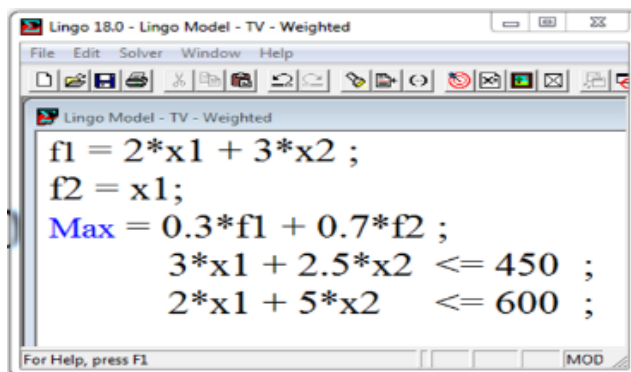
$$\begin{aligned} \text{بیشترین سود} \quad & \text{Max } f_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{بیشترین مقدار تولید محصول A} \quad & \text{Max } f_2 = x_1 \\ \text{Subject to:} \quad & \\ & 3x_1 + 2.5x_2 \leq 450 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } f &= 0.3(2x_1 + 3x_2) + 0.7(x_1) \\ \text{Subject to:} \quad & \\ & 3x_1 + 2.5x_2 \leq 450 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 600 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

بهینه‌سازی دوهدفه، فرض کنید هدف دومی به مدل اضافه شود که عبارتست از بیشینه کردن مقدار تولید از تلویزیون مدل A: $\text{Max } f_2 = x_1$ مدل ریاضی این مسأله دو هدفه به شکل روبرو خواهد بود:

برای تعیین جواب به روش وزنی، فرض کنید وزن تابع هدف اول (سود) ۰,۳ و وزن دومی (مقدار تولید از مدل A) ۰,۷ است. مدل حاصله با تابع هدف تلفیقی به صورت روبرو است. در این مدل محدودیت‌ها نسبت به حالت تک‌هدفه تغییر نمی‌کنند. با توجه به این که مدل خطی و شامل دو متغیر تصمیم

است می‌توان جواب بهینه را به روش ترسیمی تعیین کرد اما به منظور تسهیل کار، جواب با استفاده از نرم‌افزار



شکل ۱. پیاده‌سازی مدل وزن‌دهی به اهداف در LINGO

لینگو بدست آمده است. نحوه پیاده‌سازی مدل در نرم‌افزار در شکل ۱ نشان داده شده است. برای سهولت پیاده‌سازی در لینگو، ابتدا توابع هدف با دو متغیر به نام f_1 و f_2 تعریف و سپس تابع هدف اصلی به صورت Max و جمع کردن حاصل ضرب این دو در اوزان نوشته شده است. محدودیت‌های مسأله نیز به مدل اضافه می‌شوند. تابع هدف در نقطه $(x_1=150, x_2=0)$ بهینه می‌شود. در این

نقطه که یک نقطه کارا است (نگاه کنید به شکل ۱۸ از مبحث ۸) سود برابر ۳۰۰ و مقدار تابع هدف دوم یعنی تعداد تولید از مدل A ۱۵۰ واحد است.
 $f_1(150, 0) = 300$ و $f_2(150, 0) = 150$

نقاط قوت: روشی است ساده که بر اساس یک منطق قابل درک ایجاد شده است. با توجه به تک‌هدفه شدن مسأله، می‌توان از روش‌هایی که برای حل این گونه مسائل توسعه یافته برای تعیین جواب استفاده کرد. با تغییر وزن اهداف در تابع هدف می‌توان جواب‌های کارا و در نتیجه مرز پارتو را برای مسأله بدست آورد.

(نکته: در تشریح مفهوم مرز پارتو و چگونگی شناسایی آن در مبحث قبلی از روش ترسیمی استفاده شد. توجه کنید که در مسائل واقعی تعداد متغیرهای تصمیم عموماً بیش از ۲ متغیر است و روش ترسیمی تنها برای درک و یادگیری مفاهیم کارایی دارد. برای مسائل بزرگ لازم است از روش‌های کارآمد جایگزین استفاده کرد. تکنیک‌هایی که در این مبحث ارائه می‌شوند از جمله روش وزنی در مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه، علاوه بر تعیین جواب برتر می‌توانند جواب‌های کارا را نیز تعیین کنند.)

چالش‌های استفاده از روش: برای تعیین جواب برتر لازم است متناسب با اهمیتی که هر یک از اهداف دارند، وزنی به آن‌ها تخصیص یابد. بنابراین قبل از استفاده از این تکنیک، باید به روش مناسب وزن اهداف را تعیین کرد. همچنین چون در تابع هدف، مقادیری با کمیت‌های متفاوت با هم جمع می‌شوند، قبل از ضرب در اوزان و جمع اهداف باید آن‌ها بی‌مقیاس کرد تا قابل جمع باشند. یکی از روش‌های رایج برای بی‌مقیاس‌سازی عبارات تشکیل‌دهنده تابع هدف این است که برای هر هدف مقدار بیشینه بدست آمده و هر هدف بر این مقدار بیشینه تقسیم شود.

روش تبدیل هدف به محدودیت

در این روش برای تبدیل چند هدف به یک هدف، هدفی که مهمتر است در تابع هدف نگه داشته شده و سایر اهداف تبدیل به محدودیت می‌شوند. برای تبدیل سایر اهداف به محدودیت، در حالتی که اهداف باید ماکزیمم شود، برای هر هدف یک مقدار حداقلی به عنوان کران در نظر گرفته شده و محدودیت متناظر با هر یک از این اهداف بگونه‌ای نوشته می‌شود که در جواب بهینه مقدار بدست آمده برای این هدف از حداقل تعیین شده کمتر نباشد. بنابراین اگر بخواهیم هدف k ام را که باید بیشینه شود، تبدیل به محدودیت کنیم و مقدار حداقلی L_k برای آن در نظر گرفته شود، محدودیتی به صورت $f_k(X) \geq L_k$ خواهیم داشت و در جواب بهینه مقدار این هدف برابر L_k یا بیشتر از آن خواهد بود. نکته: اگر یک هدف به صورت کمینه‌سازی باشد برای تبدیل آن به محدودیت، کران حداکثری برای آن تعریف شده و محدودیت به شکل $f_k(X) \leq L_k$ خواهد بود. به

$$\text{Max } z = f_p$$

Subject to:

$$f_k(X) \geq L_k \quad k = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, r$$

$$g_i(X) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

فرض این که تمام اهداف به شکل ماکزیمم باشند، مدل ریاضی به صورت روبرو است:

در این مدل هدف p ام در تابع هدف

قرار گرفته و سایر اهداف تبدیل به محدودیت شده‌اند. یعنی اگر r هدف داشته باشیم، $r-1$ مورد از آن‌ها تبدیل به محدودیت شده و به محدودیت‌های اصلی مسأله اضافه می‌شوند. ورودی‌های مورد نیاز این روش عبارتند از این که کدام هدف در تابع هدف قرار گیرد و مقدار کران برای سایر اهداف چه مقدار باشد. نکات تکمیلی:

- هر جواب بهینه برای مدل حاصل، یک جواب کارا خواهد بود بنابراین با تغییر هدف قرار گرفته در تابع هدف و مقدار سمت راست اهداف تبدیل شده به محدودیت می‌توان تمام جواب‌های کارا را بدست آورد.
- اگر بدنبال بدست آوردن یک جواب به عنوان جواب برتر برای این روش باشیم، مهمترین هدف از نظر تصمیم‌گیرنده شناسایی شده و در تابع هدف قرار می‌گیرد. برای سایر اهداف نیز مقدار حداقلی (در حالت کمینه‌سازی حداکثری) مورد انتظار تصمیم‌گیرنده باید تعیین گردیده و به روش پیش گفته، اهداف تبدیل به محدودیت شوند. جواب حاصل، جواب ترجیحی از نظر تصمیم‌گیرنده خواهد بود.

- با تغییر تابع هدف و مقدار سمت راست اهداف تبدیل شده به محدودیت می‌توان تمام جواب‌های کارا را بدست آورد.

مثال: در مثال تولیدکننده گیرنده‌های تلویزیونی فرض کنید که سود هدف بهتر بوده و در تابع هدف

$$\text{Max } f_1 = 2x_1 + 3x_2$$

Subject to:

$$x_1 \geq 100$$

$$3x_1 + 2.5x_2 \leq 450$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 600$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

مدل نهایی قرار می‌گیرد. هدف دوم یعنی مقدار تولید از مدل A را نمی‌توان بیشینه کرد اما برای آن مقدار حداقلی ۱۰۰ در نظر گرفته می‌شود. یعنی گرچه از نظر تصمیم‌گیرنده تحقق بیشترین سود ممکنه اولویت دارد اما نباید به گونه‌ای برنامه‌ریزی شود که مقدار تولید از مدل A از ۱۰۰ واحد کمتر گردد. در مدل حاصله محدودیت $f_2 \geq 100$ یا $x_1 \geq 100$

به مسأله اضافه شده است. با وارد کردن مدل لینگو جواب بهینه نقطه $(x_1=100, x_2=60)$ تعیین می‌گردد. مقدار تابع هدف اول و دوم در این نقطه برابر است با ۳۸۰ و ۱۰۰:

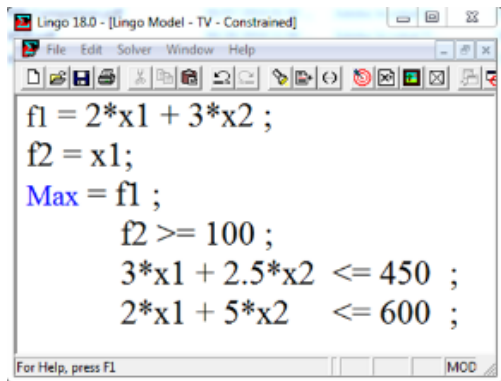
$$f_2(100, 60) = 100 \text{ و } f_1(100, 60) = 380$$

نقاط قوت: همانند روش وزن دهی به اهداف، با توجه به تک‌هدفه شدن مسأله، با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی تک‌هدفه می‌توان جواب را تعیین کرد. اشاره شد که با تغییر هدفی که در تابع هدف قرار گرفته و مقادیر کران در نظر گرفته

شده برای سایر اهداف در قالب محدودیت، می‌توان جواب‌های پارتو را بدست آورد. مزیت این روش نسبت به روش وزنی عدم نیاز به بی‌مقیاس‌سازی در تعیین جواب برتر است. زیرا اهداف با هم تلفیق نمی‌شوند.

چالش‌های استفاده از روش: قبل از استفاده از این روش برای تعیین یک جواب به عنوان جواب

ترجیحی باید مشخص نمود که کدام هدف در تابع هدف قرارگیرد. همچنین باید تعیین گردد که برای سایر اهدافی که تبدیل به محدودیت می‌شوند، مقادیر حداقلی (یا حداکثری در حالت کمینه‌سازی) چقدر باشد. در نظر گرفتن مقادیر سختگیرانه‌ای برای کران اهداف تبدیل شده به محدودیت، ممکن است باعث شود که هیچ نقطه‌ای موجه نبوده و مسأله جواب نداشته باشد یا مقدار بدست آمده برای هدف اصلی مسأله بدلیل کوچک شدن منطقه موجه از کیفیت مطلوبی برخوردار نباشد. در این حالت باید با در نظر گرفتن کران‌های منعطف‌تر برای این اهداف، منطقه موجه را بزرگتر کرد تا امکان رسیدن به جوابی بهتر برای هدف اصلی مسأله فراهم گردد. در مثال تولید کننده تلویزیون برای تعیین کران هدف دوم می‌توان بدین صورت عمل کرد: درمبحث ۸ دیدیم که بهترین مقدار ممکنه برای f_2 برابر است با ۱۵۰ در حالی که در نقطه‌ای که f_1 بهینه می‌شود مقدار f_2 برابر است با ۷۵. بنابراین کران f_2 باید بین ۷۵ تا ۱۵۰ باشد. کران کوچکتر از ۷۵، منجر به ایجاد یک محدودیت زائد خواهد شد چون تحقق مقدار ۷۵ برای f_2 وقتی f_1 بهینه می‌شود، تضمین شده است. در نظر گرفتن مقدار بزرگتر از ۱۵۰ برای f_2 نیز باعث می‌شود مسأله جواب موجه نداشته باشد، چون بر اساس محدودیت‌های مدل، بهترین مقدار ممکنه برای f_2 برابر است با ۱۵۰.



شکل ۲. پیاده‌سازی مدل تبدیل اهداف به محدودیت در LINGO

روش برنامه‌ریزی سازشی

منطق روش برنامه‌ریزی سازشی که به آن‌ها برنامه‌ریزی توافقی نیز گفته می‌شود، همان منطق روش‌های سازشی از قبیل تاپسیس و ویکور در مجموعه روش‌های چندشاخصه است: جواب برتر جوابی است که کمترین فاصله را از جواب ایده‌آل دارد. به منظور اندازه‌گیری فاصله هر جواب از نقطه ایده‌آل از شاخصی که فاصله

متریک p (Lp-metric) نام دارد استفاده می‌شود. فاصله متریک طبق رابطه $\left[\sum_{k=1}^r \left(\frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}$ بدست می‌آید: در این رابطه ابتدا مقدار بهینه‌ی تک تک اهداف بدست می‌آید. بدین منظور برای هر هدف جداگانه بهینه‌سازی انجام شود. مقدار بهینه هدف k ام با f_k^* نشان داده می‌شود. برای بدست آوردن فاصله نقطه X از جواب ایده‌آل، تفاضل مقدار هر هدف بازای X از مقدار ایده‌آل این هدف محاسبه می‌شود $f_k^* - f_k(X)$. سپس با تقسیم بر یک مقدار ثابت که عبارتست از تفاضل بهترین و بدترین مقدار این تابع، بی‌مقیاس می‌شود $\left(\frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \right)$. چنین کسری برای تمام اهداف بدست آمده، هر کدام به توان p می‌رسند، با هم جمع می‌شوند

و ریشه p ام محاسبه می‌شود $\left[\sum_{k=1}^r \left(\frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}$. به این مقدار فاصله متریک p یا Lp-metric گفته می‌شود. p می‌تواند هر مقدار صحیح مثبت باشد $p = 1, 2, 3, \dots, \infty$ البته استفاده از مقادیر ۱ و ۲ و ∞ رایج‌تر است. فاصله‌ای که با $p=1$ بدست می‌آید فاصله متعامد یا بلوکی، فاصله با $p=2$ فاصله اقلیدسی و فاصله

با $p=\infty$ فاصله چبی‌شف نام دارد. به عنوان مثال فاصله اقلیدسی ($p=2$) بدین صورت بدست می‌آید:

$$L_2(X) = \left[\sum_{k=1}^r \left(\frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

چون در روش برنامه‌ریزی سازشی فاصله تا نقطه ایده‌آل باید کمینه گردد، L_p در تابع هدف قرار

$$\begin{aligned} \text{Min } L_p(X) &= \left[\sum_{k=1}^r \left(\frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ \text{Subject to:} \\ g_i(X) &\leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ f_k^* &\text{ مقدار بهینه تابع هدف } k \text{ ام} \\ f_k^- &\text{ بدترین مقدار تابع هدف } k \text{ ام در ماتریس بازده} \end{aligned}$$

گرفته و با در نظر گرفتن محدودیت‌های مسأله کمینه می‌شود. هرچه مقدار p بزرگتر باشد، یعنی مقادیر اختلاف بزرگتر اهمیت بیشتر داشته و در اولویت کمینه‌سازی قرار می‌گیرند. برای $p=\infty$ هدفی که بیشترین فاصله را از مقدار بهینه خود دارد کمینه می‌شود.

مثال: برای تعیین جواب برتر در مثال تولیدکننده تلویزیون به روش برنامه‌ریزی سازشی، ابتدا جواب بهینه هر یک از اهداف تعیین می‌شود. اگر هدف اول یعنی سود را در تابع هدف قرار داده و بیشینه سازیم، نقطه بهینه $(x_1=75, x_2=90)$ تعیین می‌گردد. مقدار تابع هدف اول و دوم در این نقطه برابر است با ۴۲۰ و ۷۵:

$f_1(75, 90) = 420$ و $f_2(75, 90) = 75$. هدف دوم در نقطه $(x_1=150, x_2=0)$ بیشینه می‌شود و مقدار تابع هدف اول و دوم در این نقطه برابر است با ۴۲۰ و ۷۵: $f_1(150, 0) = 300$ و $f_2(150, 0) = 150$. این

نتایج در جدولی به نام ماتریس بازده درج می‌شود (جدول ۱). در سطر k ام این ماتریس

$\begin{aligned} \text{Max } f_1 &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Subject to:} \\ 3x_1 + 2.5x_2 &\leq 450 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Max } f_2 &= x_1 \\ \text{Subject to:} \\ 3x_1 + 2.5x_2 &\leq 450 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$
--	--

جدول ۱. ماتریس بازده

	f_1	f_2
$f_1^* \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 75 \\ x_2 = 90 \end{cases}$	420*	75
$f_2^* \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 150 \\ x_2 = 0 \end{cases}$	300	150*
	$f_1^* = 420$ $f_1^- = 300$	$f_2^* = 150$ $f_2^- = 75$

نقطه‌ای که به ازای آن هدف k ام بهینه می‌شود و همچنین مقدار تمام اهداف در آن نقطه درج می‌شود. بهترین مقدار در ستون k ام برابر است با f_k^* و بدترین مقدار این ستون نیز با f_k^- نشان داده می‌شود. اکنون با داشتن مقادیر f_k^* و f_k^- برای تمام اهداف می‌توان جواب برتر را به روش برنامه‌ریزی سازشی برای هر مقدار p محاسبه کرد.

$$\text{Min } L_1(x_1, x_2) = \left(\frac{420 - (2x_1 + 3x_2)}{420 - 300} \right) + \left(\frac{150 - x_1}{150 - 75} \right)$$

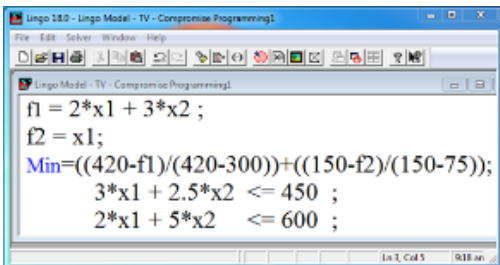
Subject to:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2.5x_2 &\leq 450 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

برای فاصله متریک L_1 ($p=1$) تابع

$$\text{هدف } \text{Min } L_1(X) = \sum_{k=1}^r \left(\frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \right)$$

خواهد بود و مدل ریاضی برای مثال تولید کننده تلویزیون به شکل روبروست:



با پیاده‌سازی مدل در لینگو (شکل ۳)، جواب بهینه نقطه $(x_1=150, x_2=0)$ تعیین می‌گردد. مقدار تابع هدف اول و دوم در این نقطه برابر است با ۳۰۰ و ۱۵۰:

$$f_2(150, 0) = 150 \text{ و } f_1(150, 0) = 300$$

برای فاصله متریک L_2 ($p=2$) فرم کلی تابع هدف به صورت

$$\text{Min } L_2(X) = \sqrt{\sum_{k=1}^r \left(\frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \right)^2}$$

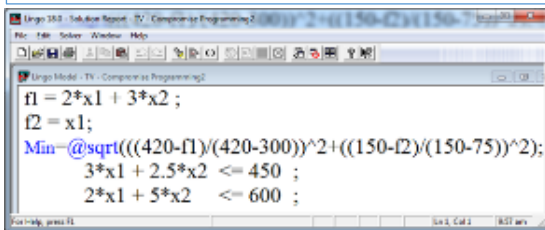
خواهد بود و مدل ریاضی برای مثال تولید کننده تلویزیون به شکل روبروست:

چون در تابع هدف متغیرها به توان ۲ رسیده‌اند، مدل حاصل دیگر یک مدل

$$\text{Min } L_1(x_1, x_2) = \sqrt{\left(\frac{420 - (2x_1 + 3x_2)}{420 - 300} \right)^2 + \left(\frac{150 - x_1}{150 - 75} \right)^2}$$

Subject to:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2.5x_2 &\leq 450 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



خطی نیست. با پیاده‌سازی مدل در لینگو (شکل ۴)، جواب بهینه نقطه $(x_1=112.5, x_2=45)$ تعیین می‌گردد. مقدار تابع هدف اول و دوم در این نقطه برابر است با ۳۶۰ و ۱۱۲٫۵:

$$f_2(112.5, 45) = 112.5 \text{ و } f_1(112.5, 45) = 360$$

پیاده‌سازی شده در لینگو از تابع sqrt استفاده شده است که جذر یا ریشه دوم یک عبارت را محاسبه می‌کند.

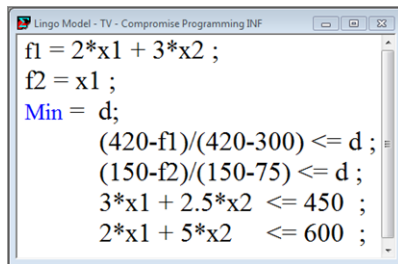
شکل ۴. پیاده‌سازی مدل برنامه‌ریزی سازشی با L_2 در LINGO

$$\text{Min } L_\infty(X) = d$$

Subject to:

$$\begin{aligned} \frac{420 - (2x_1 + 3x_2)}{420 - 300} &\leq d \\ \frac{150 - x_1}{150 - 75} &\leq d \\ 3x_1 + 2.5x_2 &\leq 450 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

برای فاصله متریک L_∞ یعنی وقتی $p=\infty$ است، مدل‌سازی مقداری متفاوت است. از نظر ریاضی به توان بی‌نهایت رساندن یک عبارت بی‌معناست. اما می‌توان مدل‌سازی را بر اساس مفهوم فاصله چبی‌شف که برای $p=\infty$ تعریف شده، انجام داد. بدین منظور اختلاف بین یک تابع هدف و مقدار بهینه آن برای تمام توابع هدف تعیین شده و فاصله چبی‌شف برابر است با بیشترین اختلاف که باید کمینه شود. در مدل ریاضی این بیشترین

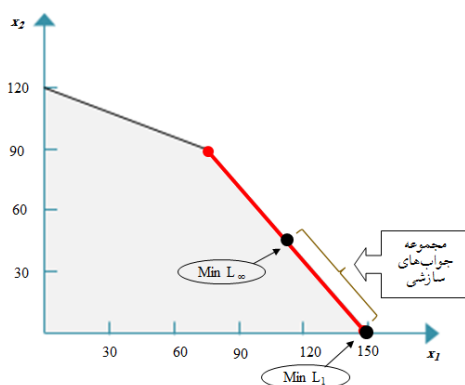


شکل ۵. پیاده‌سازی مدل برنامه‌ریزی
سازشی با L_∞ در LINGO

اختلاف با d نشان داده شده و با جهت کمینه شدن در تابع هدف قرار می‌گیرد. برای تعیین اینکه کدام هدف بیشترین فاصله را از مقدار بهینه خود دارد محدودیت‌هایی به شکل $\frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \leq d$ به مدل اضافه شده و با اضافه شدن محدودیت‌های اصلی، مدل کامل می‌شود. مدل حاصل خطی بوده و با وارد کردن آن در لینگو، (شکل ۵)، جواب بهینه نقطه $(x_1=112.5, x_2=45)$ تعیین می‌گردد. مقدار تابع هدف اول و دوم در این نقطه برابر است با ۳۶۰ و ۱۱۲٫۵:

$$f_2(112.5, 45) = 112.5 \text{ و } f_1(112.5, 45) = 360$$

به چند نکته تکمیلی در مورد روش برنامه‌ریزی سازشی توجه کنید:



شکل ۶. مجموعه جواب‌های سازشی
زیرمجموعه‌ای از جواب‌های کارا

- اثبات می‌شود که جواب‌های بدست آمده با حل مدل برنامه‌ریزی سازشی به ازای مقادیر مختلف p ، جواب‌های کارا هستند. به این جواب‌ها، مجموعه جواب‌های سازشی یا توافقی گفته می‌شود (شکل ۶).

- جواب‌های به دست آمده به روش برنامه‌ریزی سازشی در مسائل دوهدفه بر روی پاره‌خطی قرار دارند ابتدای آن جواب حاصل از کمینه‌سازی L_1 و انتهای آن جواب حاصل از مینیموم کردن L_∞ است.

- به منظور در نظر گرفتن متفاوت اهداف، می‌توان

برای هر هدف یک وزن در نظر گرفت و در محاسبه فاصله این وزن‌ها در فاصله محاسبه شده برای هر هدف ضرب شود (برنامه‌ریزی سازشی وزنی). در این حالت رابطه تابع هدف به شکل زیر خواهد شد:

$$\text{Min } L_p(X) = \left[\sum_{k=1}^r \left(w_k \times \frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^* - f_k^-} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

نقاط قوت: در روش برنامه‌ریزی سازشی نیازی به اخذ اطلاعات اولیه در خصوص ترجیحات تصمیم‌گیرنده نیست. همچنین بازای هر مقدار p یک جواب به عنوان جواب برتر بدست می‌آید.

چالش‌های استفاده از این روش: به ترجیحات تصمیم‌گیرنده توجهی نمی‌شود و همانگونه که اشاره شد بر اساس کمینه کردن فاصله از جواب ایده‌آل یک جواب به عنوان جواب نهایی ارائه می‌شود. همچنین اشاره شد که این روش در حالت کلی نمی‌تواند تمام جواب‌های کارا را بدست آورد و تنها زیرمجموعه‌ای از جواب‌های کارا یعنی جواب‌های سازشی بدست می‌آیند.

جمع‌بندی

در این مبحث سه روش برای تعیین جواب‌های کارا و جواب برتر در مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه معرفی شدند: وزن‌دهی به توابع هدف، تبدیل اهداف به محدودیت و برنامه‌ریزی سازشی. در روش وزن‌دهی، برای هر هدف یک وزن در نظر گرفته شده و مجموع وزنی اهداف به عنوان تابع هدف در یک مسئله بهینه‌سازی

تک هدفه در نظر گرفته می‌شود. در روش تبدیل اهداف به محدودیت، مهمترین هدف در مدل ریاضی به عنوان تابع هدف در نظر گرفته شده و بهینه می‌شود در حالی که برای سایر اهداف بسته به این که باید بیشینه شوند یا کمینه، یک مقدار حداقلی یا حداکثری در نظر گرفته شده و به ازای هر یک از این اهداف، محدودیتی که بر اساس آن مقدار هدف از کران تعریف شده کمتر یا بیشتر نباشد در مدل تعریف می‌شود. در روش برنامه‌ریزی سازشی تابع هدف عبارتست از فاصله از جواب ایده‌آل که باید کمینه گردد.

اطلاعات مورد نیاز در روش وزنی عبارتست از وزن اهداف، در روش دوم تبدیل اهداف به محدودیت باید مشخص شود کدام هدف در تابع هدف قرار گیرد و مقدار کران برای سایر متغیرها چقدر باشد. روش سوم نیاز به هیچگونه اطلاعات اولیه نداشته و با استفاده از رابطه فاصله L_p متریک، تابع هدف نوشته شده، با اضافه شدن محدودیت‌های مسأله، مدل ریاضی برای کمینه کردن فاصله از نقطه ایده‌آل تشکیل و حل می‌شود.

هر سه روش قادرند جواب‌های کارا را تعیین کنند. در روش وزن‌دهی، با تغییر اوزان می‌توان جواب‌های کارا را بدست آورد. البته به این صورت تنها جواب‌های کارایی بدست می‌آید که در نقاط گوشه (نقاط برخورد محدودیت‌ها) قرار دارند. در روش تبدیل اهداف به محدودیت با تغییر تابع هدف و کران اهداف تبدیل شده به محدودیت می‌توان جواب‌های کارایی مختلف را بدست آورد در حالی که جواب‌های کارایی بدست آمده محدود به نقاط گوشه نبوده و از منظر تئوریک می‌توان تمام جواب‌های کارا را به این روش تعیین کرد. در روش سازشی، تغییر فاصله متریک مورد استفاده یعنی مقدار p منجر به حصول جواب‌های کارایی مختلف می‌شود در حالی که در این روش، در حالت کلی تنها زیرمجموعه‌ای از جواب‌های کارا که به آن‌ها جواب‌های سازشی یا توافقی گفته می‌شود بدست می‌آیند و نه تمام جواب‌های کارا.

جدول ۲. مقایسه روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه

ایده اصلی	اطلاعات مورد نیاز	نحوه تعیین جواب‌های کارا	عملکرد در تعیین جواب‌های کارا
وزن‌دهی به توابع هدف	وزن هر تابع هدف	تغییر اوزان	جواب‌های کارایی گوشه‌ای
تبدیل اهداف به محدودیت	تعیین تابع هدف و مقدار سمت راست سایر اهداف	تغییر تابع هدف و مقادیر سمت راست سایر اهداف	تمام جواب‌های کارا
برنامه‌ریزی سازشی	یافتن جواب دارای کمترین فاصله از جواب ایده‌آل	محاسبه فاصله با نرم‌های (p) مختلف	تنها جواب‌های سازشی

مبحث دهم: برنامه‌ریزی آرمانی

اهداف یادگیری

خواننده پس از مطالعه این مبحث قادر خواهد بود:

- مزایای روش برنامه‌ریزی آرمانی و تفاوت آن با سایر روش‌های تصمیم‌گیری چندهدفه را بیان نماید.
- تفاوت هدف و آرمان، محدودیت‌های نرم و سخت و انحراف مثبت و منفی را بیان نموده و در مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی آرمانی از هر کدام به درستی استفاده نماید.
- بر اساس اهمیت نسبی و تبادل میان آرمان‌ها، بین رویکرد تقدمی و وزنی روش مناسب را انتخاب کند.
- به روش ترسیمی یا با استفاده از نرم‌افزار، جواب مسائل برنامه‌ریزی آرمانی را تعیین و نتایج را تفسیر کند.

مروری بر جلسات قبل

تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندهدفه مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی و بهینه‌سازی هستند. منظور از هدف، بیان ریاضی خواسته‌های تصمیم‌گیرنده است که در آن جهت مطلوب نیز به صورت بیشینه و کمینه بیان می‌شود. متغیرهای تصمیم عواملی هستند که تصمیم‌گیرنده بر روی آن‌ها کنترل دارد. مقدار آن‌ها باید به گونه‌ای تعیین شود که اهداف محقق گردد. منظور از محدودیت، قیدهایی است که بر روی متغیرهای تصمیم گذاشته می‌شود و رعایت آن‌ها لازمی قابل اجرا بودن راه حل‌هاست و بدون رعایت آن‌ها، جواب بدست آمده موجه نخواهد بود. متغیرهای تصمیم عموماً غیرمنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) فرض می‌شوند که به آن محدودیت علامت گفته می‌شود. جوابی که در همه‌ی محدودیت‌ها صدق می‌کند، جواب موجه نام دارد و مجموعه جواب‌های موجه، منطقه موجه مسأله را تشکیل می‌دهند. جواب بهینه جواب موجهی است که تابع هدف به ازای آن بهترین مقدار را دارد. در مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه جواب ایده‌آل به جوابی گفته می‌شود که همزمان در تمامی اهداف بهینه است. به دلیل تعارضات بین اهداف، جواب ایده‌آل اغلب قابل حصول نبوده و در منطقه موجه قرار نمی‌گیرد. به همین دلیل در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه جواب نهایی باید از میان جواب‌های کارا انتخاب شود. جواب کارا جوابی است که بهبود در یک هدف تنها با تضعیف اهداف دیگر امکان‌پذیر است. به مجموعه جواب‌های کارا در فضای اهداف، مرز کارایی یا جبهه پارتو می‌گویند. برای تعیین جواب برتر از میان مجموعه جواب‌های کارا، یک راهکار استفاده از رویکرد جواب رضایت‌بخش است. جواب رضایت‌بخش جوابی است که مقادیر حداقلی تعیین شده توسط تصمیم‌گیرنده برای اهداف را تامین می‌کند. تکنیک برنامه‌ریزی آرمانی یکی از تکنیک‌هایی است که می‌توان به کمک آن جواب‌های رضایت‌بخش مسأله را یافت.

تاریخچه برنامه‌ریزی آرمانی^۱

در سال ۱۹۶۱ دو محقق به نام‌های آبراهام چارنز^۲ و ویلیام کوپر^۳ روش برنامه‌ریزی آرمانی را توسعه دادند. این تکنیک به دلیل کارآمدی در مسائل واقعی، مورد استقبال گسترده‌ای قرار گرفت و در تحقیقات علمی و مسائل

^۱ Goal Programming

^۲ Abraham Charnes

^۳ William Cooper

عملی همچنان یک روند رو به رشد در استفاده از آن مشاهده می‌شود. برنامه‌ریزی آرمانی مبتنی بر فلسفه جواب رضایت‌بخش است. رویکرد رضایت‌بخش در مقابل فلسفه ایده‌آلیسم مطرح می‌شود. رویکرد رضایت‌بخش یعنی وقتی نمی‌توان در همه اهداف به ایده‌آل (مقدار بهینه) دست یافت، تصمیم‌گیری با واقع‌بینی صورت گیرد، بدین صورت که سطح حداقلی برای هر هدف تعریف و جوابی به عنوان جواب نهایی انتخاب شود که این مقادیر حداقلی را تامین کند. تکنیک برنامه‌ریزی آرمانی مبتنی بر جواب رضایت‌بخش است.

مفهوم آرمان

یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه از r هدف تشکیل شده است که همگی باید بهینه شوند:

$$\text{Optimize } F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_r(X)\}$$

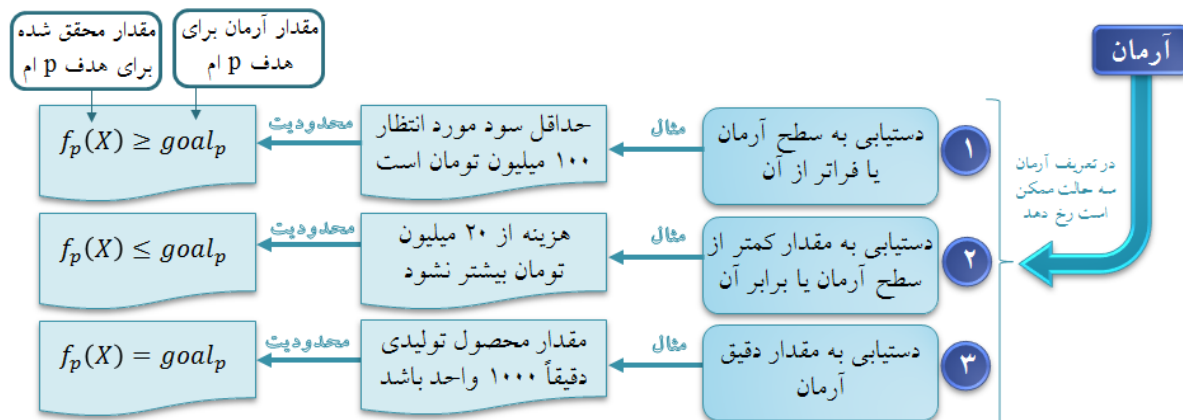
در برنامه‌ریزی آرمانی برای هر هدف یک سطح مطلوب یا مقدار آرمانی تعیین می‌شود، آرمان یعنی مقداری

که تصمیم‌گیرنده تمایل دارد بدان دست یابد. آرمان را می‌توان به سه صورت تعریف کرد:

نوع ۱: خواهان رسیدن به مقدار آرمان یا فراتر از آن هستیم و تحقق کمتر از آن نامطلوب است. اگر مقدار محقق شده برای هدف p ام با $f_p(X)$ و مقدار آرمانی برای این هدف با $goal_p$ نشان داده شود، این خواسته را می‌توان با محدودیتی به شکل $f_p(X) \geq goal_p$ مدل کرد. برای مثال اگر حداقل سود مورد انتظار ۱۰۰ میلیون تومان باشد، مقدار آرمان ۱۰۰ و محدودیت متناظر $f(X) \geq 100$ خواهد بود، یعنی رسیدن به سود ۱۰۰ میلیون یا بیشتر باعث برآورده شدن آرمان می‌شود.

نوع ۲: تمایل داریم به مقداری کمتر یا نهایتاً مساوی سطح آرمان دست یابیم و تحقق بیشتر از آن نامطلوب است. این حالت به صورت $f_p(X) \leq goal_p$ مدل‌سازی می‌شود. به عنوان مثال اگر در پروژه‌های خواهیم بیش از ۲۰ میلیون تومان هزینه نشود، سطح آرمان ۲۰ و از نوع دوم است در نتیجه خواهیم داشت: $f(X) \leq 20$

نوع ۳: در حالت سوم دستیابی به مقدار دقیق آرمان مطلوب است نه کمتر و نه بیشتر. محدودیت متناظر به شکل مساوی $f_p(X) = goal_p$ خواهد بود. مثلاً در یک مسأله تصمیم، مقدار محصول تولیدی باید دقیقاً ۱۰۰۰ واحد باشد. در این صورت سطح آرمان ۱۰۰۰ و بیان ریاضی آن به شکل $f(X) = 1000$ خواهد بود.

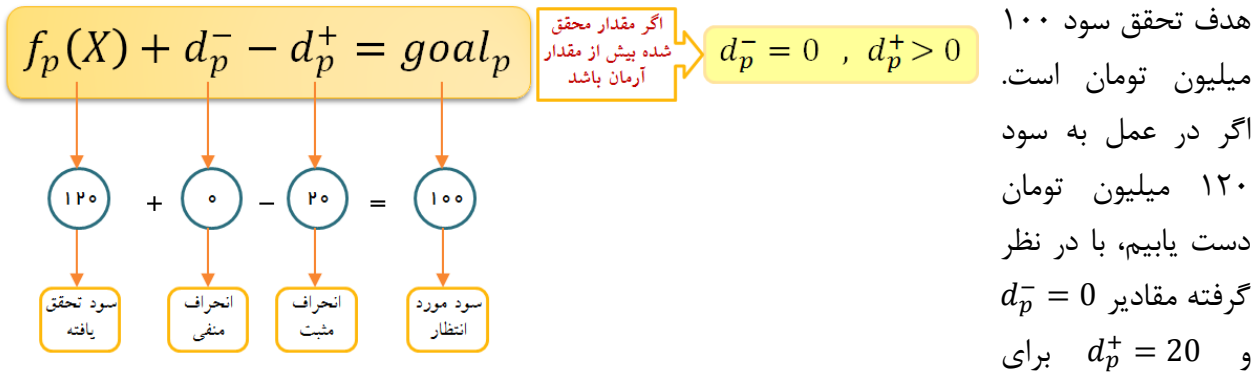


شکل ۱. حالت‌های سه گانه در تعریف آرمان

متغیرهای انحراف از آرمان

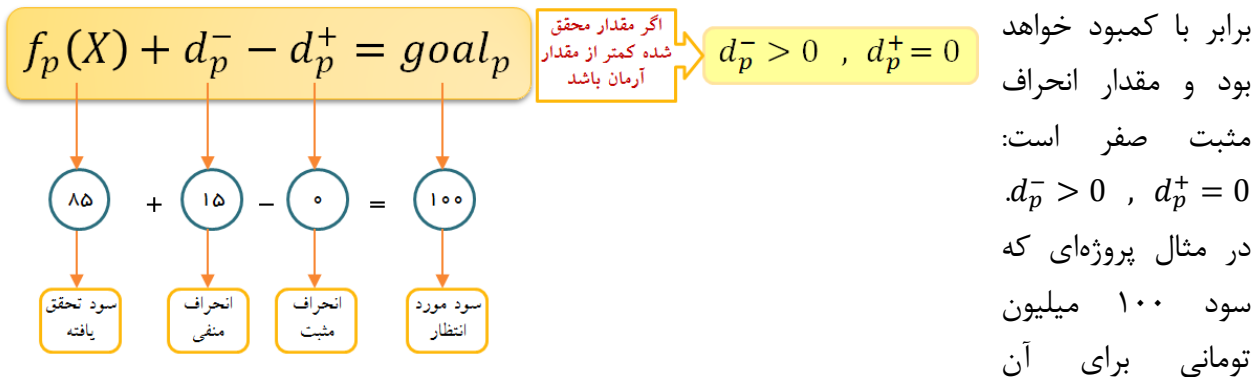
متغیر انحراف یک مفهوم مهم در برنامه‌ریزی آرمانی بوده و نشان دهنده میزان اختلاف بین مقدار تحقق یافته و سطح آرمان تعریف شده برای یک هدف است. به بیان ریاضی داریم: $f_p(X) + d_p^- - d_p^+ = goal_p$ در این رابطه d_p^- انحراف منفی نام دارد و مقدار آن نشان دهنده‌ی میزان کمبود نسبت به آرمان است. d_p^+ نشان‌دهنده‌ی انحراف مثبت است یعنی چقدر نسبت به آرمان فزونی یا مازاد داریم. مشاهده می‌شود که با افزودن این متغیرها، محدودیت‌های مربوط به آرمان‌ها تبدیل به تساوی می‌شوند. انحراف‌های مثبت و منفی باید مقدار بزرگتر مساوی صفر داشته باشند اما همزمان نمی‌توانند هر دو بزرگتر از صفر باشند. بر اساس مقدار متغیرهای انحراف سه وضعیت مختلف ممکن است رخ دهد:

الف - تحقق مقداری بیش از آرمان: اگر مقدار محقق شده بیش از سطح آرمان باشد، مقدار متغیر انحراف مثبت برابر است با میزان فزونی نسبت به آرمان و مقدار انحراف منفی صفر است: $d_p^- = 0$, $d_p^+ > 0$ مثلاً در پروژه‌ای



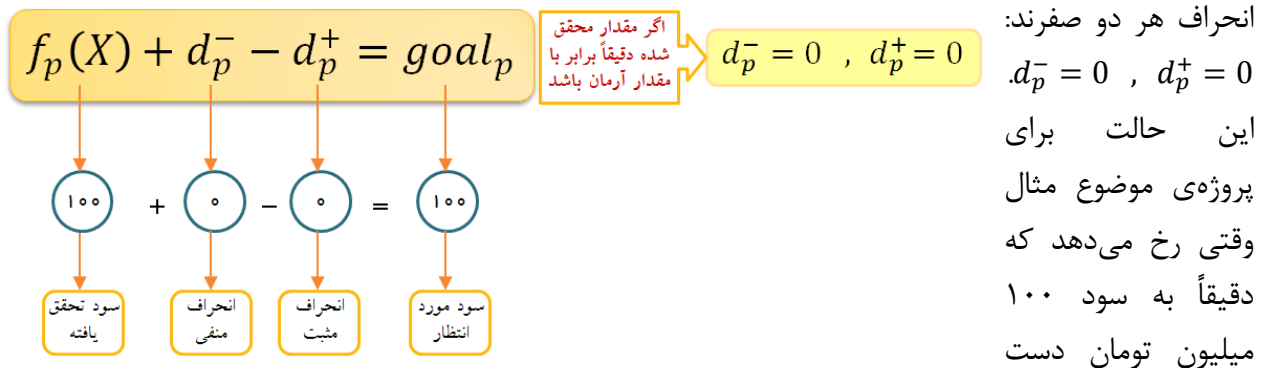
متغیرهای انحراف، تساوی در رابطه‌ی $f_p(X) + d_p^- - d_p^+ = goal_p$ برقرار شده و داریم: $120 + 0 - 20 = 100$ که در آن ۱۲۰ سود تحقق یافته، ۰ انحراف منفی، ۲۰ انحراف مثبت و ۱۰۰ سود مورد انتظار است.

ب - تحقق مقدار کمتر از آرمان: اگر مقدار تحقق یافته کمتر از آرمان باشد، متغیر انحراف منفی دارای مقداری



هدفگذاری شده بود اگر در واقعیت به سود ۸۵ میلیون تومان برسیم ۱۵ میلیون تومان کمبود داشته و با در نظر گرفتن مقادیر $d_p^- = 15$, $d_p^+ = 0$ برای متغیرهای انحراف تساوی در رابطه‌ی $f_p(X) + d_p^- - d_p^+ = goal_p$ برقرار می‌شود: $85 + 15 - 0 = 100$ که در آن ۸۵ سود تحقق یافته، ۱۵ انحراف منفی، ۰ انحراف مثبت و ۱۰۰ سود مورد انتظار است.

ج - تحقق مقداری برابر آرمان: اگر مقدار آرمان دقیقاً برآورده شود یعنی انحراف مثبت و منفی نداشته و متغیرهای



یابیم که با صفر در نظر گرفتن هر دو متغیر انحراف، در رابطه‌ی $f_p(X) + d_p^- - d_p^+ = goal_p$ تساوی برقرار خواهد بود: $100 + 0 - 0 = 100$. در این رابطه ۱۰۰ در سمت چپ تساوی سود تحقق یافته، ۱۰۰ در سمت راست سود مورد انتظار بوده و مقادیر ۰ مربوط به متغیرهای انحراف منفی و مثبت است.

بنابراین در مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی آرمانی، محدودیت‌های مربوط به تحقق آرمان‌ها به کمک متغیرهای انحراف به تساوی تبدیل می‌شوند. متغیرهای انحراف غیرمنفی فرض می‌شوند و هر دو همزمان نمی‌توانند مقدار بزرگتر از صفر داشته باشند. در مدل برنامه‌ریزی آرمانی متغیرهای انحراف نامطلوب در تابع هدف قرار داده شده و کمینه می‌گردد. چگونگی مدل‌سازی مسائل با رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی در ادامه با یک مثال تشریح می‌شود.

مثال: تولید کننده‌ای می‌خواهد در خصوص مقدار تولید از محصول ۱ و محصول ۲ تصمیم‌گیری نماید. سود هر واحد از محصول ۱، ۴۰ و سود هر واحد از محصول ۲، ۳۰ تومان است. تولید کننده تمایل دارد که به سود ۱۸۰۰ تومان در هفته برسد. بنابراین آرمان اول از نوع ۱ است یعنی: $f_1 = 40x_1 + 30x_2 \geq 1800$. با اضافه کردن متغیرهای انحراف داریم: $40x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1800$ که در این رابطه d_1^- نامطلوب است و ترجیح می‌دهیم مقدار آن صفر شود تا سود از ۱۸۰۰ کمتر نباشد (اگر مقدار d_1^- مثبت باشد یعنی به سودی کمتر از ۱۸۰۰ دست یافته‌ایم).

آرمان دوم مربوط به ساعات کار کارگران است. برای تولید هر واحد از محصول ۱، یک کارگر باید ۲ ساعت کار کند و برای تولید هر واحد از محصول ۲، یک کارگر باید ۳ ساعت کار کند. ترجیح تولید کننده این است که کل ساعات در هفته دقیقاً ۱۲۰ ساعت باشد. پس آرمان دوم از نوع ۳ است. یعنی: $f_2 = 2x_1 + 3x_2 = 120$ با اضافه کردن متغیرهای انحراف داریم: $2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 120$ که در این رابطه d_2^+ و d_2^- هر دو نامطلوب است. در این حالت تمایل داریم که مقدار ۱۲۰ نه کمتر و نه بیشتر شود. پس لازمه تحقق این آرمان صفر شدن انحراف‌های مثبت و منفی است. (دلیل تمایل تولید کننده به برنامه‌ریزی برای تحقق ساعات کار دقیقاً ۱۲۰ ساعت در هفته این است که اگر زمان مورد نیاز بیشتر شود نیاز به اضافه کار است که بار مالی دارد و اگر کمتر شود بعضی از کارگران بیکار می‌شوند که این موضوع نیز تبعاتی دارد).

آرمان سوم مرتبط با مقدار تولید محصول ۱ است. تولیدکننده تمایل دارد مقدار تولید از محصول ۱ بیش از ۱۸ واحد نباشد، چون فروش آن دشوار است. در اینجا آرمان از نوع ۲ است یعنی $f_3 = x_1 \leq 18$ با افزودن متغیر انحراف داریم: $x_1 + d_3^- - d_3^+ = 18$ که در این رابطه d_3^+ نشان‌دهنده تولید مازاد بر ۱۸ و نامطلوب است.

در نتیجه این مسأله سه آرمان دارد و برای هر کدام با استفاده از متغیرهای انحراف یک رابطه به صورت تساوی و به شکل روبرو تشکیل می‌شود. در مدل برنامه‌ریزی آرمانی به محدودیت‌های تشکیل شده برای آرمان‌ها، **محدودیت‌های نرم** گفته می‌شود. دلیل این نامگذاری آن است که عدم تحقق آن‌ها منجر به

$$\begin{aligned} 40x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ &= 1800 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 120 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ &= 18 \end{aligned}$$

غیرموجه شدن جواب نمی‌شود اما مطلوبیت جواب را برای تصمیم‌گیرنده کاهش می‌دهد. این مسأله همانند مسائل بهینه‌سازی مشابه، دارای محدودیت‌هایی مرتبط با الزامات فنی و کمیابی منابع است که حتماً باید برآورده شوند. محدودیت اول در مورد مواد اولیه است. برای محصول ۱ به ۲ کیلوگرم و برای محصول ۲ به ۱ کیلوگرم ماده اولیه نیاز است. برنامه‌ریزی باید بگونه‌ای باشد که حداقل ۵۰ کیلوگرم از این ماده اولیه در هفته مصرف شود. چون خرید در حجم کمتر از ۵۰ کیلوگرم امکان‌پذیر نیست. بنابراین محدودیت اول به صورت $2x_1 + x_2 \geq 50$ خواهد بود. محدودیت دوم در ارتباط با دستگاه است. برای تولید هر واحد محصول ۱ و محصول ۲ هر کدام یک ساعت دستگاه باید کار کند. کل ساعاتی که دستگاه را در هفته در اختیار داریم ۷۵ ساعت است. پس

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 50 \\ x_1 + x_2 &\leq 75 \end{aligned}$$

محدودیت دوم به شکل $x_1 + x_2 \leq 75$ می‌باشد. به این محدودیت‌ها، **محدودیت‌های سخت** گفته می‌شود زیرا عدم ارضای آن‌ها منجر به جواب‌های غیرموجه می‌شود.

مدل عمومی برنامه‌ریزی آرمانی

$$\text{Min } a = h(d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, \dots, d_r^+, d_r^-)$$

Subject to:

$$\begin{aligned} f_p(X) + d_p^- - d_p^+ &= \text{goal}_p \quad p = 1, 2, \dots, r \\ g_i(X) &\leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ d_p^+ &\geq 0, d_p^- \geq 0 \quad p = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

شکل عمومی یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی به صورت روبرو است. در یک مدل برنامه‌ریزی آرمانی، ابتدا برای هر آرمان به روش تشریح شده در قسمت قبل، با استفاده از متغیرهای انحراف یک رابطه

$$\text{Min } a = h(d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+)$$

Subject to:

$$\begin{aligned} 40x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ &= 1800 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 120 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ &= 18 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 50 \\ x_1 + x_2 &\leq 75 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \\ d_1^+ &\geq 0, d_2^+ \geq 0, d_3^+ \geq 0 \\ d_1^- &\geq 0, d_2^- \geq 0, d_3^- \geq 0 \end{aligned}$$

ریاضی به صورت تساوی نوشته می‌شود که محدودیت نرم نام دارد. در هر محدودیت نرم برخی متغیرهای انحراف نامطلوب بوده و بهترین مقدار برای آن‌ها صفر است. برای مدل برنامه‌ریزی آرمانی تابع هدف بر حسب متغیرهای انحراف نامطلوب نوشته می‌شود و باید کمینه شود. با افزودن محدودیت‌های سخت و محدودیت‌های مربوط به غیرمنفی بودن متغیرهای تصمیم و متغیرهای انحراف، مدل کامل می‌شود. بر این اساس مدل برنامه‌ریزی آرمانی برای مثال به صورت روبروست. در این مدل ملاحظه می‌شود که تابع هدف باید تابعی

باشد از متغیرهای انحراف نامطلوب یعنی $d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+$. دو رویکرد اصلی برای تشکیل تابع هدف در مسائل برنامه‌ریزی آرمانی و تعیین جواب که در ادامه تشریح خواهند شد، عبارتست از روش تقدمی و روش وزنی.

برنامه‌ریزی آرمانی تقدیمی^۴

بر اساس منطق رویکرد تقدیمی در برنامه‌ریزی آرمانی، متغیرهای انحراف از نظر میزان اهمیت اولویت‌بندی شده و در سطوح ۱، ۲، ... تا L قرار می‌گیرند. ابتدا متغیرهای انحراف اولویت ۱ که دارای اهمیت بسیار بیشتر نسبت به سایر متغیرهای انحراف هستند، کمینه می‌شوند. سپس متغیرهای انحراف اولویت ۲ کمینه می‌شوند با این قید که مقادیر بهینه بدست آمده برای متغیرهای انحراف اولویت بالاتر تغییر نکند. این بهینه‌سازی‌های متوالی تا آخرین سطح ادامه می‌یابد. در مسأله بهینه‌سازی تشکیل شده برای هر مرحله، منطقه قابل قبول نسبت به مرحله قبل کوچکتر می‌شود. بنابراین اگر در یک مرحله منطقه قابل قبول تبدیل به یک نقطه شود، یعنی تنها یک جواب داشته باشیم، فرایند حل پایان می‌یابد. شکل عمومی تابع هدف در برنامه‌ریزی آرمانی تقدیمی به صورت $h_i(d^+, d^-)$ متغیرهای انحراف قرار گرفته در سطح i است.

مثال: در مثال تولید کننده، فرض کنید که آرمان‌ها از نظر تصمیم‌گیرنده بدین صورت اولویت‌بندی شده‌اند:

- بالاترین اولویت تحقق سود ۱۸۰۰ است. بنابراین در بالاترین اولویت متغیر انحراف نامطلوب مربوط به آرمان سود $40x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1800$ یعنی d_1^- باید کمینه گردد: $d_1^- = h_1$
- تحقق حجم کار ۱۲۰ ساعت در اولویت دوم است. در محدودیت این آرمان $2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 120$

$$Lex Min \ a = [d_1^-, (d_2^- + d_2^+), d_3^+]$$

Subject to:

$$40x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1800$$

$$2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 120$$

$$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 18$$

$$2x_1 + x_2 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 \leq 75$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$d_1^+ \geq 0, d_2^+ \geq 0, d_3^+ \geq 0$$

$$d_1^- \geq 0, d_2^- \geq 0, d_3^- \geq 0$$

متغیرهای انحراف نامطلوب d_2^- و d_2^+ هستند که در اولویت دوم

بوده و مجموع آن‌ها باید کمینه شود: $h_2 = (d_2^- + d_2^+)$

- عدم فرونی مقدار تولید محصول ۱ از ۱۸ واحد با محدودیتی به

شکل $18 = x_1 + d_3^- - d_3^+$ در اولویت آخر قرار گرفته است.

متغیر انحراف نامطلوب برای این آرمان، d_3^+ ، در اولویت سوم

کمینه‌سازی است: $h_3 = d_3^+$

شکل نهایی تابع هدف بر اساس اولویت‌های فوق به صورت

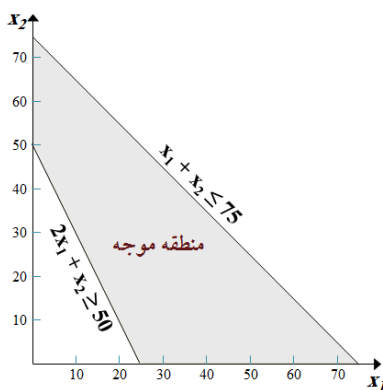
$$Lex Min \ a = [d_1^-, (d_2^- + d_2^+), d_3^+]$$

محدودیت‌های نرم و سخت مدل کامل به صورت روبرو است:

به منظور درک بهتر مراحل حل، تعیین جواب این مدل با توجه به این که دارای دو متغیر تصمیم است ابتدا به روش ترسیمی انجام شده و سپس چگونگی حل آن با استفاده از نرم‌افزار لینگو تشریح می‌شود.

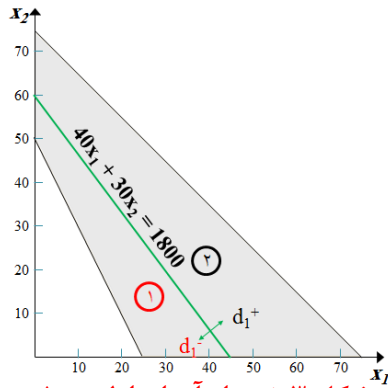
حل مدل برنامه‌ریزی تقدیمی به روش ترسیمی

گام ۱، تعیین منطقه موجه بر اساس محدودیت‌های سخت: ابتدا باید با توجه به محدودیت‌های سخت و به روشی که در مبحث ۸ گفته شد، منطقه موجه مسأله را تعیین کرد که نتیجه را در شکل ۲ ملاحظه می‌کنید.



شکل ۲. منطقه موجه بر اساس محدودیت‌های سخت

^۴ Lexicographic Goal Programming

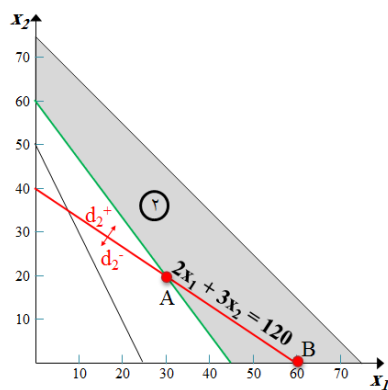


شکل ۳. نمودار آرمان اولویت ۱

گام ۲، رسم نمودار آرمان اولویت اول و تعیین ناحیه‌ای که مقدار انحراف مربوطه کمینه می‌شود: در دومین گام محدودیت مربوط به متغیر انحراف دارای بالاترین اولویت یعنی سود مورد توجه قرار می‌گیرد. ابتدا نمودار محدودیت این آرمان با حذف متغیرهای انحراف رسم می‌شود. یعنی محدودیت نرم $40x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1800$ تبدیل به $40x_1 + 30x_2 = 1800$ شده و خط مربوطه رسم می‌شود (شکل ۳). این خط منطقه موجه را به دو قسمت تقسیم می‌کند. در ناحیه ۱ سود به دست آمده کمتر از ۱۸۰۰ است یعنی انحراف منفی بزرگتر از صفر ($d_1^- > 0$) و

انحراف مثبت صفر است ($d_1^+ = 0$). فلشی که کنار d_1^- نوشته شده نشان‌دهنده ناحیه‌ای دارای انحراف منفی است و هر چه در جهت این فلش جلوتر برویم مقدار انحراف منفی بیشتر می‌شود. با توجه به این که انحراف منفی برای سود نامطلوب است، حتی‌الامکان نباید وارد این منطقه شد. در ناحیه ۲ انحراف مثبت مقدار بزرگتر از صفر دارد ($d_1^+ > 0$) یعنی سود بیش از ۱۸۰۰ خواهد بود. بدیهی است که انحراف منفی در این منطقه صفر است ($d_1^- = 0$). در نقاط بر روی خط هر دو انحراف صفر است ($d_1^- = d_1^+ = 0$). بنابراین با انتخاب هر نقطه‌ای بر روی خط یا در منطقه ۲ متغیر انحراف دارای بالاترین اولویت یعنی d_1^- دارای بهترین مقدار ممکنه یعنی صفر خواهد بود. در نتیجه برای این که متغیر انحراف دارای اولویت ۱ کمترین مقدار یعنی صفر باشد باید جواب از منطقه ۲ انتخاب شود.

گام ۳، رسم نمودار آرمان اولویت دوم و تعیین ناحیه‌ای که مقدار انحراف مربوطه کمینه می‌شود: آرمان دوم نفر

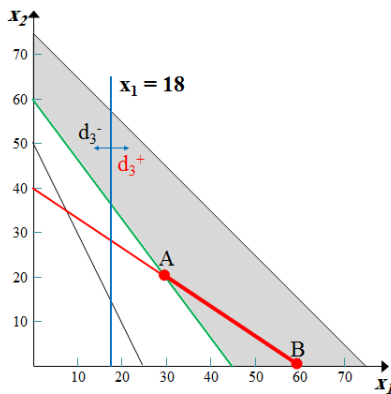


شکل ۴. نمودار آرمان اولویت ۲

ساعت کارگران است $2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 120$. مشابه گام قبل نمودار محدودیت مربوطه پس از حذف متغیرهای انحراف $2x_1 + 3x_2 = 120$ رسم می‌شود (شکل ۴). در این اولویت، انحراف‌های مثبت و منفی هر دو نامطلوب بوده و حرکت در جهت هیچ یک از فلش‌های d_2^+ و d_2^- مجاز نیست چون باعث می‌شود نفر ساعت کاری از ۱۲۰ ساعت کمتر یا بیشتر شود. در نقاط روی نمودار خط مربوط به این آرمان انحراف‌های مثبت و منفی هر دو صفر است، پس برای این که مجموع انحراف‌ها صفر شود باید نقطه‌ای بر روی خط به عنوان جواب در نظر گرفته شود. اشاره شد که در تعیین نقاط بهینه

برای متغیرهای انحراف یک اولویت نباید مقادیر بهینه تعیین شده برای اولویت‌های بالاتر تنزل پیدا کند. با توجه به این که بر اساس نتیجه گام ۲، تنها انتخاب نقاط در منطقه ۲ مجاز است، بنابراین تنها نقاطی از نمودار مربوط به آرمان اولویت دوم باید انتخاب شوند که در این ناحیه قرار دارند. یعنی انتخاب از میان نقاطی که بر روی پاره خط AB در شکل ۴ قرار دارند مجاز خواهد بود.

گام ۴، رسم نمودار آرمان اولویت سوم و تعیین نقطه‌ای که مقدار انحراف مربوطه کمینه می‌شود: این بار نمودار آرمان سوم یعنی سقف ۱۸ واحدی تولید از محصول ۱ ($x_1 + d_3^- - d_3^+ = 18$) بدون در نظر گرفتن متغیرهای



شکل ۵. نمودار آرمان اولویت ۳

انحراف رسم می‌شود: $x_1 = 18$ (شکل ۵). در سمت چپ خط، آرمان کاملاً برآورده می‌شود، چون مقدار تولید کمتر از ۱۸ است ($d_3^+ = 0, d_3^- > 0$). در حالی که در نقاط سمت راست خط متغیر انحراف نامطلوب یعنی d_3^+ مقدار مثبت خواهد داشت. از آن جا که در سمت چپ خط $x_1=18$ هیچ یک از نقاط قابل قبول تعیین شده در مرحله قبل (پاره خط AB) قرار ندارد، باید بهترین نقطه را در سمت راست تعیین کنیم یعنی نقطه‌ای که کمترین انحراف را دارد و در منطقه قابل قبول قرار گرفته است. با حرکت خط به موازات خود به سمت راست اولین نقطه در منطقه قابل قبول که به آن وارد می‌شویم، نقطه A است. این نقطه کمترین مقدار d_3^+ را دارد. با

توجه به این که آخرین اولویت تعیین شده برای انحراف‌ها بود، نقطه A نقطه بهینه بوده و فرایند حل مسأله به پایان می‌رسد. باید توجه داشت که اگر اولویت‌های دیگری نیز برای مسأله تعریف شده بود با توجه به این که نقاط قابل قبول به یک نقطه تقلیل یافته‌اند، نیازی به بررسی اولویت‌های بعدی نبود چون حق انتخابی دیگری غیر از نقطه A باقی نمانده است.

گام ۵، تعیین مختصات نقطه بهینه و مقدار انحراف از آرمان‌ها: نقطه A که با توجه به اولویت تعریف شده برای متغیرهای انحراف نامطلوب به عنوان نقطه بهینه تعیین شد، محل برخورد آرمان‌های اول و دوم است. رابطه ریاضی مربوط به این دو آرمان، بدون در نظر گرفتن متغیرهای انحراف در یک دستگاه قرار گرفته و جواب دستگاه نشان دهنده مختصات نقطه بهینه یعنی مقادیر متغیرهای تصمیم است.

$$\begin{cases} 40x_1 + 30x_2 = 1800 \\ 2x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \Rightarrow A(30, 20)$$

بر اساس جواب بدست آمده باید ۳۰ واحد از محصول ۱ و ۲۰ واحد از محصول دوم تولید شود. اگر نقطه $(x_1=30, x_2=20)$ را در روابط مربوط به آرمان‌ها قرار دهیم، مقدار متغیرهای انحراف بدست می‌آید:

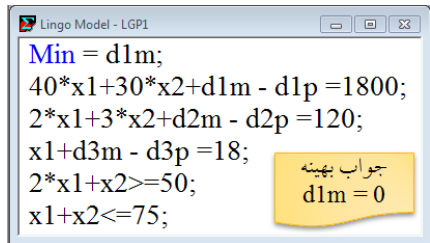
			d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
			+	-	+	-	+	-
			0	0	0	0	0	12

مقادیر انحراف در نقطه A (30, 20)	→	$40x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1800 \Rightarrow 40 \times 30 + 30 \times 20 + d_1^- - d_1^+ = 1800 \Rightarrow 1800 + 0 - 0 = 1800$
		$2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 120 \Rightarrow 2 \times 30 + 3 \times 20 + d_2^- - d_2^+ = 120 \Rightarrow 120 + 0 - 0 = 120$
		$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 18 \Rightarrow 30 + d_3^- - d_3^+ = 18 \Rightarrow 0 - 12 = 18$

ملاحظه می‌شود که مقدار سود و ساعات کار ۱۸۰۰ و ۱۲۰ بدست آمده یعنی انحراف‌های اولویت اول و دوم صفر شده اند اما مقدار انحراف نامطلوب سطح سوم d_3^+ برابر ۱۲ شده است. گرچه تصمیم‌گیرنده تمایل دارد مقدار تولید از محصول ۱ از ۱۸ بیشتر نشود اما چون این آرمان در اولویت سوم قرار گرفته، تحقق آرمان‌های دارای اولویت بالاتر، صفر شدن این انحراف را غیرممکن ساخته و کمترین مقداری که می‌توان برای این انحراف نامطلوب در نظر گرفت برابر با ۱۲ است یعنی به اندازه ۱۲ واحد انحراف تولید مازاد بر مقدار آرمان ۱۸ از محصول ۱ خواهیم داشت.

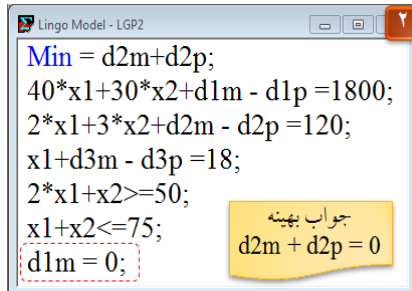
حل مدل برنامه‌ریزی آرمانی تقدیمی با Lingo

استفاده از روش ترسیمی در حل مسائل برنامه‌ریزی آرمانی با رویکرد تقدیمی تنها برای مسائل کوچک و به منظور درک منطق و مراحل این روش مفید است. برای مسائل بزرگتر باید از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی کمک گرفت. برای تعیین جواب مسائل برنامه‌ریزی آرمانی تقدیمی، با استفاده از لینگو باید به تعداد اولویت‌های تعریف شده برای آرمان‌ها، بهینه‌سازی به صورت متوالی انجام شود. چگونگی انجام کار بر روی مثال تشریح می‌شود.



شکل ۶. کمینه‌سازی آرمان اولویت ۱

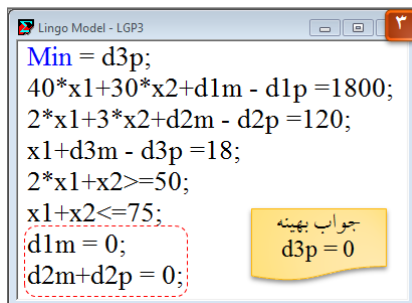
گام ۱، کمینه کردن انحراف از آرمان‌های اولویت ۱: در اولین گام مدل شامل محدودیت‌های سخت و نرم در لینگو وارد می‌شود (شکل ۶) و تابع هدف در این مدل عبارتست از کمینه‌سازی متغیر انحراف اولویت ۱ یعنی d_1^- . چون در نامگذاری متغیرها در لینگو نمی‌توان از علائم مثبت و منفی استفاده کرد، منفی با m (اختصار minus) و مثبت با p (اختصار plus) نشان داده شده است. به عنوان مثال متغیر d_1^- به صورت $d1m$ و d_1^+ به صورت $d1p$ نامگذاری شده‌اند. بنابراین تابع هدف به صورت $\text{Min} = d1m$ نوشته می‌شود. با نوشتن سه محدودیت نرم و دو محدودیت سخت، مدل کامل می‌شود. در جواب بهینه مقدار تابع هدف $d1m = 0$ بدست می‌آید. یعنی



شکل ۷. کمینه‌سازی آرمان اولویت ۲

گام ۲، کمینه کردن انحراف از آرمان‌های اولویت ۲ با حفظ سطوح آرمان اولویت ۱: در قدم بعدی آرمان‌های قرار گرفته در اولویت دوم d_2^- و d_2^+ کمینه می‌شوند، یعنی تابع هدف عبارتست از $\text{Min} = d2m + d2p$. برای این که مقادیر بهینه بدست آمده برای انحراف‌های اولویت‌های بالاتر حفظ شود، محدودیت $d1m = 0$ به مدل اضافه می‌شود. یعنی در هر مرحله به تعداد اولویت‌های قبلی محدودیت‌هایی به شکل $h_i = h_i^*$ به مدل اضافه خواهد شد که h_i متغیرهای انحراف سطح i و h_i^* مقدار بهینه بدست آمده برای آن‌ها در گام i است. طبق جواب

بهینه مدل وارد شده در لینگو (شکل ۷) متغیرهای انحراف اولویت دوم نیز صفر شده‌اند.



شکل ۸. کمینه‌سازی آرمان اولویت ۳

گام ۳، کمینه کردن انحراف از آرمان‌های اولویت ۳ با حفظ سطوح آرمان اولویت‌های ۱ و ۲: در سومین گام، متغیر انحراف نامطلوب اولویت سوم d_3^+ در تابع هدف قرار گرفته و کمینه می‌شود: $\text{Min} = d3p$. در کنار محدودیت‌های نرم و سخت و محدودیت $d1m = 0$ مربوط به حفظ سطح بهینه آرمان اولویت اول، محدودیت $d2m + d2p = 0$ برای عدم تخطی از مقدار بهینه‌ی آرمان‌های سطح دوم نیز به مدل اضافه می‌شود (شکل ۸). با حل مدل داریم $d3p = 12$ و نقطه بهینه $(x_1 = 30, x_2 = 20)$ بدست

می‌آید. نتیجه نهایی همانند روش ترسیمی است: انحراف‌های اولویت ۱ و ۲ کامل برآورده شده ولی برای آرمان اولویت سوم ۱۲ واحد انحراف نامطلوب داریم.

برنامه‌ریزی آرمانی وزنی^۵

برنامه‌ریزی آرمانی وزنی وقتی استفاده می‌شود که مقایسه مستقیم آرمان‌ها و تبادل بین آن‌ها مدنظر باشد.

همانند منطق روش وزن دهی به توابع هدف از مجموعه روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه، در روش برنامه‌ریزی

آرمانی وزنی، تمامی انحراف‌های نامطلوب با در نظر گرفتن وزنی که نشان دهنده اهمیت هر کدام است با هم جمع شده و در تابع هدف قرار می‌گیرد: در تابع هدف تنها متغیرهای انحراف نامطلوب قرار می‌گیرند. وزن‌های تخصیص یافته به این متغیرهای انحراف باید مثبت بوده و معمولاً مجموع آن‌ها ۱ در نظر گرفته می‌شود. ثابت k_p در رابطه فوق فاکتور بی‌مقیاس‌سازی

است و زمانی بکار می‌رود که اهداف دارای مقیاس‌های متفاوت باشند. مقدار k_p معمولاً برابر سطح آرمان هدف p ام

$$\text{Min } a = \sum_{p=1}^r \left(\frac{w_p^+ \cdot d_p^+}{k_p} + \frac{w_p^- \cdot d_p^-}{k_p} \right)$$

Subject to:

$$\begin{aligned} f_p(X) + d_p^- - d_p^+ &= \text{goal}_p \quad p = 1, 2, \dots, r \\ g_i(X) &\leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ d_p^+ &\geq 0, d_p^- &\geq 0 \quad p = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

در نظر گرفت و با تقسیم هر متغیر انحراف بر مقدار

هدف برای مربوطه، مقدار کسر بی‌مقیاس می‌شود.

شکل عمومی مدل برنامه‌ریزی آرمانی وزنی با تابع

هدف فوق و افزودن محدودیت‌های نرم و سخت به

مدل به شکل روبرو می‌باشد:

$$\text{Min } a = \frac{0.4 \times d_1^-}{1800} + \frac{0.3 \times (d_2^- + d_2^+)}{120} + \frac{0.3 \times d_3^+}{18}$$

Subject to:

$$\begin{aligned} 40x_1 + 30x_2 + d_1^- - d_1^+ &= 1800 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_2^- - d_2^+ &= 120 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ &= 18 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 50 \\ x_1 + x_2 &\leq 75 \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 \\ d_1^+ &\geq 0, d_2^+ &\geq 0, d_3^+ &\geq 0 \\ d_1^- &\geq 0, d_2^- &\geq 0, d_3^- &\geq 0 \end{aligned}$$

مثال: برای حل مثال تولیدکننده به روش

برنامه‌ریزی آرمانی فرض کنید برای انحراف‌های

نامطلوب از آرمان‌های سود، ساعت کار و مقدار

تولید از محصول ۱ به ترتیب ضرائب ۰,۳ و ۰,۴

و ۰,۳ در نظر گرفته شده است. متغیرهای

انحراف در اوزان ضرب و با هم جمع شده‌اند، با

توجه تفاوت واحدهای اندازه‌گیری اهداف، به

منظور بی‌مقیاس‌سازی، هر متغیر انحراف بر

سطح آرمان مربوطه تقسیم شده است.

برای بدست آوردن جواب مدل از لینگو

کمک می‌گیریم. چگونگی درج مدل در لینگو

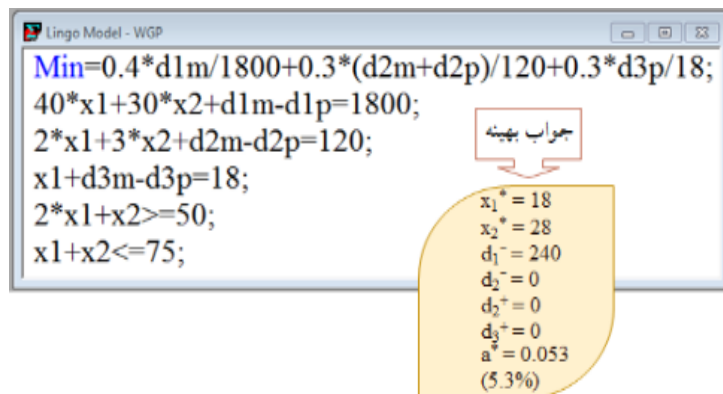
و جواب بهینه حاصله در شکل ۹ آمده است.

در نقطه بهینه مقدار تولید محصول ۱ و ۲ به

ترتیب ۱۸ و ۲۸ واحد است. در شکل ۱۰

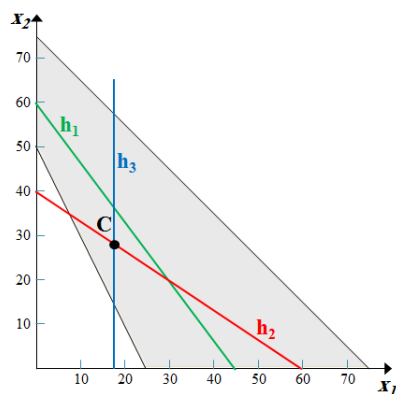
ملاحظه می‌شود که نقطه بهینه محل برخورد

آرمان‌های ۲ و ۳ است. در این نقطه انحراف



شکل ۹. پیاده‌سازی مدل برنامه‌ریزی آرمانی وزنی در لینگو

⁵ Weighted Goal Programming



شکل ۱۰. جواب بهینه در روش برنامه‌ریزی آرمانی وزنی

نامطلوب آرمان‌های ۲ و ۳ صفر شده است، در حالی که انحراف مربوط به آرمان اول یعنی سود ۲۴۰ بدست آمده است. یعنی در جواب بدست آمده به روش برنامه‌ریزی آرمانی وزنی، از مقدار هدفگذاری شده برای سود یعنی ۱۸۰۰ به میزان ۲۴۰ تومان باید صرف نظر شود اما در عوض مقدار دو انحراف دیگر صفر شده است. مقدار تابع هدف بر اساس خروجی لینگو برابر با $a=0.053$ یا 5.03% به دست آمده است. مفهوم این عدد این است که به صورت تجمعی و با در نظر گرفتن وزن‌ها، از کل آرمان‌های تعریف شده بطور میانگین به اندازه حدود 5.03% درصد آن‌ها برآورده نشده است. به طور کلی مقدار تابع هدف در روش برنامه‌ریزی آرمانی وزنی بیانگر میانگین انحراف از سطوح آرمان است. اگر مقدار تابع هدف صفر شود یعنی همه‌ی آرمان‌ها به طور کامل برآورده شده‌اند.

جمع بندی

موضوع این جلسه آشنایی با تکنیک برنامه‌ریزی آرمانی بود که مبتنی است بر فلسفه رویکرد رضایت‌بخش در مقابل رویکرد رسیدن به جواب‌های ایده‌آل. پیش‌نیازهای استفاده از این روش عبارت است از:

- تعیین محدودیت‌های سخت و نرم،

- تعیین مقادیر سطح آرمان برای محدودیت‌های نرم،
- اولویت‌بندی سطوح آرمان (در روش تقدمی)،
- تعیین وزن متغیرهای انحراف (در روش وزنی).

چالشی که در روش برنامه‌ریزی آرمانی وجود دارد تعیین مقدار اولیه برای پارامترها است. یک پیشنهاد این است که با تخمین‌ها و مقادیر اولیه شروع کرده و بر اساس جواب‌های بدست آمده و با تحلیل حساسیت مقادیر مناسب پارامترها تعیین شود.

رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی تقدمی کارآمدی بسیاری در مسائل واقعی دارد و به این دلیل بیش از سایر رویکردهای برنامه‌ریزی آرمانی استفاده می‌شود. در خصوص این روش نکات زیر قابل ذکر است:

- مزیت این روش عدم نیاز به مقایسه مستقیم انحراف در اهداف است و بهینه‌سازی مقادیر انحراف به صورت مجزا انجام می‌شود.
- آرمان‌ها نباید خیلی دست بالا در نظر گرفته شوند. در صورت عدم توجه به این موضوع جواب‌های به دست آمده ممکن است از کیفیت و مطلوبیت چندانی از منظر تصمیم‌گیرنده برخوردار نباشند. برای تعیین مقدار آرمان برای هر هدف می‌توان ابتدا آن را به عنوان تابع هدف در نظر گرفت و به همراه محدودیت‌های سخت جواب بهینه مسأله را بدست آورد. مقدار بهینه برای این هدف، در حالت بیشینه‌سازی نشان دهنده بالاترین سطح و در حالت کمینه‌سازی نشان‌دهنده پایین‌ترین سطحی است که می‌توان برای آرمان در نظر گرفت.

منطقی نیست مقدار آرمان منظور شده برای هر هدف در حالت بیشینه‌سازی (کمینه‌سازی) از مقدار بهینه بیشتر (کمتر) باشد.

- تعداد سطوح اولویت در روش برنامه‌ریزی آرمانی تقدیمی نباید خیلی زیاد باشد. توصیه شده که حداکثر ۵ سطح برای اولویت‌بندی آرمان‌ها در نظر گرفته شود.

علیرغم این که از نظر میزان استفاده، رویکرد برنامه‌ریزی آرمانی وزنی بعد از روش تقدیمی در رتبه دوم است، اما استفاده از آن یک روند افزایشی دارد. قبل از سال ۱۹۹۰ در حدود ۲۵ درصد از تحقیقاتی که از روش برنامه‌ریزی آرمانی استفاده می‌کردند، روش وزنی استفاده می‌شد، اما در سال‌های اخیر این نسبت به ۴۰٪ افزایش یافته است. مهمترین دلیل انعطاف بیشتر آن نسبت به روش تقدیمی است. امکان تغییر وزن آرمان‌ها موجب انعطاف این روش شده است. در نتیجه آن مقادیری که به عنوان انحراف در اهداف مختلف به دست می‌آید، می‌تواند توازن بیشتری داشته باشد. در این روش لازم است وزن انحراف‌های نامطلوب تعیین شود. برای تعیین وزن انحرافات نامطلوب می‌توان از روش AHP یا سایر روش‌ها وزن‌دهی استفاده نمود.

رویکرد سومی به نام برنامه‌ریزی آرمانی چبی‌شف نیز برای مدل‌سازی و حل مسائل برنامه‌ریزی آرمانی وجود

Min $a = \lambda$

Subject to:

$$\frac{w_p^+ \cdot d_p^+}{k_p} + \frac{w_p^- \cdot d_p^-}{k_p} \leq \lambda \quad p = 1, 2, \dots, r$$

$$f_p(X) + d_p^- - d_p^+ = \text{goal}_p \quad p = 1, 2, \dots, r$$

$$g_i(X) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$d_p^+ \geq 0, d_p^- \geq 0 \quad p = 1, 2, \dots, r$$

دارد که مشابه روش برنامه‌ریزی سازشی با متریک L_∞ است. در این رویکرد متغیر انحراف نامطلوبی که بزرگترین مقدار را دارد، کمینه می‌شود. مدل ریاضی این رویکرد به شکل مقابل است. این روش در سرفصل درس نبوده و دانشجویان علاقه‌مند می‌توانند برای آشنایی بیشتر با آن به این منبع مراجعه کنند:

Jones, D., & Tamiz, M. (2010). *Practical goal programming* (Pp. 11-51). New York: Springer.