مجموعه پاسخ‌های چهارگزینه‌ای مشتق و کاربرد آن

الف - پاسخ‌های آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته علوم اقتصادی

۱. ❹

$$y=\frac{xe^x}{x-1} \Rightarrow y'=\frac{(e^x+xe^x)(x-1)-xe^x}{(x-1)^2}$$

$$y'\Big|_{x=0}=\frac{(e^0+0)(0-1)-0}{(0-1)^2}=\frac{(1)(-1)}{1}=-1$$

۲. ❶

$$y=\cos x$$

$$y^{(1)}=-\sin x \Rightarrow y^{(2)}=-\cos x \Rightarrow y^{(3)}=\sin x \Rightarrow y^{(4)}=\cos x \Rightarrow y^{(5)}=-\sin x$$

۳. ❷

$$z=u.v.w \Rightarrow dz=vwdu+uwdv+uvdw$$

۴. ❶

$$y=xe^{-x}$$

$$y'=e^{-x}-xe^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}(1-x)=0 \Rightarrow x=1$$ نقطه بحرانی

$$y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=-2e^{-x}+xe^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}(-2+x)=0 \Rightarrow x=2$$

$$y''\Big|_{x=1}=e^{-1}(-2+1)=-e^{-1}=-\frac{1}{e}<0$$ بااستفاده‌ازآزمون‌مشتق‌دوم $x=1$ طول نقطه ماکزیمم است

۵. ❶

$$y=xe^{-x}$$

$$y'=e^{-x}-xe^{-x}$$

$$y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=-2e^{-x}+xe^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}(-2+x)=0 \Rightarrow x=2$$

۶. ❷

$$y=xe^x \Rightarrow y'=e^x+xe^x$$

شیب خط مماس $m=y'\Big|_{x=0}=e^0+0e^0=1$

شیب خط قائم $=-\frac{1}{f'(x_0)}=-\frac{1}{1}=-1$

۷. ❶ از طرفین رابطه، مشتق ضمنی می‌گیریم:

$$y^2+x^2=4$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

۸. ❷

$$y = x^{e^x}$$

$$Lny = Lnx^{e^x} \Rightarrow Lny = e^x\, Lnx \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y} = e^x\, Lnx + \frac{۱}{x} e^x$$

$$\Rightarrow y' = x^{e^x}\left(e^x\, Lnx + \frac{e^x}{x}\right) \Rightarrow y'\Big|_{x=۱} = ۱\ [eLn۱ + \frac{e^۱}{۱}] = e$$

۹. ❶ از طرفین معادله بطور ضمنی مشتق می‌گیریم:

$$\sin x = e^y \Rightarrow e^y - \sin x = ۰$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-\cos x}{e^y} \xrightarrow{\sin x = e^y} \frac{\cos x}{\sin x} = \cot g x$$

۱۰. ❸

$$f(x) = \sqrt{۱ - e^{-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{-x}}{۲\sqrt{۱-e^{-x}}}$$

$$\text{شیب خط مماس } m = f'(x)\Big|_{x=۰} = \frac{e^۰}{۲\sqrt{۱-e^۰}} = \frac{۱}{۰} = \infty$$

۱۱. ❸

$$y = e^{Arctgx} \Rightarrow dy = \left[\frac{۱}{۱+x^۲} e^{Arctgx}\right]dx \Rightarrow dy\Big|_{\substack{x=۰\\ dx=۰/۱}} = \left(\frac{e^{Arctg۰}}{۱+۰}\right)۰/۱ = ۰/۱$$

۱۲. ❶

$$y = Ln\,(۸x - x^۲)$$

$$۸x - x^۲ > ۰ \Rightarrow x\,(۸ - x) > ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۸$$

$$y' = \frac{۸-۲x}{۸x-x^۲} \Rightarrow y' = ۰ \Rightarrow \frac{۸ - ۲x}{۸x - x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

x		۴	
y′	+	۰	−
		Max	

۱۳. ❸ شیب گذرنده بر نقاط $x = a$ و $x = a + h$ وقتی $h \to ۰$ میل می‌کند بر تابع $f(x)$ مساوی است با مشتق تابع در نقطه $x = a$ یعنی :

$$\lim_{h\to۰} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$y' = ۲x - ۱ \Rightarrow \text{شیب خط } m = y'\Big|_{x=۲} = ۲(۲) - ۱ = ۳$$

۱۴. ❹

$$y = (ax + b)^n$$

$$y^{(۱)} = na\,(ax + b)^{n-۱}$$

$$y^{(۲)} = n(n-۱)\, a^۲\,(ax + b)^{n-۲}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = n\,(n-۱)\,(n-۲) \ldots ۲\times۱\times a^n\,(ax + b)^{n-n} = n!a^n$$

۱۵. ❸

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}$$

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y^2=x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}\Rightarrow y^2=x+y\Rightarrow y^2-y-x=0$$

از رابطه فوق بطور ضمنی مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{-1}{2y-1}=\frac{1}{2y-1}$$

۱۶. ❸

$$f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$$

$$g(x)=x^3\Rightarrow g'(x)=3x^2$$

$$\frac{2^2-1^2}{2^3-1^3}=\frac{2c}{3c^2}\Rightarrow 9c^2=14c\Rightarrow c=\frac{14}{9}$$

۱۷. ❷

$$y=x^3+ax^2+bx+2$$

$$y'=3x^2+2ax+b$$

$$y''=6x+2a=0\Rightarrow y''\Big|_{x=1}=6+2a=0\Rightarrow a=-3$$

چون تابع در نقطه $x=1$ مماس موازی محور xها دارد بنابراین شیب این خط مماس مساوی صفر می‌باشد لذا طول این نقطه مشتق را نیز صفر می‌کند پس :

$$y'=3x^2+2ax+b$$

$$y'\Big|_{\substack{x=1\\a=-3}}=3+2a+b=0\Rightarrow 3-6+b=0\Rightarrow b=3$$

در نتیجه $a+b=-3+3=0$ می‌باشد.

۱۸. ❶

$$y=a^{x^3-2x}$$

$$y'=(3x^2-2)\,a^{x^3-2x}\,\mathrm{Ln}a$$

$$y'\Big|_{x=1}=(3-2)a^{1-2}\,\mathrm{Ln}a=a^{-1}\,\mathrm{Ln}a=\frac{1}{a}\,\mathrm{Ln}a$$

۱۹. ❷

$$\begin{cases}y=b\sin^3t\Rightarrow dy=3b\cos t\sin^2t\,dt\\ x=a\cos^3t\Rightarrow dx=-3a\sin t\cos^2t\,dt\end{cases}$$

طرفین روابط را بر هم تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3b\cos t\sin^2t\,dt}{-3a\sin t\cos^2t\,dt}=-\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}t$$

❷.۲۰

$$f(x) = \sqrt{۱-e^{-x^{۳}}}$$

$$f'(x) = \frac{۳x^{۲}e^{-x^{۳}}}{۲\sqrt{۱-e^{-x^{۳}}}} = \frac{۳}{۲}x^{۲}\,e^{-x^{۳}}(۱-e^{-x^{۳}})^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow f'(۰^{+}) = ۰$$

❶.۲۱

$$f(x) = \frac{x}{x+۳}$$

$$f(۲) = \frac{۲}{۵} \text{ و } f(۱) = \frac{۱}{۴}$$

$$f'(x) = \frac{x+۳-x}{(x+۳)^{۲}} = \frac{۳}{(x+۳)^{۲}} \Rightarrow f'(c) = \frac{۳}{(c+۳)^{۲}}$$

$$f(۲) - f(۱) = f'(c) \Rightarrow \frac{۲}{۵} - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{(c+۳)^{۲}} \Rightarrow \frac{۸-۵}{۲۰} = \frac{۳}{(c+۳)^{۲}} \Rightarrow ۲۰ = (c+۳)^{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲۰} = c+۳ \Rightarrow c = \sqrt{۲۰} - ۳$$

❸.۲۲ هرگاه $x+y$ مقداری ثابت باشد در صورتی $x^{\alpha}\,.\,y^{\beta}$ ماکزیمم است که $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$ باشد، از طرفی می‌دانیم که $\sin^{۲}x + \cos^{۲}x = ۱$

y زمانی ماکزیمم است که:

$$y = \sin^{n}x\,.\,\cos^{m}x = (\sin^{۲}x)^{\frac{n}{۲}}.\,(\cos^{۲}x)^{\frac{m}{۲}}$$

$$\frac{\sin^{۲}x}{\frac{n}{۲}} = \frac{\cos^{۲}x}{\frac{m}{۲}} \Rightarrow \frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۲}x} = tg^{۲}x = \frac{n}{m} \Rightarrow tgx = \sqrt{\frac{n}{m}}$$

❶.۲۳ منحنی نمایش تابع در نقطه عطف از تقعر به تحدب تغییر می‌یابد بنابراین باید $x = ۱$ نقطه عطف منحنی باشد.

$$f(x) = x^{۳} + ۲kx^{۲} + k$$

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۴kx \Rightarrow f''(x) = ۶x + ۴k$$

$$f''(۱) = ۶(۱) + ۴k = ۰ \Rightarrow ۶ + ۴k = ۰ \Rightarrow k = -\frac{۳}{۲}$$

❸.۲۴

$$y = x^{۶} - x^{۴} + ۱$$

$$y' = ۶x^{۵} - ۴x^{۳} = ۰ \Rightarrow ۲x^{۳}(۳x^{۲} - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ و } x = \pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

x		$-\sqrt{\frac{۲}{۳}}$		۰		$\sqrt{\frac{۲}{۳}}$	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
	↘		↗	Max	↘		↗

۲۵. ❷

$$y = \frac{۲x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱}$$

$$y'_x = \frac{۱}{x'_y} \Rightarrow x'_y = \frac{۱}{y'_x} = \frac{۱}{\frac{۴x(x^۲ + ۱) - ۲x(۲x^۲ - ۱)}{(x^۲ + ۱)^۲}} = \frac{۱}{\frac{۴x^۳ + ۴x - ۴x^۳ + ۲x}{(x^۲ + ۱)^۲}}$$

$$x'_y = \frac{(x^۲ + ۱)^۲}{۶x} \Big|_{x=۱} = \frac{(۱^۲ + ۱)^۲}{۶(۱)} = \frac{۲}{۳}$$

۲۶. ❹

$$y = \frac{x + ۲}{x + ۳}$$

$$y^{(۱)} = \frac{x + ۳ - x - ۲}{(x + ۳)^۲} = \frac{۱}{(x + ۳)^۲}$$

$$y^{(۲)} = \frac{-۲(x + ۳)}{(x + ۳)^۴} = \frac{-۲}{(x + ۳)^۳}$$

$$y^{(۳)} = \frac{۳ \times ۲(x + ۳)^۲}{(x + ۳)^۶} = \frac{۱ \times ۲ \times ۳}{(x + ۳)^۴}$$

$$\vdots$$

$$y^{(۱۵)} = \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times ۱۵}{(x + ۳)^{۱۶}} = \frac{۱۵!}{(x + ۳)^{۱۶}}$$

$$y^{(۱۵)} \Big|_{x=-۲} = \frac{۱۵!}{(-۲ + ۳)^{۱۶}} = ۱۵!$$

۲۷. ❶

$$tg^{-۱} \left(\frac{y}{x} \right) = Ln \sqrt{x^۲ + y^۲} \Rightarrow Arctg \frac{y}{x} = Ln \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

از طرفین رابطه دیفرانسیل می‌گیریم:

$$\frac{\frac{۱}{x}}{۱ + \frac{y^۲}{x^۲}} dy + \frac{\frac{-y}{x^۲}}{۱ + \frac{y^۲}{x^۲}} dx = \frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + y^۲}}}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} dx + \frac{\frac{۲y}{۲\sqrt{x^۲ + y^۲}}}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} dy$$

$$\left(\frac{x}{x^۲ + y^۲} - \frac{y}{x^۲ + y^۲} \right) dy = \left(\frac{x}{x^۲ + y^۲} + \frac{y}{x^۲ + y^۲} \right) dx$$

$$\Rightarrow (x - y)dy = (x + y)dx \Rightarrow dy = \frac{x + y}{x - y} dx \Rightarrow dy \Big|_{x=۱} = \frac{۱ + y}{۱ - y} dx$$

۲۸. ❹

$$f(x) = x^{\frac{۱}{۳}} (x + ۴)^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۳} x^{-\frac{۲}{۳}} (x + ۴)^{-\frac{۲}{۳}} - \frac{۲}{۳} (x + ۴)^{-\frac{۵}{۳}} x^{\frac{۱}{۳}}$$

$$f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{[x(x + ۴)]^۲}} - \frac{۲\sqrt[۳]{x}}{۳\sqrt[۳]{(x + ۴)^۵}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt[۳]{(x + ۴)^۳} - ۲\sqrt[۳]{x^۳}}{۳\sqrt[۳]{x^۲ (x + ۴)^۵}} = ۰$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{(x+۴)^۳} - ۲\sqrt[۳]{x^۳} = ۰ \Rightarrow x + ۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

x		۴	
$f'(x)$	+	०	−
		Max	

پس فقط تابع در نقطه $x=۴$ دارای ماکزیمم می‌باشد.

۲۹. ❶

$$y = x^۳ + ۲kx^۲ + k$$

$$y' = ۳x^۲ + ۴kx \Rightarrow y'' = ۶x + ۴k$$

$$y''\Big|_{x=۱} = ۶ + ۴k = ۰ \Rightarrow k = -\frac{۳}{۲}$$

با توجه به مشخصات تابع نقطه $x=۱$ نقطه عطف تابع می‌باشد.

۳۰. ❸

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{۶} + h\right) - \sin\frac{\pi}{۶}}{h} = (\sin x)' = \cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۱. ❶

$$y = \frac{x}{۱-x}$$

$$y^{(۱)} = \frac{۱ - x + x}{(۱-x)^۲} = \frac{۱}{(۱-x)^۲}$$

$$y^{(۲)} = \frac{۲(۱-x)}{(۱-x)^۴} = \frac{۱\times ۲}{(۱-x)^۳}$$

$$y^{(۳)} = \frac{۱\times۲\times۳(۱-x)^۲}{(۱-x)^۶} = \frac{۱\times۲\times۳}{(۱-x)^۴}$$

$$\vdots$$

$$y^{(۹)} = \frac{۱\times۲\times\ldots\times۹}{(۱-x)^{۱۰}} \Rightarrow y^{(۹)}\Big|_{x=۲} = \frac{۹!}{(۱-۲)^{۱۰}} = ۹!$$

۳۲. ❶

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{t} \\ y = t \end{cases} \Rightarrow y = \frac{۱}{x} \Rightarrow y'_x = \frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow y''_x = \frac{۲}{x^۳} = ۲t^۳$$

۳۳. ❶

$$y = \frac{x}{۱+x}$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \Rightarrow \Delta y = \frac{x+\Delta x}{۱+x+\Delta x} - \frac{x}{۱+x} \Rightarrow \Delta y\Big|_{\substack{x=۱\\ \Delta x=۰/۴}} = \frac{۱/۴}{۲/۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow dy = \frac{1 + x - x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow dy\Big|_{\substack{x=1\\ dx=0.4}} = \frac{0.4}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\Delta y - dy = \frac{1}{12} - \frac{1}{10} = \frac{5-6}{60} = -\frac{1}{60}$$

۳۴. ❹ تابعی صعودی است که مشتق آن همواره مثبت باشد همانطور که دیده می‌شود فقط در گزینه ۴ است که مشتق تابع همواره مثبت است.

$$1)\ f'(x) = -1 + \cos x \quad \Rightarrow \quad -2 \le f'(x) \le 0$$

$$2)\ f'(x) = 1 - 2\sin x \quad \Rightarrow \quad -1 \le f'(x) \le 3$$

$$3)\ f'(x) = 1 + 2\cos x \quad \Rightarrow \quad -1 \le f'(x) \le 3$$

$$4)\ f'(x) = 1 - \cos x \quad \Rightarrow \quad 0 \le f'(x) \le 2$$

۳۵. ❹

$$y = x\,\mathrm{Ln}\,ax \Rightarrow y' = \mathrm{Ln}\,ax + \frac{a}{ax}\cdot x$$

$$y' = \mathrm{Ln}\,ax + 1 \Rightarrow y'\Big|_{x=1} = \mathrm{Ln}\,a + 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ln}\,a = -1 \Rightarrow a = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

۳۶. ❸

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \mathrm{Ln}\,t \end{cases} \Rightarrow y = \mathrm{Ln}\sqrt{x}$$

$$y'_x = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \Rightarrow y''_x = \frac{-2}{4x^2} = \frac{-1}{2x^2} = \frac{-1}{2t^4}$$

۳۷. ❸

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow dy = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^2}\,dx \Rightarrow dy = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}} = \frac{0.1}{(1+1)^2} = \frac{0.1}{4} = 0.025$$

۳۸. ❸

$$y = \mathrm{Ln}\,\frac{x}{x+1} \Rightarrow y = \mathrm{Ln}\,x - \mathrm{Ln}(x+1)$$

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x		$-\frac{1}{2}$	
y''	$+$	0	$-$

ضابطه تابع در فاصله $(+\infty$ و $-\frac{1}{2}]$ مقعر می‌باشد و طبق صورت تست در فاصله $[1$ و $0)$ مقعر موکد است.

۳۹. ❷

$$xLny + yLnx + ۲xy - x - y = ۰$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{Lny + \frac{۱}{x}(y) + ۲y - ۱}{\frac{۱}{y}(x) + Lnx + ۲x - ۱}$$

$$y'_x \Big|_{x=y=۱} = -\frac{Ln۱ + \frac{۱}{۱}(۱) + ۲(۱) - ۱}{\frac{۱}{۱}(۱) + Ln۱ + ۲(۱) - ۱} = -\frac{۰+۱+۲-۱}{۱+۰+۲-۱} = -۱$$

۴۰. ❶

$$y = Arctgx$$

$$y' = \frac{۱}{۱ + x^۲} \Rightarrow y'' = \frac{-۲x}{(۱ + x^۲)^۲} \Rightarrow y'' = ۰ \Rightarrow -۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

x		۰	
y''	+	۰	−

چون تابع تغییر علامت داده پس $x=۰$ طول نقطه عطف است.

۴۱. ❷

$$y = e^{۲x}$$

$$y^{(۱)} = ۲e^{۲x}$$

$$y^{(۲)} = ۲^۲ e^{۲x}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = ۲^n e^{۲x} \Rightarrow y^{(n)} \Big|_{x=۰} = ۲^n e^{۲(۰)} = ۲^n e^۰ = ۲^n(۱) = ۲^n$$

۴۲. ❸

$$f(x) = \frac{x}{x-۱}$$

$$f^{(۱)}(x) = \frac{-۱}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f^{(۲)}(x) = \frac{۱\times۲}{(x-۱)^۳} \Rightarrow ..... \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-۱)^n n!}{(x-۱)^{n+۱}}$$

$$f^{(n)}(-۱) = \frac{(-۱)^n \times n!}{(-۱-۱)^{n+۱}} = \frac{(-۱)^n n!}{(-۱)^{n+۱}\ ۲^{n+۱}} = \frac{(-۱)^n n!}{(-۱)^n (-۱)۲^{n+۱}} = \frac{-n!}{۲^{n+۱}}$$

۴۳. ❹

$$f(x) = ۲ - x^۲ \Rightarrow f'(x) = -۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

$$f(۰) = ۲ \ ,\ f(۱) = \frac{۳}{۲} \ ,\ f(۲) = ۳$$

$$\lim_{x\to۱^-}(۲-x^۲) = ۲-۱ = ۱$$

تابع با ضابطه $f(x)$ دارای $Max=۳$ و فاقد Min می‌باشد.

۴۴. ❶

$$f'(x_۱) = ۰ \Rightarrow f'(x_۱)\, f(x_۲) = ۰$$

❹.۴۵

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{y'_x} = -\frac{f'_y}{f'_x} = x'_y$$

$$Ln\frac{x-y}{x+y} = 6 \Rightarrow Ln(x-y) - Ln(x+y) = 6$$

$$x'_y = -\frac{\frac{-1}{x-y} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}} = -\frac{\frac{-x-y-x+y}{(x-y)(x+y)}}{\frac{x+y-x+y}{(x-y)(x+y)}} = -\frac{-2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

❶.۴۶

$$y = e^{x-1}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = e^{2-1} = e \Rightarrow A(2, e)$$

$$y' = e^{x-1}\Big|_{x=2} = e$$ شیب خط مماس

$$y - y_1 = m(x-x_1)$$ معادله خط

$$y - e = e(x-2) \Rightarrow y = xe - 2e + e \Rightarrow y = xe - e = e(x-1)$$ معادله خط مماس

❷.۴۷

$$y = Ln(1 + x^2) + \int_0^1 \sin(e^x)\, dx$$

$y = Ln(1 + x^2) +$ (حاصل انتگرال معین :یک عدد ثابت)

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} + 0 \Rightarrow y'(1) = \frac{2(1)}{1+1^2} = \frac{2}{2} = 1$$

❸.۴۸ با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$(x+1)^y - y^{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+1)^{y-1} - y^{x+1}Lny}{(x+1)^y Ln(x+1) - (x+1)y^x}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\frac{(1)(0+1)^{1-1} - (1)^{0+1}Ln1}{(0+1)^1 Ln(0+1) - (0+1)(1)^0} = -\frac{1-0}{0-1} = 1$$

❷.۴۹ اگر u تابعی مشتق‌پذیر برحسب x باشد در اینصورت

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

$$g(x) = f(x.f(x)) \Rightarrow g'(x) = (x.f(x))'f'(x.f(x))$$

$$\Rightarrow g'(x) = \Big((1)f(x) + xf'(x)\Big)f'(x.f(x))$$

$$\Rightarrow g'(0) = \Big((1)f(0) + (0)f'(0)\Big)f'(0.f(0)) \Rightarrow g'(0) = f(0).f'(0)$$

۵۰. ❹

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$y^{(1)} = \frac{1\times(x+1)-1\times x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y^{(2)} = \frac{0-2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-(1\times 2)}{(x+1)^3}$$

$$y^{(3)} = \frac{0-3(x+1)^2[-(1\times 2)]}{(x+1)^6} = \frac{1\times 2\times 3}{(x+1)^4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(x+1)^{n+1}} \Rightarrow y^{(n)}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^{n-1}n!}{(0+1)^{n+1}} = (-1)^{n-1}n!$$

۵۱. ❶

$$y = x^3 + 2ax^2 + a$$

$$y' = 3x^2 + 4ax \Rightarrow y'' = 6x + 4a$$

$$y''\Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 6(1) + 4(a) = 0 \Rightarrow 4a = -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۵۲. ❹ با توجه به دیفرانسیل تابع $dy = f'(x)dx$ داریم:

$$y = (x^2+1)^x \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} Lny = Ln(x^2+1)^x$$

$$\Rightarrow Lny = xLn(x^2+1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (1)\,Ln(x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1}x$$

$$\Rightarrow y' = y\left[Ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right] \Rightarrow y' = (x^2+1)^x\left[Ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]$$

$$dy = (x^2+1)^x\left[Ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]dx$$

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ dx=\frac{1}{2}}} = (1+1)^1\left[Ln(1+1) + \frac{2(1)^2}{1^2+1}\right]\left(\frac{1}{2}\right) = 2[Ln2 + 1]\left(\frac{1}{2}\right) = Ln2+1$$

۵۳. ❷ می‌دانیم همواره $e^{Lnx} = x$ می‌باشد پس:

راه حل اول -

$$y = e^{Lnx} \xrightarrow{e^{Lnx}=x} y = x \Rightarrow y' = 1$$

راه حل دوم -

$$y = e^{Lnx} \Rightarrow y' = (Lnx)'e^{Lnx} = \frac{1}{x}e^{Lnx} \xrightarrow{e^{Lnx}=x} \frac{1}{x}x = 1$$

❷.۵۴

$$y=\mathrm{Ln}(x+۱) \Rightarrow y^{(۱)} = \frac{۱}{x+۱} \Rightarrow y^{(۲)} = \frac{-۱}{(x+۱)^{۲}} \Rightarrow y^{(۳)} = \frac{-[۲(x+۱)(-۱)]}{(x+۱)^{۴}} = \frac{۲}{(x+۱)^{۳}}$$

$$\dots \quad y^{(n)} = \frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{(x+۱)^{n}} \Rightarrow y^{(n)}\Big|_{x=۰} = \frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{(۰+۱)^{n}} = (-۱)^{n-۱}(n-۱)!$$

❶.۵۵ با توجه به دیفرانسیل تابع $dy = f'(x)dx$ داریم:

$$y = x^{۲} - ۴x + ۲$$

$$dy = (۲x - ۴)dx \xrightarrow[\Delta x = ۰/۱ \text{ و } x = ۱]{dx \approx \Delta x} dy = [۲(۱) - ۴](۰/۱) = -۰/۲$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^{۲} - ۴(x + \Delta x) + ۲ - x^{۲} + ۴x - ۲$$

$$\Delta y = x^{۲} + ۲x\Delta x + \Delta^{۲}x - ۴x - ۴\Delta x + ۲ - x^{۲} + ۴x - ۲$$

$$\Delta y = ۲x\Delta x + \Delta^{۲}x - ۴\Delta x \Rightarrow \Delta y = \Delta x\,(۲x + \Delta x - ۴)$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=۱\\ \Delta x=۰/۱}} = ۰/۱(۲(۱) + ۰/۱ - ۴) \Rightarrow \Delta y = ۰/۱(-۱/۹) = -۰/۱۹$$

$$\Delta y - dy = -۰/۱۹-(-۰/۲) = -۰/۱۹ + ۰/۲۰ = ۰/۰۱$$

❷.۵۶

$$y = \sqrt{x}\,\mathrm{Ln}x$$

$$y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\mathrm{Ln}x + \frac{۱}{x}\sqrt{x} = \frac{x\mathrm{Ln}x + ۲\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}}{۲x\sqrt{x}} = \frac{x\mathrm{Ln}x + ۲x}{۲x\sqrt{x}} = \frac{x(\mathrm{Ln}x + ۲)}{۲x\sqrt{x}} = ۰$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}x + ۲ = ۰ \Rightarrow \mathrm{Ln}x = -۲ \Rightarrow x = e^{-۲}$$ **طول نقطه بحرانی**

با توجه به دامنه تابع:

x	$-\infty$		$e^{-۲}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
		$\searrow$	min	$\nearrow$	

پس طول نقطهٔ بحرانی $e^{-۲}$ و نوع آن می‌نیمم نسبی می‌باشد.

❶.۵۷ در توابعی‌که‌به صورت $f(x) = (x - a)^{۲n}+b$, $(n \in N)$ تعریف می‌شود، نقطه
$M\Big|\begin{matrix} x_{۰}=a \\ y_{۰}=b \end{matrix}$
نقطه Min نسبی است.

پس نقطه $x = ۲$ طول نقطه Min نسبی و $y = ۳$ عرض نقطه Min نسبی می‌باشد پس نقطه بحرانی $(۲,۳)$ می‌نیمم نسبی‌تابع می‌باشد.

۵۸. ❷ برای سادگی کار، تابع را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۱}{x(۱-x)} = \frac{۱}{۱-x} + \frac{۱}{x}$$

حال مشتق n ام هر یک از توابع بالا را بدست می‌آوریم:

$$f_۱(x) = \frac{۱}{۱-x} \Rightarrow f_۱^{(۱)}(x) = \frac{۱}{(۱-x)^۲} \Rightarrow f_۱^{(۲)}(x) = \frac{۲}{(۱-x)^۳} \Rightarrow f^{(۳)}(x) = \frac{۶}{(۱-x)^۴} + \dots$$

$$\Rightarrow f_۱^{(n)}(x) = \frac{n!}{(۱-x)^{n+۱}} \Rightarrow f_۱^{(n)}(x = \frac{۱}{۲}) = \frac{n!}{(۱-\frac{۱}{۲})^{n+۱}} = \frac{n!}{(\frac{۱}{۲})^{n+۱}} = ۲^{n+۱}n!$$

$$f_۲(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow f_۲^{(۱)}(x) = -\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f_۲^{(۲)}(x) = \frac{۲}{x^۳} \Rightarrow f_۲^{(۳)}(x) = \frac{-۶}{x^۴} + \dots$$

$$\Rightarrow f_۲^{(n)}(x) = \frac{n!(-۱)^n}{x^{n+۱}} \Rightarrow f_۲^{(n)}(x = \frac{۱}{۲}) = \frac{n!(-۱)^n}{(\frac{۱}{۲})^{n+۱}} = ۲^{n+۱}n!(-۱)^n$$

$$f^{(n)}(x)\Big|_{x=\frac{۱}{۲}} = ۲^{n+۱}n! + ۲^{n+۱}n!(-۱)^n = ۲^{n+۱}n![۱ + (-۱)^n]$$

۵۹. ❸

$$f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d \Rightarrow f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c \Rightarrow f''(x) = ۶ax + ۲b$$

$$f''(۰) = ۱ \Rightarrow ۰ + ۲b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$f''(۱) = -۱ \Rightarrow ۶a(۱) + ۲(\frac{۱}{۲}) = -۱ \Rightarrow ۶a + ۱ = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۳}$$

$$f''(۲) = -۳ \Rightarrow ۶(\frac{-۱}{۳})(۲) + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲(-۱)(۲) + ۱ = -۴ + ۱ = -۳$$

$$f''(۳) = -۵ \Rightarrow ۶(\frac{-۱}{۳})(۳) + ۲(\frac{۱}{۲}) = -۶ + ۱ = -۵$$

۶۰. ❶ براحتی می‌توان مقادیر h را در نقاط ۴ , ۳ , ۲ , ۱ = x بدست آورد.

$$h(۱) = f(g(۱)) = f(۲) = ۰$$

$h(۲) = f(g(۲))$ و $f(g(۱)) < f(g(۲)) < f(g(۳)) \Rightarrow ۰ < h(۲) < h(۳)$

$$h(۳) = f(g(۳)) = f(۳)$$

$$h(۴) = f(g(۴)) = f(۲) = ۰$$

نتیجه می‌گیریم که ۱ = x و ۴ = x نقاط می‌نیمم و ۳ = x یک نقطه ماکزیمم h است.

۶۱. ❷

$$f(x) = x^۲e^x$$

$$f'(x) = ۲xe^x + x^۲e^x \Rightarrow f''(x) = ۲e^x + ۲xe^x + ۲xe^x + x^۲e^x = ۰$$

$$\Rightarrow ۲e^x + ۴xe^x + x^۲e^x = ۰ \Rightarrow e^x(۲ + ۴x + x^۲) = ۰$$

$$\begin{cases} e^x > ۰ \\ x^۲ + ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = \dfrac{-۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۴(۱)(۲)}}{۲(۱)} = \dfrac{-۴ \pm ۲\sqrt{۲}}{۲} = \dfrac{۲(-۲ \pm \sqrt{۲})}{۲} = -۲ \pm \sqrt{۲} \end{cases}$$

چون مشتق دوم در این نقاط تغییر علامت می‌دهد پس طول نقاط عطف می‌باشند.

۶۲. ❸ ابتدا دامنه تابع را بدست می‌آوریم $D_f = (-1 , +\infty)$

$$y = x\operatorname{Ln}(x+1)$$

$$y' = \operatorname{Ln}(x+1) + \frac{x}{x+1} \Rightarrow y'' = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1+1}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''	$-$	$\circ$	$+$
	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

با توجه به دامنه تابع در فاصله $(-1 , +\infty)$ تابع تقعر رو به بالا (اکیداً محدب) می‌باشد.

۶۳. ❸

$$y = x\operatorname{Ln}x \Rightarrow y^{(1)} = \operatorname{Ln}x + 1 \Rightarrow y^{(2)} = \frac{1}{x} \Rightarrow y^{(3)} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow y^{(5)} = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}\Bigg|_{n=10} = \frac{(-1)^{10}(10-2)!}{x^{10-1}} = \frac{8!}{x^9} = 8!\, x^{-9}$$

۶۴. ❸

$$\text{نرخ تغییر تابع } \sqrt{x^2+8} \text{ نسبت به } \frac{x}{x+1} = \frac{(\sqrt{x^2+8})'}{(\frac{x}{x+1})'} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}}{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}\Bigg|_{x=1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

۶۵. ❹

$$f(x) = 4x - x^4 \text{ و } x \in [-2 , 2]$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4(1 - x^3) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 4(1) - 1^4 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow f(1) = 3$$

$$f(-2) = 4(-2) - (-2)^4 = -8 - 16 = -24$$

$$f(2) = 4(2) - 2^4 = 8 - 16 = -8$$

پس کمترین و بیشترین مقدار تابع به ترتیب ۲۴- و ۳ می‌باشد.

۶۶. ❶

$$y = x^2e^x + 3e^x$$

$$y' = 2x\,e^x + x^2e^x + 3e^x = e^x\,(2x+x^2+3)$$

$$y'' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x + 3e^x = e^x(2+2x+2x+x^2+3) = 0$$

$$\Rightarrow e^x\,(x^2+4x+5) = 0 \Rightarrow e^x > 0$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(1)(5) = 16-20 = -4 < 0$$

پس e^x همواره مثبت و x^2+4x+5 نیز همواره مثبت است در نتیجه $y'' > 0$ یعنی تابع فوق در R محدب است.

۶۷. ❹

$$\text{نرخ تغییر } \sqrt{x^2-3x} \text{ نسبت به } \frac{x}{x-1} = \frac{(\sqrt{x^2-3x})'}{(\frac{x}{x-1})'} = \frac{\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}} \xlongequal{x=-1} \frac{\frac{-5}{2(2)}}{\frac{-1}{4}} = \frac{20}{4} = 5$$

۶۸. ❷

$$y=xe^x \Rightarrow y^{(1)}=e^x+xe^x=e^x(1+x)$$

$$y^{(2)}=e^x+e^x+xe^x=e^x(2+x)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=e^x(n+x) \Rightarrow y^{(n)}\Big|_{\substack{n=10\\x=1}}=e^1(10+1)=11e$$

۶۹. ❶

$$y^{(n)}=[u.v]^{(n)}=C_0^n u^{(n)}.v+C_1^n u^{(n-1)}.v'+\dots+C_n^n u.v^{(n)}$$

این رابطه به فرمول لایب‌نیتز معروف است از این رابطه برای محاسبه مشتق nام توابعی که بصورت حاصلضرب دو تابع است مورد استفاده قرار می‌گیرد. $y=x\sin x$

با استفاده از فرمول بالا داریم: $u=x$ و $v=\sin x$ و $y=u.v$ پس:

$$y^{(10)}=u^{(10)}v+C_1^{10}u^{(9)}v^1+C_2^{10}u^{(8)}v^2+\dots+C_{10}^{10}u.v^{(10)}$$

$u=x \Rightarrow u'=1$ و $u''=u^{(3)}=\dots\dots=u^{(10)}=0$

$v=\sin x \Rightarrow v'=\cos x$ و $v''=-\sin x$ و $v^{(3)}=-\cos x$ و $v^{(4)}=\sin x=\dots v^{(10)}=-\sin x$

$$y^{(10)}=C_9^{10}u'v^{(9)}+C_{10}^{10}uv^{(10)}=10\cos x-x\sin x$$

۷۰. ❷

نرخ تغییر تابع $f(x)=Ln(1+x^2)$ نسبت به $g(x)=Ln(x+3)$

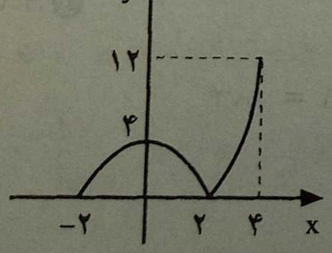
$$=\frac{(Ln(1+x^2))'}{(Ln(x+3))'}=\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x+3}}\Bigg|_{x=2}=\frac{\frac{4}{1+4}}{\frac{1}{5}}=4$$

۷۱. ❹

$$y=|4-x^2|=\begin{cases}x^2-4 & x>2\\ 4-x^2 & -2\le x\le 2\\ x^2-4 & x<-2\end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases}2x=0 \Rightarrow x=0 & x>2\\ -2x=0 \Rightarrow x=0 & -2\le x\le 2\\ 2x=0\Rightarrow x=0 & x<-2\end{cases}$$

نقطه $x=0$ اکسترمم نسبی (ماکزیمم نسبی) است بنابراین برای یافتن ماکزیمم مطلق نقاط ابتدا و انتهای بازه را بدست می‌آوریم:

$$x\in[-2,4] \Rightarrow \begin{cases}f(-2)=|4-(-2)^2|=0\\ f(4)=|4-16|=12\end{cases}$$



بنابراین Max مطلق تابع برابر ۱۲ می‌باشد یعنی $y_{Max}=12$

بطریق دیگر با توجه به نمودار $y=|4-x^2|$ در فاصله $x\in[-2,4]$ می‌توان ماکزیمم مطلق راتعیین کرد.

ب - پاسخ‌های آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته مدیریت

❶.۷۲

$$\Delta y = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)$$

$$\Delta y = f(\circ + \circ/\text{۱}) - f(\circ) = (\circ/\text{۱})^\text{۲} - \text{۲}(\circ/\text{۱}) + \text{۱} - [(\circ)^\text{۲} - (\circ) + \text{۱}] = -\circ/\text{۱۹}$$

❹.۷۳

$$y = e^{x^\text{۲}-x} \Rightarrow dy = (\text{۲}x-\text{۱})e^{x^\text{۲}-x}\, dx \Big|_{x=\text{۱}} = e^\circ\, dx = dx$$

❸.۷۴

$$y = xe^{x-\text{۱}} \Rightarrow y' = e^{x-\text{۱}} + xe^{x-\text{۱}} \Big|_{x=\text{۱}} = e^\circ + e^\circ = \text{۲}$$

❹.۷۵

$$y = Ln(x - \text{۱})$$

$$m_{\text{مماس}} = y' = \frac{\text{۱}}{x - \text{۱}} \Big|_{x=\text{۲}} = \text{۱} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \text{۱}$$

$$y = Ln(x-\text{۱}) \Big|_{x=\text{۲}} = Ln\text{۱} = \circ$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $x = \text{۲}$ عبارتست از:

$$y - y_\text{۱} = m(x - x_\text{۱})$$

$$y = x - \text{۲}$$

اما برای بدست آوردن عرض نقطه با قرار دادن $x = \circ$:

$$y = \circ - \text{۲} \Rightarrow y = -\text{۲}$$

❹.۷۶

$$y = \frac{-x}{x^\text{۲} - \text{۱}} \Rightarrow y' = \frac{-x^\text{۲} + \text{۱} + \text{۲}x^\text{۲}}{(x^\text{۲} - \text{۱})^\text{۲}} = \frac{x^\text{۲} + \text{۱}}{(x^\text{۲} - \text{۱})^\text{۲}}$$

با توجه به اینکه $D_y = R - \{\pm\text{۱}\}$ و مشتق همواره بزرگتر از صفر می‌باشد $(y' > \circ)$ پس تابع همواره صعودی و فاقد ماکزیمم و می‌نیمم است.

❹.۷۷

$$y = Ln\frac{x}{x^\text{۲} + \text{۱}}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{x}{x^\text{۲} + \text{۱}}\right)'}{\frac{x}{x^\text{۲} + \text{۱}}} = \frac{\frac{x^\text{۲} + \text{۱} - \text{۲}x^\text{۲}}{(x^\text{۲} + \text{۱})^\text{۲}}}{\frac{x}{x^\text{۲} + \text{۱}}} \Rightarrow y' \Big|_{x=\text{۱}} = \frac{\text{۱}-\text{۱}^\text{۲}}{\text{۱}(\text{۱}^\text{۲}+\text{۱})} = \frac{\circ}{\text{۲}} = \circ$$

❸.۷۸ از طرفین تابع $y = x^x$ لگاریتم نپرین می‌گیریم:

$$y = x^x \Rightarrow Lny = Lnx^x \Rightarrow Lny = xLnx$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = Lnx + \frac{\text{۱}}{x}(x) \Rightarrow y' = x^x(Lnx + \text{۱})$$

$$y'\Big|_{x=\text{۲}} = \text{۲}^\text{۲}\,(Ln\text{۲} + \text{۱}) = \text{۴}\,(Ln\text{۲} + \text{۱})$$

❸.۷۹

$$\Delta y = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)$$

$$\Delta y = f(\text{۱} + \circ/\text{۱}) - f(\text{۱}) = \text{۲}(\text{۱}/\text{۱})^\text{۲} + \text{۳}(\text{۱}/\text{۱}) + \text{۱} - \text{۲}(\text{۱})^\text{۲} - \text{۳}(\text{۱}) - \text{۱} = \circ/\text{۷۲}$$

۴ .۸۰

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow dy = (۴x + ۳)dx$$

$$dy\Big|_{x=۱ \text{ و } dx=۰/۱} = [۴(۱) + ۳]\,(۰/۱) = ۰/۷$$

۳ .۸۱

$$f(x,y) = x^۲ + ۵xy - ۴y^۲ - ۲x + ۲y - ۲ = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۲x + ۵y - ۲}{۵x - ۸y + ۲}\Bigg|_{x=y=۱} = -\frac{۲ + ۵ - ۲}{۵ - ۸ + ۲} = ۵$$

۳ .۸۲

$$m_{\text{مماس}} = y' = Lnx + \frac{۱}{x}\,.\,x = Lnx + ۱\Big|_{x=۱} = Ln۱ + ۱ = ۰ + ۱ = ۱ = m_{\text{مماس}}$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $x = ۱$ عبارتست از: $y - y_۱ = m\,(x - x_۱) \Rightarrow y = x - ۱$

برای آنکه معادله خط مماس محور طولها را قطع کند کافیست $y = ۰$ شود. $x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

۴ .۸۳

$$y = \frac{x}{x+۱} \Rightarrow y' = \frac{x+۱-x}{(x+۱)^۲} = \frac{۱}{(x+۱)^۲} \Rightarrow y'' = \frac{-۲(x+۱)}{(x+۱)^۴} = \frac{-۲}{(x+۱)^۳}$$

با توجه به اینکه y'' بازاء هیچ مقداری از x صفر نمی‌شود و فاقد ریشه است پس تابع تغییر علامت نمی‌دهد در نتیجه تابع فاقد نقطه عطف است.

۱ .۸۴

$$y = e^x - ۳$$

$$y' = e^x \Rightarrow e^x > ۰$$

در نتیجه تابع همواره صعودی و فاقد نقطه بحرانی می‌باشد.

۲ .۸۵

$$y = x^۴ - ۳۲x$$

$$y' = ۴x^۳ - ۳۲ = ۰ \Rightarrow x^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۲$$

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
			Min		

بدون رسم جدول تغییرات از طریق آزمون مشتق دوم می‌توانیم بگوییم:

$$y'' = ۱۲x^۲$$

$$y''(۲) = ۱۲\,(۲)^۲ = ۴۸ > ۰ \quad \text{می‌نیمم نسبی}$$

۴ .۸۶

$$y = e^{۲x} + ۲x + ۵ \Rightarrow y' = ۲e^{۲x} + ۲$$

$$m_{\text{مماس}}\Big|_{x=۰} = ۲e^{۲(۰)} + ۲ = ۴$$

۳ .۸۷

$$y=(x+۱)^x \Rightarrow Lny = Ln\,(x+۱)^x \Rightarrow Lny = xLn(x+۱) \Rightarrow \frac{y'}{y} = Ln(x+۱) + \frac{۱}{x+۱}\,.\,x$$

$$\Rightarrow y' = (x+۱)^x\left[Ln\,(x+۱) + \frac{x}{x+۱}\right]$$

$$y'\Big|_{x=۱} = (۱+۱)^۱\left[Ln\,(۱+۱) + \frac{۱}{۱+۱}\right] = ۲\,(Ln۲ + \frac{۱}{۲}) = ۲Ln۲ + ۱$$

۸۸. ❶

$$y = xLnx$$

$$y' = Lnx + \frac{۱}{x} . x \Rightarrow y' = Lnx + ۱ = ۰ \Rightarrow Lnx = -۱ \Rightarrow x = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$$

۸۹. ❸

$$y = x^{۳} + ۵x + ۲$$

$$y' = ۳x^{۲} + ۵ \Rightarrow y'' = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

x		۰	
y''	$-$	۰	$+$

چون مشتق دوم تغییر علامت داده پس طول نقطه عطف $x = ۰$ می‌باشد.

۹۰. ❷

$$dy = f'(x)\, dx \Rightarrow dy = (۲x + ۲)\, dx \Rightarrow dy\Big|_{\substack{x=۰ \\ dx=۰/۱}} = [۲(۰) + ۲]\,(۰/۱) = ۰/۲$$

۹۱. ❶

$$x^{۲} = S \Rightarrow u = (S - ۱)^{۳} \quad \text{و} \quad y = \sqrt{u^{۲} + ۲}$$

$$y'_{x^{۲}} = y'_S = y'_u . u'_S = \frac{۲u}{۲\sqrt{u^{۲}+۲}}\, ۳(S - ۱)^{۲} = \frac{۶(S-۱)^{۵}}{۲\sqrt{(S-۱)^{۶}+۲}}$$

$$y''_{x^{۲}} = y''_S = \frac{۳۰(S - ۱)^{۴}\left[۲\sqrt{(S-۱)^{۶}+۲}\,\right] - ۶(S-۱)^{۵}\left[\frac{۶\,(S-۱)^{۵}}{۴\sqrt{(S-۱)^{۶}+۲}}\right]}{۲\,[(S-۱)^{۶} + ۲]} \Rightarrow y''_{x^{۲}}\Big|_{x=۱} = \frac{۰}{۴} = ۰$$

۹۲. ❷

$$y'_x = ۶x^{۲} - ۴x \Rightarrow y'_x = ۶(۱)^{۲} - ۴(۱) = ۲ \Rightarrow x'_y = \frac{۱}{y'_x} = \frac{۱}{۲}$$

۹۳. ❶

$$y = -x^{۲} + ۴x$$

$$y' = -۲x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$y = -(۲)^{۲} + ۴(۲) = ۴ \Rightarrow y = ۴$$

۹۴. ❷

$$dy = f'(x)\, dx \Rightarrow dy = (-۲x + ۴)\, dx$$

$$dy\Big|_{\substack{x=۱ \\ dx=۰/۱}} = [-۲(۱)+۴](۰/۱) = ۰/۲$$

۹۵. ❸

$$y = \frac{x+۱}{x-۱} \Rightarrow y' = \frac{x-۱-x-۱}{(x-۱)^{۲}} = \frac{-۲}{(x-۱)^{۲}}$$

در فاصله [۳ و ۲] مقدار $y' < ۰$ می‌باشد پس تابع در این فاصله نزولی است.

$$y'' = \frac{-۲\,(-۲)\,(x-۱)}{(x-۱)^{۴}} = \frac{۴}{(x-۱)^{۳}}$$

در فاصله [۳ و ۲] مقدار $y'' > ۰$ در نتیجه تقعر منحنی رو به بالاست.

در نتیجه تابع نزولی و محدب (تقعر روبه بالا) می‌باشد.

۹۶. ④

$$y = x\operatorname{Ln}x - \frac{2}{x}$$

$$y' = \operatorname{Ln}x + \frac{1}{x}.x + \frac{2}{x^2} \Rightarrow y' = \operatorname{Ln}x + \frac{2}{x^2} + 1$$

$$y'' = \frac{1}{x} - \frac{4x}{x^4} \Rightarrow y'' = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = 0 \Rightarrow y'' = \frac{x^2 - 4}{x^3} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

۹۷. ④

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 2y + 1}{2y - 2x - 1}\Bigg|_{x=y=1} = -\frac{2(1) - 2(1) + 1}{2(1) - 2(1) - 1} = -\frac{1}{-1} = 1$$

۹۸. ③

$$y = xe^x$$

$$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ و } e^x \neq 0$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$ نزولی	0	$+$ صعودی

تابع y در فاصله ($+\infty$ و -1) صعودیست.

۹۹. ①

$$y = xe^{2x}$$

$$y' = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x) = 0 \Rightarrow e^{2x} \neq 0 \text{ و } x = -\frac{1}{2}$$

طول نقطه می‌نیمم

۱۰۰. ④

$$f(x) = y = x^3 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$f''(x) = 6x$$

$$\begin{cases} f''(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0 & \text{نسبی Min} \\ f''(-\sqrt{3}) = 6(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0 & \text{نسبی Max} \end{cases}$$

۱۰۱. ①

$$y = \operatorname{Ln}(x + 1)$$

$$y' = \frac{1}{x + 1} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow y''\Big|_{x=0} = \frac{-1}{(0+1)^2} = -1$$

۱۰۲. ① از طرفین تابع $y = x^{x+2}$ لگاریتم نپرین می‌گیریم.

$$y = x^{x+2} \Rightarrow \operatorname{Ln}y = \operatorname{Ln}x^{x+2} \Rightarrow \operatorname{Ln}y = (x+2)\operatorname{Ln}x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \operatorname{Ln}x + \frac{1}{x}(x+2)$$

$$\Rightarrow y' = x^{x+2}\left(\operatorname{Ln}x + \frac{x+2}{x}\right) \Rightarrow y'\Big|_{x=1} = (1)^{1+2}\left(\operatorname{Ln}1 + \frac{1+2}{1}\right) = 3$$

۱۰۳. ❷

$$y = e^x - ۲x \Rightarrow y' = e^x - ۲ \Rightarrow y'' = e^x > ۰$$

بنابراین تابع در فاصله [۱ و ۰] همواره مثبت پس تابع فوق محدب است.

۱۰۴. ❷

$$y = xLnx$$

$$y' = Lnx + \frac{۱}{x} . x \;\Rightarrow\; y' = Lnx + ۱$$

$$y' = ۰ \;\Rightarrow\; Lnx + ۱ = ۰ \;\Rightarrow\; Lnx = -۱ \;\Rightarrow\; x = e^{-۱}$$

$$x = e^{-۱} \;\Rightarrow\; y = e^{-۱}\; Lne^{-۱} \;\Rightarrow\; y = -e^{-۱}$$

با توجه به آزمون مشتق دوم نقطه Max یا Min آن را پیدا می‌کنیم.

$$y'' = \frac{۱}{x} \;\Rightarrow\; y''\Big|_{x=e^{-۱}} = \frac{۱}{e^{-۱}} = e > ۰ \qquad \text{Min نسبی}$$

بنابراین نقطه ($-e^{-۱}$ و $e^{-۱}$) نقطه می‌نیمم تابع می‌باشد.

۱۰۵. ❸ با توجه به تعریف مشتق حد فوق معادل مشتق تابع $f(x) = x^۴$ می‌باشد پس:

$$f(x) = x^۴ \;\Rightarrow\; f'(x) = ۴x^۳$$

۱۰۶. ❹

$$y = e^{۲x}$$

$$y^{(۱)} = ۲e^{۲x}$$

$$y^{(۲)} = ۴e^{۲x} = ۲^۲\, e^{۲x}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = ۲^n\, e^{۲x} \;\Rightarrow\; y^{(۵)} = ۲^۵\, e^{۲x}$$

$$y^{(۵)}\Big|_{x=۰} = ۲^۵\, e^{۲(۰)} = ۲^۵ = ۳۲$$

۱۰۷. ❶

$$dy = f'(x)\, dx \Rightarrow dy = \frac{۱+x-x}{(۱+x)^۲}\, dx \;\Rightarrow\; dy = \frac{dx}{(۱+x)^۲}$$

$$dy\Big|_{\substack{x=۱\\ \Delta x=۰/۴}} = \frac{۰/۴}{(۱+۱)^۲} = \frac{۰/۴}{۴} = ۰/۱$$

۱۰۸. ❷

$$y = x^۳ + ۱$$

$$y' = ۳x^۲ \;\Rightarrow\; y'' = ۶x = ۰ \;\Rightarrow\; x = ۰$$

ابتدا تقعر رو به پایین (مقعر) سپس تقعر رو به بالاست (محدب).

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	$-$		$+$

۱۰۹. ❸ بازاء مقادیر مختلف x تابع $f'(x)$ متغیر است.

$$f(x) = x\sin x \Rightarrow f'(x) = \sin x + x\cos x$$

$$f(x) = x - \sin x \Rightarrow f'(x) = 1 - \cos x \Rightarrow 0 \le f'(x) \le 2$$

$$f(x) = -x + \sin x \Rightarrow f'(x) = -1 + \cos x \Rightarrow -2 \le f'(x) \le 0$$

$$f(x) = -x + 2\sin x \Rightarrow f'(x) = -1 + 2\cos x \Rightarrow -3 \le f'(x) \le 1$$

همانطور که مشاهده می‌شود فقط تابع گزینه سه همواره نزولی است.

۱۱۰. ❸ با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y^2 - 4}{1 + 2xy + 2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=y=1} = -\frac{2 + 1 - 4}{1 + 2 + 2} = \frac{1}{5}$$

۱۱۱. ❷

$$y = \frac{x + 1}{x}$$

$$y^{(1)} = \frac{x - x - 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$y^{(2)} = \frac{2x}{(x^2)^2} = \frac{1\times 2}{x^3}$$

$$y^{(3)} = \frac{-2\times 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-(1)(2)(3)}{x^4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}} \Rightarrow y^{(8)} = \frac{(-1)^8\, 8!}{x^9} \Rightarrow \left.y^{(8)}\right|_{x=1} = \frac{8!}{1^9} = 8!$$

۱۱۲. ❸

$$y = x^2 + x \Rightarrow dy = (2x + 1)dx$$

$$\left.dy\right|_{\substack{x=1\\ dx=0/1}} = (2 + 1)(0/1) = 0/3$$

۱۱۳. ❸

$$y = \mathrm{Ln}(x^2 + 1)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	0 (Min)	↗

همان‌طوریکه‌از جدول تغییر علامت مشخص است در فاصله [۱ و ۰] تابع همواره صعودی می‌باشد.

۱۱۴. ❹

$$y = f(x) = ۲x + ۵e^{۲x} \Rightarrow dy = (۲ + ۱۰e^{۲x})dx$$

$$dy\Big|_{dx=۱ \text{ و } x=۰} = (۲+۱۰e^{۲(۰)})(۱) = ۲ + ۱۰ = ۱۲ \Rightarrow dy = ۱۲$$

۱۱۵. ❷ با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$$y'_x = -\frac{۲x + y - ۲Lny - \frac{۲y}{x}}{x + ۲y - \frac{۲x}{y} - ۲Lnx}$$

$$y'_x\Big|_{x=y=۱} = -\frac{۲+۱-۲Ln۱-۲}{۱+۲-۲-۲Ln۱} = -\frac{۱}{۱} = -۱$$

۱۱۶. ❹

$$y = \frac{Lnx - x}{e^{۲x}} \Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{۱}{x} - ۱)e^{۲x} - ۲e^{۲x}(Lnx - x)}{(e^{۲x})^۲}$$

$$y'_x\Big|_{x=۱} = \frac{(۱-۱)e^۲ - ۲e^۲(Ln۱ - ۱)}{(e^۲)^۲} = \frac{۲e^۲}{e^۴} = \frac{۲}{e^۲} \Rightarrow x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{۱}{y'_x} = \frac{۱}{\frac{۲}{e^۲}} = \frac{۱}{۲}e^۲$$

۱۱۷. ❹

$$y = e^x + ۲x$$

$y' = e^x + ۲ > ۰$ معادله فاقد جواب است پس نقطه بحرانی ندارد.

کمترین مقدار تابع $f(x) = e^x + ۲x \Rightarrow f(-۱) = e^{-۱} + ۲(-۱) = \frac{۱}{e} - ۲$

بیشترین مقدار تابع $f(x) = e^x + ۲x \Rightarrow f(۱) = e^۱ + ۲(۱) = e + ۲$

۱۱۸. ❶

$$y = x^۳ + x$$

$$y' = ۳x^۲ + ۱ \Rightarrow y'' = ۶x \Rightarrow y'' = ۰ \Rightarrow ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

x	-۲		۰		۲
y''		$-$		$+$	
		تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا	

ابتدا تقعر رو به پایین (مقعر) سپس تقعر رو به‌بالا (محدب) است.

۱۱۹. ❷ اگر **U** و **V** دو تابع مشتق‌پذیر از **x** و دارای مشتقات متوالی باشند در اینصورت مشتق مرتبه **n**ام آن تابع بصورت :

$$y^{(n)} = [u.v]^n = C_n^۰ u^{(n)}.v + C_n^۱ u^{(n-۱)}.v' + C_n^۲ u^{(n-۲)}.v^{(۲)} + \dots + C_n^n u.v^{(n)}$$

این رابطه به فرمول لایب نیتز معروف است از این رابطه برای محاسبه مشتق **n**ام توابعی که بصورت حاصل ضرب دو تابع است مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$y = xe^{۲x}$$

$$\begin{cases} u = e^{۲x} \Rightarrow u^{(۱)} = ۲e^{۲x} \Rightarrow u^{(۲)} = ۴e^{۲x} \Rightarrow \dots \Rightarrow u^{(n)} = ۲^n e^{۲x} \\ v = x \Rightarrow v^{(۱)} = ۱ \Rightarrow v^{(۲)} = ۰ \Rightarrow \dots \Rightarrow v^{(n)} = ۰ \end{cases}$$

$$y^{(n)} = C_n^۰ ۲^n e^{۲x}(x) + C_n^۱ ۲^{n-۱} e^{۲x}(۱) \Rightarrow y^{(n)}\Big|_{x=۰} = ۲^n e^{۲(۰)}(۰) + C_n^۱ ۲^{n-۱} e^{۲(۰)} = n.۲^{n-۱}$$

۱۲۰. ❸ برای بدست آوردن طول نقطه Max یا Min باید از ضابطه تابع مشتق گرفت.

$$y=\frac{e^{۲x}}{x}\Rightarrow y'=\frac{۲xe^{۲x}-e^{۲x}}{x^{۲}}=۰\Rightarrow ۲xe^{۲x}-e^{۲x}=۰\Rightarrow e^{۲x}(۲x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{۲x}>۰\\ ۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

x		$\frac{۱}{۲}$	
y'	$-$	۰	$+$
	$\searrow$	Min	$\nearrow$

۱۲۱. ❶

$$y=x^{(-x^{۲})}\Rightarrow Lny=Lnx^{(-x^{۲})}\Rightarrow Lny=-x^{۲}Lnx\Rightarrow\frac{y'}{y}=(-۲x)\,Lnx+\frac{۱}{x}(-x^{۲})$$

$$\Rightarrow y'=y\,[(-۲x)\,Lnx-x]\Rightarrow y'=x^{(-x^{۲})}(-۲xLnx-x)\Rightarrow y'=x^{(-x^{۲})}[-x(۲Lnx+۱)]$$

$$\Rightarrow y'=-x^{-x^{۲}+۱}(۲Lnx+۱)\Rightarrow y'=-x^{-x^{۲}+۱}(۱+Lnx^{۲})$$

۱۲۲. ❷

$$f(x)=Ln(۱+x)$$

$$y^{(۱)}=\frac{۱}{۱+x}\Rightarrow y^{(۲)}=\frac{-۱}{(۱+x)^{۲}}\Rightarrow y^{(۳)}=\frac{۱\times۲}{(۱+x)^{۳}}\Rightarrow y^{(۴)}=\frac{-(۱\times۲\times۳)}{(۱+x)^{۴}}$$

$$\Rightarrow y^{(۵)}=\frac{۱\times۲\times۳\times۴}{(۱+x)^{۵}}\Rightarrow\dots\Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{(۱+x)^{n}}$$

$$y=Ln(۱+x)\Rightarrow y^{(۱۰)}=\frac{-(۱\times۲\times۳\times.....\times۹)}{(۱+x)^{۱۰}}=\frac{-۹!}{(۱+x)^{۱۰}}$$

$$y^{(۱۰)}\Big|_{x=۰}=\frac{-۹!}{(۱+۰)^{۱۰}}=-۹!$$

۱۲۳. ❹

مشتق راست
$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{|x|+۵-(|۰|+۵)}{x-۰}=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{x}{x}=۱$$

مشتق چپ
$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{|x|+۵-(|۰|+۵)}{x-۰}=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{-x}{x}=-۱$$

چون $f'_{+}(۰)\neq f'_{-}(۰)$ است پس تابع در نقطه $x=۰$ فاقد مشتق است.

۱۲۴. ❸

$$y=xe^{x}\Rightarrow dy=(e^{x}+xe^{x})dx\Rightarrow d^{۲}y=(e^{x}+e^{x}+xe^{x})dx^{۲}$$

$$d^{۲}y\Big|_{x=۱\ \text{و}\ dx=۰/۱}=(e^{۱}+e^{۱}+۱e^{۱})(۰/۱)^{۲}\Rightarrow d^{۲}y=۳e(۰/۰۱)\Rightarrow d^{۲}y=۰/۰۳e$$

۱۲۵. ④

$y = xe^x \qquad [-۳, ۳]$

$y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = ۲e^x + xe^x = e^x(۲+x) \Rightarrow y'' = ۰ \Rightarrow e^x > ۰ \;, \; x = -۲$

x		-۲	
y''	$-$	۰	$+$
	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

پس در فاصله [۳,۳-] ابتدا تقعر رو به‌پایین (مقعر) و سپس تقعر رو به‌بالا (محدب) می‌باشد.

۱۲۶. ①

$y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x \Rightarrow y'' = e^x + e^x + xe^x = ۲e^x + xe^x = e^x(۲ + x)$

$$y'' = ۰ \Rightarrow e^x(۲ + x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} e^x > ۰ \\ ۲ + x = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

x		-۲	
y''	$-$	۰	$+$

چون مشتق دوم در نقطه $x=-۲$ تغییر علامت داده است پس طول نقطه عطف می‌باشد.

۱۲۷. ② با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$x^۵ + y^۵ = ۲xy \Rightarrow x^۵ + y^۵ - ۲xy = ۰$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\left.\frac{۵x^۴ - ۲y}{۵y^۴ - ۲x}\right|_{x=y=۱} = -\frac{۵(۱)^۴ - ۲(۱)}{۵(۱)^۴ - ۲(۱)} = -۱$$

۱۲۸. ①

$y = \operatorname{Ln}(x^۲ + ۱)$

$$y' = \frac{۲x}{x^۲ + ۱} \Rightarrow y'' = \frac{۲(x^۲ + ۱) - ۲x.۲x}{(x^۲ + ۱)^۲} = \frac{۲x^۲ + ۲ - ۴x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = \frac{۲ - ۲x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = ۰$$

$\Rightarrow ۲ - ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

چون مشتق دوم در نقاط $x=-۱$ و $x=۱$ تغییر علامت می‌دهد پس این دو نقطه طول نقاط عطف تابع می‌باشند.

۱۲۹. ④

$y = f(x) \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dy = f'(x)dx$

ابتدا مشتق تابع را بدست آورده سپس در رابطه دیفرانسیل قرار می‌دهیم:

$y = (x+۱)^{۲x}$

$$\operatorname{Ln}y = \operatorname{Ln}(x+۱)^{۲x} \Rightarrow \operatorname{Ln}y = ۲x\operatorname{Ln}(x+۱) \Rightarrow \frac{y'}{y} = ۲\operatorname{Ln}(x+۱) + \frac{۱}{x+۱}(۲x)$$

$$\Rightarrow y' = (x+۱)^{۲x}\left[۲\operatorname{Ln}(x+۱) + \frac{۲x}{x+۱}\right] \Rightarrow y'\Big|_{x=۱} = (۱+۱)^{۲(۱)}\left[۲\operatorname{Ln}(۱+۱) + \frac{۲(۱)}{۱+۱}\right] = ۴(۲\operatorname{Ln}۲ + ۱)$$

پس مقدار dy در $x=۱$ برابر است با:

$dy = ۴(۲\operatorname{Ln}۲ + ۱)dx$

۴ .۱۳۰

$$f(x)=\begin{cases} ۳-x & x\le ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲-۱ & x>۲ \end{cases}$$

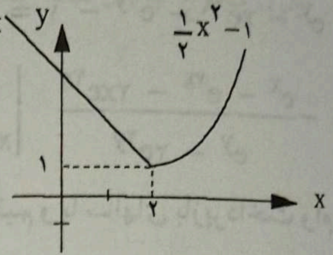
ابتدا حد راست و حد چپ تابع را بدست می‌آوریم:

حد راست

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۱}{۲}x^۲-۱ = \frac{۱}{۲}(۲)^۲-۱ = ۲-۱ = ۱$$

حد چپ

$$\lim_{x\to ۲^-} ۳-x = ۳-۲ = ۱$$



پس تابع در نقطه $x=۲$ دارای حد است زیرا حد راست و حد چپ با هم برابر می‌باشد حال مقدار تابع را بدست می‌آوریم: $f(۲)=۳-۲=۱$

و چون مقدار تابع هم برابر یک پس تابع پیوستگی نیز دارد زیرا حد راست و حد چپ و مقدار تابع با هم برابر می‌باشد. در مورد مشتق‌پذیری باید بگوییم که:

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\frac{x^۲}{۲}-۱-۱}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\frac{x^۲}{۲}-۲}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۲}{۲}=۲$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳-x-۱}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$$

مشتق راست و مشتق چپ با هم برابر نمی‌باشد و لذا در نقطه $x=۲$ نقطه زاویه‌دار می‌باشد پس مشتق‌پذیر نیست.

۴ .۱۳۱ با توجه به شکل متوجه می‌شویم که تابع $g(x)$ مشتق تابع $f(x)$ می‌باشد زیرا نمودار تابع f در نقطه $x=۱$ و $x=۴$ دارای اکسترمم می‌باشد که در نمودار مشتق باید این مقادیر صفرشوند و نقطه $x=۳$ طول نقطه عطف منحنی است که در تابع مشتق این نقطه باید یک نقطه اکسترمم باشد که این شرایط فقط در گزینه ۴ صادق است.

۴ .۱۳۲

$$f(x)=Ln(۱+x)$$

$$y^{(۱)}=\frac{۱}{۱+x}\Rightarrow y^{(۲)}=\frac{-۱}{(۱+x)^۲}\Rightarrow y^{(۳)}=\frac{۱\times ۲}{(۱+x)^۳}\Rightarrow y^{(۴)}=\frac{-(۱\times ۲\times ۳)}{(۱+x)^۴}$$

$$\Rightarrow y^{(۵)}=\frac{۱\times ۲\times ۳\times ۴}{(۱+x)^۵}\Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{(۱+x)^n}$$

$$y^{(n)}\Big|_{x=۰}=\frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{(۱+۰)^n}=(-۱)^{n-۱}(n-۱)!$$

۱۳۳. ❶ نقطه c نقطه زاویه دار منحنی است پس تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست از طرفی تابع در همسایگی چپ c، صعودی اکیداست یعنی $f'(c) > 0$ می‌باشد و در این همسایگی تقعر رو به پایین است یعنی $f''(c) < 0$ است. که این شرایط فقط درگزینه اول صحیح می‌باشد.

۱۳۴. ❶

$$e^x + e^y - xe^{2x} - e^{2y} - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x - e^{2x} - 2xe^{2x}}{e^y - 2e^{2y}}\Bigg|_{x=y=0} = -\frac{e^0 - e^{2(0)} - 2(0)e^{2(0)}}{e^0 - 2e^{2(0)}} = -\frac{1-1-0}{1-2(1)} = \frac{0}{-1} = 0$$

۱۳۵. ❶ میزان بازپرداخت وام با مقدار وام رابطه مستقیم، بانرخ بهره رابطه مستقیم و با سالهای بازپرداخت وام رابطه معکوس دارد. هر چه وام بیشتری دریافت کنیم قسط وام بیشتر خواهد داشت اگرنرخ‌بهره بالارود مقداربازپرداخت‌در هر قسط بیشتر خواهد شد اگر سالهای بازپرداخت نیز بیشتر شود مقدار قسط وام کمتر می‌شود. پس:

$$\frac{\partial P}{\partial A} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial P}{\partial r} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial P}{\partial N} < 0$$

۱۳۶. ❸

$$t = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1} - 1 + 3 = 3 \Rightarrow x = 3 \quad \text{و} \quad u = \frac{3+3}{3} = 2 \Rightarrow u = 2$$

با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم.

$$y'_t = y'_u \cdot u'_x \cdot x'_t$$

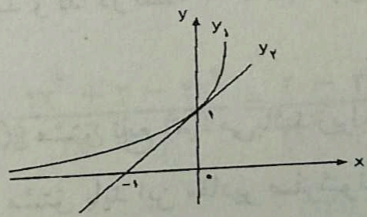
$$y'_t = (2u)\left(\frac{x-x-3}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{t^2}-1\right)\Bigg|_{\substack{u=2\\x=3\\t=1}} = [2(2)]\left(\frac{3-3-3}{3^2}\right) - \frac{1}{1} - 1 = 4\left(-\frac{1}{3}\right)(-2) = \frac{8}{3}$$

۱۳۷. ❷

$$y_1 = e^x \Rightarrow y_1' = e^x > 0$$

$$y_2 = x + 1 \Rightarrow y_2' = 1$$

$$y_1 \geq y_2$$



باتوجه به شکل داریم:

۱۳۸. ❹

$$y = \sqrt[3]{x^2}\,(x-2) \Rightarrow y = x^{\frac{2}{3}}(x-2)$$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2) + x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y'\Big|_{x=-1} = -\frac{2}{3}(-3) + 1 = 3$$

۱۳۹. ❶

$$y = e^{-2x} \xrightarrow{x=0} y = e^{-2(0)} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0 \text{ و } 1) \quad \text{نقطه تماس}$$

$$y = e^{-2x} \Rightarrow y' = -2e^{-2x}\Big|_{x=0} = -2e^{-2(0)} = -2 = m \quad \text{مماس}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -2x \Rightarrow y + 2x = 1$$

۱۴۰. **2** ابتدا دامنه تابع را بدست می‌آوریم یعنی $D_f=R^+=(\circ , +\infty)$ پس :

$$f(x)=\frac{x^۲}{۲}-Lnx = f'(x)=x-\frac{۱}{x}=\circ \Rightarrow \frac{x^۲-۱}{x}=\circ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

چون مخرج نیز در نقطه صفر تغییر علامت می‌دهد پس در جدول تغییرات این مقدار را نیز لحاظ می‌کنیم.

x		−۱		۰		۱	
$x^۲-۱$	+	۰	−		−	۰	+
x	−		−	۰	+		+
y'	−	۰	+	∞	−	۰	+

با توجه به دامنه تابع و جدول تغییرات، تابع در بازه (۰ و ۱) نزولی می‌باشد.

۱۴۱. **4**

$$y=Ln(x^۲+۴)$$

$$y'=\frac{۲x}{x^۲+۴} \Rightarrow y''=\frac{۲(x^۲+۴)-۲x(۲x)}{(x^۲+۴)^۲}=\frac{۲x^۲+۸-۴x^۲}{(x^۲+۴)^۲}=\frac{۸-۲x^۲}{(x^۲+۴)^۲}=\circ \Rightarrow ۸-۲x^۲=\circ \Rightarrow x=\pm ۲$$

پس طول نقطه مثبت عطف برابر $x=۲$ می‌باشد لازم به ذکر است در این نقطه مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد.

۱۴۲. **3** از رابطه داده شده بطور ضمنی مشتق می‌گیریم

$$x^۲+۲y^۲-۳xy+۴x-۸=\circ$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{۲x-۳y+۴}{۴y-۳x} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=۲\\y=۱}}=-\frac{۲(۲)-۳(۱)+۴}{۴(۱)-۳(۲)}=-\frac{۵}{-۲}=\frac{۵}{۲}$$

۱۴۳. **4**

$$\text{نسبت به } \frac{x}{x+۱} \text{ نرخ تغییر تابع } \sqrt{x^۲+۳x} = \frac{\left(\sqrt{x^۲+۳x}\right)'}{\left(\frac{x}{x+۱}\right)'}=\frac{\frac{۲x+۳}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}}{\frac{x+۱-x}{(x+۱)^۲}} \overset{x=۱}{=\!=} \frac{\frac{۵}{۲(۲)}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۲۰}{۴}=۵$$

۱۴۴. **3**

$$y=xe^{-x} \Rightarrow y'=e^{-x}-xe^{-x}$$

$$y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x} \Rightarrow -۲e^{-x}+xe^{-x}=\circ \Rightarrow e^{-x}(x-۲)=\circ$$

$$\Rightarrow e^{-x}\neq \circ \text{ و } x-۲=\circ \Rightarrow x=۲$$

x	−∞	۲	+∞
y''	− تقعر رو به پایین	۰	+ تقعر رو به بالا

با توجه به جدول تغییرات تابع در فاصله $(-\infty$ و $۲)$ مقعر می‌باشد.

ج - پاسخ‌های آزمون سراسری کارشناسی ارشد رشته حسابداری

۱۴۵. ❷

$$y = ۲x^{۲} - x + ۳$$

$$\Delta y = f(x_{\circ} + \Delta x) - f(x_{\circ})$$

$$\Delta y = ۲(x + ۰/۱)^{۲} - (x + ۰/۱) + ۳ - (۲x^{۲} - x + ۳)$$

$$\Delta y = ۲x^{۲} + ۰/۰۲ + ۰/۴x - x - ۰/۱ + ۳ - ۲x^{۲} + x - ۳ \Big|_{x=۱} = ۰/۳۲ \Rightarrow \Delta y = ۰/۳۲$$

۱۴۶. ❹

$$y = \frac{Lnx}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{۱}{x}x - Lnx}{x^{۲}} \Bigg|_{x=e^{۲}} = \frac{۱ - ۲Lne}{e^{۴}} = -e^{-۴}$$

۱۴۷. ❸ با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۲x + y - ۲}{-۲y + x} \Bigg|_{\substack{x=۳ \\ y=۱}} = \frac{۶ + ۱ - ۲}{۲ - ۳} = \frac{۵}{-۱} = -۵$$

۱۴۸. ❶

$$dy = \left(\frac{۳}{۱ + ۹x^{۲}} - e^{-x}\right) dx \Bigg|_{x=۰} = \left(\frac{۳}{۱} - e^{۰}\right) dx = ۲dx$$

۱۴۹. ❸ مشتق تابع تابع از رابطه $y'_x = u'_x \cdot y'_u$ بدست می‌آید.

$$\left.\begin{aligned} y'_u &= \frac{dy}{du} = -\frac{۱}{u^{۲}} e^{\frac{۱}{u}} \\ u'_x &= \frac{du}{dx} = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲} - ۳}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_x = -\frac{۱}{(\sqrt{x^{۲}-۳})^{۲}} e^{\frac{۱}{\sqrt{x^{۲} - ۳}}} \cdot \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲} - ۳}} \Bigg|_{x=۲} = (-e)(۲) = -۲e$$

۱۵۰. ❷

$$y = x\,Lnx$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = ۱\,Ln۱ \Rightarrow y = ۰$$

$$m_{\text{مماس}} = y' = Lnx + \frac{۱}{x}x \Big|_{x=۱} = Ln۱ + ۱ = ۱ \Rightarrow m_{\text{مماس}} = ۱$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y = x - ۱$$ معادله خط مماس

۱۵۱. ❶

$$m_{\text{مماس}} = y' = \frac{x - ۲ - x - ۱}{(x - ۲)^{۲}} = \frac{-۳}{(x - ۲)^{۲}} \Bigg|_{x=۵} = \frac{-۳}{۹} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = ۳$$

۱۵۲. ❷ مشتق دوم تابع را حساب می‌کنیم.

$$y = x\,Lnx - x^{۲}$$

$$y' = Lnx + \frac{۱}{x}x - ۲x$$

$$y'' = \frac{۱}{x} - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$	$\frac{۱}{۲}$	$+\infty$
y''	+	۰	−
		عطف	

۳ .۱۵۳

$y = ۲x^۴ + x \Rightarrow y' = ۸x^۳ + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۳ = -\frac{۱}{۸} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$

با استفاده از آزمون مشتق دوم نقطه $x = -\frac{۱}{۲}$ نقطه Min تابع است زیرا: $y'' = ۲۴x^۲ > ۰$

۳ .۱۵۴

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x \neq ۰$

باتوجه‌به‌اینکه‌تابع بازاء همه مقادیر x مثبت بوده و همواره مخالف صفر است پس فاقد نقطه بحرانی می‌باشد.

۱ .۱۵۵

$x^۳ + y^۳ + xy - ۸ = ۰$ و $x = ۰ \Rightarrow ۰^۳ + y^۳ + ۰ - ۸ = ۰ \Rightarrow y = ۲$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۳x^۲ + y}{۳y^۲ + x}\Bigg|_{\substack{x=۰\\y=۲}} = -\frac{۲}{۱۲} = -\frac{۱}{۶}$$

۳ .۱۵۶

$$y = e^{۳x}+۱\Big|_{x=۰} = e^{۳(۰)} + ۱ = ۲$$

$$m_{\text{مماس}} = y' = ۳e^{۳x}\Big|_{x=۰} = ۳e^{۳(۰)} = ۳$$

معادله خط مماس $y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۲ = ۳(x - ۰) \Rightarrow y = ۳x + ۲$

۴ .۱۵۷

$y = e^{۲x} + x$

$$y^{(۱)} = ۲e^{۲x} + ۱ \Rightarrow y^{(۲)} = ۲^۲ e^{۲x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(۵)} = ۲^۵ e^{۲x}\Big|_{x=۰} = ۲^۵ e^{۲(۰)} = ۳۲$$

۲ .۱۵۸

$$x = Ln(\sqrt{\cos ۲y}) \Rightarrow e^x = \sqrt{\cos ۲y} \xrightarrow{\text{توان ۲}} e^{۲x} = \cos ۲y \Rightarrow \cos ۲y - e^{۲x} = ۰$$

مشتق ضمنی می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-۲e^{۲x}}{-۲\sin ۲y} = -\frac{e^{۲x}}{\sin ۲y}\Bigg|_{e^{۲x} = \cos ۲y} = -\frac{\cos ۲y}{\sin ۲y} = -\cot g ۲y$$

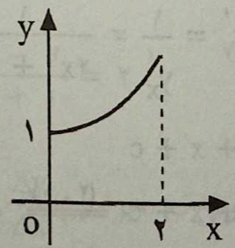
۱ .۱۵۹

طول نقطه بحرانی $y = x^۲ + ۱ \Rightarrow y' = ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$

عرض نقطه بحرانی $x = ۰ \Rightarrow y = ۰ + ۱ = ۱$

نقطه Min $y'' = ۲ > ۰ \Rightarrow (۰ \text{ و } ۱)$

مقدار ماکزیمم $x = ۲ \Rightarrow y = ۲^۲ + ۱ = ۵$



باتوجه به شکل نمودار تابع در نقطه $x = ۰$ دارای Min مطلق و در نقطه $x = ۲$ دارای Max مطلق است.

۴ .۱۶۰

$y = (x + ۱)^x$

$$Lny = xLn(x + ۱) \Rightarrow \frac{y'}{y} = Ln(x + ۱) + \frac{x}{x + ۱}$$

$$y' = (x + ۱)^x \left[Ln(x + ۱) + \frac{x}{x + ۱}\right]\Bigg|_{x=۰} = ۱^۰(Ln۱ + ۰) = Ln۱ = ۰$$

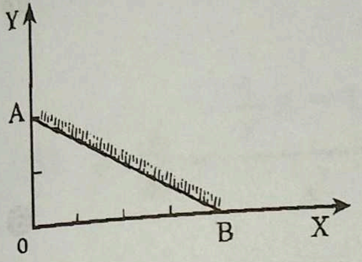
۱۶۱. ❶

$y = x\,Lnx$

$y' = Lnx + x\cdot\frac{1}{x} = Lnx + 1 \Rightarrow y'' = \frac{1}{x} \neq 0$ پس تابع فاقد نقطه عطف است.

۱۶۲. ❷ نقطه ماکزیمم در یکی از گوشه‌های کناری ناحیه عملیاتی می‌باشد پس مختصات تمام گوشه‌های کناری را پیدا کرده و در تابع هدف قرار می‌دهیم هر کدام که تابع هدف را بیشتر کند آن نقطه، نقطه Max می‌باشد.

تابع هدف : $z(x,y) = x+y$



$A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow z_A = 0 + 2 = 2$

$B \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow z_B = 4 + 0 = 4$

$O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow z_O = 0 + 0 = 0$

پس نقطه $B \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}$، Max می‌باشد.

۱۶۳. ❹ شیب وتر گذرنده برابر است با مقدار مشتق تابع در ازاء $x=1$ پس :

$$y = 4x^2 - 6x \Rightarrow y' = 8x - 6\Big|_{x=1} = 8(1) - 6 = 2$$

۱۶۴. ❶

$$\begin{cases} y=(tgx-1)^6+2(tgx-1)^3 \\ s = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = 6(1+tg^2x)(tgx-1)^5+6(1+tg^2x)(tgx-1)^2 \\ s'_x = 2x \end{cases}$$

$$y'_x=y'_s\cdot s'_x \Rightarrow y'_{x^2}=\frac{y'_x}{s'_x} \Rightarrow y'_{x^2} = \frac{6(1+tg^2x)(tgx-1)^5+6(1+tg^2x)(tgx-1)^2}{2x}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$$

۱۶۵. ❸

$y = x^4 + 2x^3$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \Rightarrow x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{4x^3+6x^2}\Bigg|_{x=-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x'_y = \frac{1}{2}$$

۱۶۶. ❶

$y = x^3 + ax^2 + x + c \Rightarrow 4a + c = -10$

$y = x^3 + ax^2 + x + c \xrightarrow{(2\,,\,0)} 0 = (2)^3 + a(2)^2 + 2 + c \Rightarrow c = 6$

$y = x^3 + ax^2 + x + c \xrightarrow{(0\,,\,6)} 6 = 0^3 + a(0)^2 + 0 + c$

$4a + c = -10 \xrightarrow{c=6} 4a + 6 = -10 \Rightarrow a = -4$

$ac = (-4)(6) = -24$

۱۶۷. ❷

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) = 0$$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

عبارت $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ به ازاء جمیع مقادیر x مقداری منفی است پس :

مشتق دوم در $x = \pm 1$ تغییر علامت می‌دهد پس طول نقطه عطف می‌باشد.

۴.۱۶۸

$$y = e^{2x}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = e^{2(0)} = e^0 = 1 \Rightarrow A(0 , 1)$$ نقطه تماس

$$m = y' = 2e^{2x}\Big|_{x=0} = 2e^{2(0)} = 2$$ شیب خط مماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y - 2x - 1 = 0$$ معادله خط مماس

۴.۱۶۹

$$y = e^{\text{Arctg}x}$$

$$dy = \frac{e^{\text{Arctg}x}}{1 + x^2} dx \Big|_{x=1} = \frac{e^{\text{Arctg}1}}{1 + 1} dx \Rightarrow dy = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2} dx$$

۱.۱۷۰

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = \frac{x + \Delta x + 1}{x + \Delta x} - \frac{x + 1}{x} = \frac{x^2 + x\Delta x + x - x^2 - x\Delta x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x = 0/1}} = -\frac{0/1}{1 + 0/1} = -\frac{1}{11}$$

۳.۱۷۱

$$xy + e^{xy} - 2x + y - 1 = 0$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y + ye^{xy} - 2}{x + xe^{xy} + 1}\Bigg|_{x=y=0} = -\frac{0 + 0e^0 - 2}{0 + 0e^0 + 1} = 2$$

۱.۱۷۲ در صورتی که بخواهیم $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ همواره برابر شیب منحنی در هر نقطه از آن باشد لازم است تابع به ازاء جمیع مقادیر x مشتق‌پذیر باشد که گزینه یک درست می‌باشد.

۳.۱۷۳

$$y = \frac{1}{4} e^{2x} \Rightarrow y^{(1)} = \frac{1}{2} e^{2x} = 2^{-1} e^{2x}$$

$$y^{(2)} = 2^0 e^{2x} = e^{2x}$$

$$y^{(3)} = 2 e^{2x}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = 2^{n-2} e^{2x}\Big|_{x=0} = 2^{n-2} . e^0 = 2^{n-2}$$

۱۷۴. ❶

$$f(x) = x^۳ - ۳x$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow ۳(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x		-۱		۱	
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
	$\nearrow$	۲ Max	$\searrow$	-۲ Min	$\nearrow$

$$f(-۱) = ۲$$

$$f(۱) = -۲$$

۱۷۵. ❶ **راه حل اول -** اگر تابع $f(x)$ مفروض باشد مشتق آن را به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

اگر این حد موجود باشد

$$f(x) = x^۵ \Rightarrow f'(x) = ۵x^۴$$

راه حل دوم -

$$\lim_{h \to ۰} \frac{(x+h)^۵ - x^۵}{h} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم } \overset{\text{Hop}}{=\!=} \lim_{h \to ۰} \frac{۵(x+h)^۴}{۱} = ۵x^۴$$

۱۷۶. ❷ **راه حل اول -**

$$y = \sin x \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \cos x \\ x'_y = \dfrac{۱}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow y'_x \,.\, x'_y = \cos x \,.\, \frac{۱}{\cos x} = ۱$$

راه حل دوم - بطور کلی برای تابع $y = f(x)$ داریم $y'_x = \dfrac{۱}{x'_y}$ بنابراین : $y'_x . x'_y = ۱$

۱۷۷. ❸

$$y = \frac{۱}{۱ - x}$$

$$y^{(۱)} = \frac{۱}{(۱ - x)^۲}$$

$$y^{(۲)} = \frac{-۲(-۱)(۱ - x)}{[(۱ - x)^۲]^۲} = \frac{۱ \times ۲}{(۱ - x)^۳}$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(۱ - x)^{n+۱}} \bigg|_{x=۰} = \frac{n!}{(۱)^{n+۱}} = n!$$

۱۷۸. ❹

$$y = (x^۲ + ۱)^x$$

$$\ln y = x \ln(x^۲ + ۱) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln(x^۲ + ۱) + \frac{۲x}{x^۲ + ۱} \,.\, x \Rightarrow y' = (x^۲ + ۱)^x \left[\ln(x^۲ + ۱) + \frac{۲x^۲}{x^۲ + ۱}\right]$$

$$y'\bigg|_{x=۱} = (۱ + ۱)^۱ \left(\ln ۲ + \frac{۲}{۲}\right) = ۲\ln ۲ + ۲$$

❶ .۱۷۹

$$y = xe^x + \frac{۱}{x+۱} \Rightarrow dy = \left[e^x + xe^x - \frac{۱}{(x+۱)^۲} \right] dx$$

$$dy \Big|_{x=۰} = \left[e^{۰} + (۰)e^{۰} - \frac{۱}{(۰+۱)^۲} \right] dx \Rightarrow dy = (۱ - ۱)dx = ۰$$

❸ .۱۸۰

$$y = x^۲ + ۱ \quad \text{و} \quad ۱ \leq x \leq ۲$$

تابع فوق در فاصله [۲ و ۱] اکیداً صعودی است پس:

$$f(۱) = ۱^۲ + ۱ = ۲ \qquad \text{Min}$$

$$f(۲) = ۲^۲ + ۱ = ۵ \qquad \text{Max}$$

❷ .۱۸۱ با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی داریم :

$$xy + y^۲ - ۲ = ۰$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y}{x+۲y} \Rightarrow y'_x \Big|_{x=y=۱} = -\frac{۱}{۱+۲} = -\frac{۱}{۳}$$

❷ .۱۸۲

$$y = \frac{۱}{۱-x}$$

$$y^{(۱)} = \frac{۱}{(۱-x)^۲}$$

$$y^{(۲)} = \frac{-۲(-۱)(۱-x)}{[(۱-x)^۲]^۲} = \frac{۱ \times ۲}{(۱-x)^۳}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(۱-x)^{n+۱}} \Bigg|_{x=۲} = \frac{n!}{(-۱)^{n+۱}} \Rightarrow y^{(۱۰)} = \frac{۱۰!}{(-۱)^{۱۱}} = -۱۰!$$

❷ .۱۸۳

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = \frac{x+\Delta x}{۱+x+\Delta x} - \frac{x}{۱+x} = \frac{x+\Delta x + x^۲ + x\Delta x - x - x^۲ - x\Delta x}{(۱+x+\Delta x)(۱+x)} = \frac{\Delta x}{(۱+x)(۱+x+\Delta x)}$$

$$\Delta y \Bigg|_{\substack{x=۰ \\ \Delta x=۰/۲}} = \frac{۰/۲}{(۱+۰)(۱+۰+۰/۲)} = \frac{۱}{۶}$$

$$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow dy = \frac{dx}{(۱+x)^۲} \Rightarrow dy \Bigg|_{\substack{x=۰ \\ \Delta x=۰/۲}} = \frac{۰/۲}{(۱+۰)^۲} = \frac{۱}{۵}$$

$$\Delta y - dy = \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۵} = -\frac{۱}{۳۰}$$

۱۸۴. ❸

$$y = x^{۴} + ۱ \Rightarrow y' = ۴x^{۳} \Rightarrow y'' = ۱۲x^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

x		۰	
y''	+		+
	تقعر رو به بالا		تقعر رو به بالا

۱۸۵. ❷ تنها تابعی که اکیداً نزولی است فقط تابع گزینه (۲) می‌باشد.

$$f(x) = x + \sin x \Rightarrow f'(x) = ۱ + \cos x \geq ۰$$

$$f(x) = -۲x + \sin x \Rightarrow f'(x) = -۲ + \cos x \leq -۱$$

$$f(x) = x - \sin x \Rightarrow f'(x) = ۱ - \cos x \geq ۰$$

$$f(x) = -x + ۲\cos x \Rightarrow f'(x) = -۱ - ۲\sin x$$

۱۸۶. ❶

$$y = xe^{ax}$$

$$y^{(۱)} = e^{ax} + axe^{ax} = e^{ax}(۱+ax)$$

$$y^{(۲)} = a(۱+ax)e^{ax} + ae^{ax} = ae^{ax}(۲+ax)$$

$$y''\Big|_{x=۱} = ۰ \Rightarrow ae^{a}(۲+a) = ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ و } a = -۲$$

۱۸۷. ❹

$$y = e^{۲x}$$

$$y^{(۱)} = ۲e^{۲x} \Rightarrow y^{(۲)} = ۲^{۲}e^{۲x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(۱۰)} = ۲^{۱۰}e^{۲x} \Rightarrow y^{(۱۰)}\Big|_{x=۰} = ۲^{۱۰}e^{۲(۰)} = ۲^{۱۰}$$

۱۸۸. ❶

$$y = \frac{x}{x-۱} \Rightarrow dy = \frac{-۱}{(x-۱)^{۲}}dx \Rightarrow dy\Big|_{\substack{x=۲ \\ \Delta x=۰/۱}} = \frac{-۱}{(۲-۱)^{۲}}(۰/۱) = -۰/۱$$

۱۸۹. ❶

$$y = xe^{x}$$

$$y' = e^{x} + xe^{x} \Rightarrow y'' = e^{x} + e^{x} + xe^{x} = ۲e^{x} + xe^{x} = e^{x}(۲+x) \Rightarrow y'' = ۰ \Rightarrow x = -۲$$

x		-۲	
y''	$-$		+

پس در فاصله [۱ و ۱-] محدب (تقعر رو به بالا) موکد می‌باشد.

۱۹۰. ❶

$$y = xe^{\frac{۱}{۲}x}$$

$$y' = e^{\frac{۱}{۲}x} + \frac{۱}{۲}xe^{\frac{۱}{۲}x} \Rightarrow y'' = \frac{۱}{۲}e^{\frac{۱}{۲}x} + \frac{۱}{۲}e^{\frac{۱}{۲}x} + \frac{۱}{۴}xe^{\frac{۱}{۲}x} = e^{\frac{۱}{۲}x}\left(۱ + \frac{۱}{۴}x\right)$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow ۱ + \frac{۱}{۴}x = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}x = -۱ \Rightarrow x = -۴$$ طول نقطه عطف

۱۹۱. ❹

با استفاده از دیفرانسیل تابع داریم:

$$y = xe^{۲x} + ۵x + ۱$$

$$dy = (e^{۲x} + ۲xe^{۲x} + ۵)dx$$

$$dy\Big|_{\substack{x=۰\\ dx=۱}} = (e^{۰} + ۲(۰)e^{۰} + ۵)(۱) = ۶$$

۱۹۲. ❶

$$y = \frac{e^{۲x} - ۲x}{x + ۲}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(۲e^{۲x} - ۲)(x + ۲) - (e^{۲x} - ۲x)}{(x + ۲)^{۲}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{x=۰} = \frac{(۲e^{۰}-۲)(۰+۲)-(e^{۰}-۰)}{(۰+۲)^{۲}} = -\frac{۱}{۴}$$

می‌دانیم $۱ = y'_x \cdot x'_y$ می‌باشد پس $\frac{dx}{dy} = x'_y = \frac{۱}{y'_x}$ می‌باشد یعنی:

$$\frac{dx}{dy} = x'_y = -۴$$

۱۹۳. ❸

$$y = e^{۲x} + x \Rightarrow y' = ۲e^{۲x} + ۱ \Rightarrow y'' = ۴e^{۲x} > ۰$$

چون $y'' > ۰$ است پس تابع همواره محدب می‌باشد.

۱۹۴. ❹

$$y = Lnx + x$$

$$y' = \frac{۱}{x} + ۱ \Rightarrow y' = \frac{۱ + x}{x} = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

چون $x = -۱$ در فاصله (۲ و ۱) نمی‌باشد پس در این فاصله فاقد نقطه بحرانی است و از طرفی:

$f(۱) = ۱$ و $f(۲) = Ln۲ + ۲$

۱۹۵. ❶

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{۲x+y-۴}{x+۱۰y-۳} \Rightarrow y'_x\Big|_{x=y=۱} = -\frac{۲ + ۱ - ۴}{۱ + ۱۰ - ۳} = \frac{۱}{۸}$$

می‌دانیم که $۱ = y'_x \cdot x'_y$ می‌باشد پس: $x'_y = \frac{۱}{y'_x} = ۸$

۱۹۶. ❷

$$f(x,y) = x^{۲} - ۵xy + y^{۲} - ۷x + y + ۹ = ۰$$

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy = (۲x - ۵y - ۷)\,dx + (-۵x + ۲y + ۱)\,dy = ۰$$

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy\Big|_{x=y=۱} = (۲-۵-۷)\,dx + (-۵+۲+۱)\,dy \Rightarrow -۱۰dx - ۲dy = ۰ \Rightarrow dy = -۵dx$$

۱۹۷. ❷

$$f(x) = x^{۳} - ۳x$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^{۲} - ۳ = ۰ \Rightarrow ۳(x^{۲} - ۱) = \Rightarrow x = \pm ۱$$

x		-۱		۱	
y'	+	۰	−	۰	+
	↗	۲	↘	−۲	↗
		Max		Min	

$$f(-۱) = ۲$$

$$f(۱) = -۲$$

۱۹۸. ❹

$f(x) = xe^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow f''(x) = -e^{-x} - [e^{-x} - xe^{-x}]$

$f''(x) = ۰ \Rightarrow -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = ۰ \Rightarrow xe^{-x} - ۲e^{-x} = ۰ \Rightarrow e^{-x}(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲$ و $e^{-x} > ۰$

$f(۲) = xe^{-x} = ۲e^{-۲}$ عرض نقطه عطف

۱۹۹. ❸

$f(x) = x^۳ - ۹x \qquad [۰ \text{ و } ۲]$

$f'(x) = ۳x^۲ - ۹$

$f''(x) = ۶x \Rightarrow f''(x) = ۰ \Rightarrow ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

پس در فاصله $[۰ \text{ و } ۲]$ تابع با ضابطه $f(x) = x^۳ - ۹x$ محدب (تقعر رو به بالا) می‌باشد.

۲۰۰. ❷ با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$$f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۵xy + ۴x - ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۲x - ۵y + ۴}{۲y - ۵x}\Big|_{x=y=۱} = -\frac{۲-۵+۴}{۲-۵} = -\frac{۱}{-۳} = \frac{۱}{۳}$$

۲۰۱. ❷ با توجه به دیفرانسیل تابع $dy = f'(x)dx$ داریم:

$y = x^۲ + x$

$dy = (۲x + ۱)\,dx \xrightarrow[\Delta x = ۰/۱,\ x=۱]{dx \approx \Delta x} dy = [۲(۱) + ۱](۰/۱) = ۰/۳$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = (x + \Delta x)^۲ + (x + \Delta x) - x^۲ - x \Rightarrow \Delta y = x^۲ + ۲x\Delta x + \Delta^۲ x + x + \Delta x - x^۲ - x$

$\Rightarrow \Delta y = ۲x\Delta x + \Delta^۲ x + \Delta x \Rightarrow \Delta y = \Delta x(۲x + \Delta x + ۱)$

$\xrightarrow{x=۱,\ \Delta x = ۰/۱} \Delta y = ۰/۱\,[۲(۱) + ۰/۱ + ۱] \Rightarrow \Delta y = ۰/۱\,(۳ + ۰/۱) = ۰/۳۱$

$dy - \Delta y = ۰/۳ - ۰/۳۱ = -۰/۰۱$

۲۰۲. ❸

$y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x = ۰ \Rightarrow e^x(۱+x) = ۰ \Rightarrow ۱ + x = ۰ \Rightarrow x = -۱$

x	$-\infty$	-۱	$+\infty$
y'	$-$	۰	$+$

تابع f در فاصله $(+\infty \text{ و } -۱)$ اکیداً صعودی است زیرا مشتق در این فاصله همواره مثبت $(y' > ۰)$ می‌باشد.

۲۰۳. ❶

$y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x$

$y'' = e^x + e^x + xe^x \Rightarrow y'' = ۲e^x + xe^x = ۰ \Rightarrow e^x(۲+x) = ۰ \Rightarrow ۲+x = ۰ \Rightarrow x = -۲$

x	$-\infty$	-۲	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
	تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا

در نتیجه تابع در فاصله $(-\infty$ و $-۲)$ اکیداً مقعر می‌باشد یعنی تقعر رو به پایین است.

۲۰۴. ❹

$y = Ln(۱+x^۲)$

$$y' = \frac{۲x}{۱+x^۲} \Rightarrow y'' = \frac{۲(۱+x^۲) - ۲x\,.\,(۲x)}{(۱+x^۲)^۲} = \frac{۲ + ۲x^۲ - ۴x^۲}{(۱+x^۲)^۲} = \frac{۲-۲x^۲}{(۱+x^۲)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲ - ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

طول نقطه مثبت عطف برابر $x=۱$ می‌باشد که در این نقطه علامت مشتق دوم تغییر پیدا می‌کند.

۲۰۵. ❷

$x^۳ + y^۳ = xy+۱ \Rightarrow x^۳ + y^۳ - xy = ۱$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۳x^۲-y}{۳y^۲-x}\Bigg|_{x=y=۱} = -\frac{۳(۱)^۲-۱}{۳(۱)^۲-۱} = -\frac{۲}{۲} = -۱ \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{۱}{y'_x} = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

۲۰۶. ❸ از طرفین تابع $y = x^x$ لگاریتم طبیعی نپرین می‌گیریم:

$$y = x^x \Rightarrow Lny = Lnx^x \Rightarrow Lny = xLnx \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \frac{y'}{y} = Lnx + \frac{۱}{x}(x)$$

$$\Rightarrow y' = x^x(Lnx+۱) \Rightarrow y'\Big|_{x=e} = e^e(Lne + ۱) = e^e(۱+۱) = ۲e^e$$

۲۰۷. ○

$y = xe^x$

$y' = e^x + xe^x$

$y'' = e^x + e^x + xe^x \Rightarrow y'' = ۲e^x + xe^x \Rightarrow e^x(۲+x) = ۰ \Rightarrow x = -۲$

x	$-\infty$	-۲	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$

لازم به ذکر است که کلید سنجش گزینه ۴ امّا تابع در فاصله $(+\infty$ و $-۲)$ محدب می‌باشد که در گزینه‌ها نمی‌باشد.

۲.۲۰۸ ❷

$$f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲xy + ۵x - ۵y = ۰$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x-۲y+۵}{۲y-۲x-۵}\Big|_{x=y=۱} = -\frac{۲(۱)-۲(۱)+۵}{۲(۱)-۲(۱)-۵} = -\frac{۵}{-۵} = ۱$$

با توجه به تعریف دیفرانسیل :

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dy = f'(x)\,dx \Rightarrow dy = dx$$

۲.۲۰۹ ❸

$$y = (۲x-۱)^{\frac{x}{۲}} \xrightarrow{\text{از طرفین Ln می‌گیریم}} Lny = Ln(۲x-۱)^{\frac{x}{۲}} \Rightarrow Lny = \frac{x}{۲}Ln(۲x-۱)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{۱}{۲}Ln(۲x-۱) + \frac{۲}{۲x-۱}\left(\frac{x}{۲}\right) \Rightarrow y' = (۲x-۱)^{\frac{x}{۲}}\left[\frac{۱}{۲}Ln(۲x-۱) + \frac{x}{۲x-۱}\right]$$

$$m = y'\Big|_{x=۲} = (۴-۱)\left(\frac{۱}{۲}Ln۳ + \frac{۲}{۳}\right) = \frac{۳}{۲}Ln۳ + ۲ \quad \text{شیب خط مماس}$$

۲.۲۱۰ ❷

$$y = (Lnx)^۲ + ۱ \Rightarrow y' = ۲\left(\frac{۱}{x}\right)Lnx = \frac{۲Lnx}{x} = ۰ \Rightarrow Lnx = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

پس مختصات نقطه بحرانی (۱ و ۱) می‌باشد، همچنین $x=۰$ نیز یک نقطه بحرانی برای f است که چون‌در گزینه‌هانیامده است از بررسی‌آن صرف‌نظر می‌کنیم با استفاده از آزمون مشتق دوم داریم :

$$y' = \frac{۲Lnx}{x} \Rightarrow y'' = \frac{۲\left(\frac{۱}{x}\right)x - ۲Lnx}{x^۲} = \frac{۲-۲Lnx}{x^۲} \Rightarrow y''\Big|_{x=۱} = \frac{۲-۲Ln۱}{۱^۲} = ۲ > ۰$$

چون $f''(۲) > ۰$ آنگاه f در (۱ و ۱) دارای Min نسبی می‌باشد.

۲.۲۱۱ ❸

$$y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$$

$$\xrightarrow[\text{صدق می کند (۱ و ۰)}]{\text{مختصات تابع روی معادله منحنی}} ۱ = ۰^۳ + a(۰)^۲ + b(۰) + c \Rightarrow c = ۱$$

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b\Big|_{x=۱} = ۰ \Rightarrow ۳(۱)^۲ + ۲a(۱) + b = ۰ \Rightarrow ۲a+b=-۳$$

$$y'' = ۶x + ۲a\Big|_{x=۲} = ۰ \Rightarrow ۶(۲) + ۲a = ۰ \Rightarrow ۲a = -۱۲ \Rightarrow a = -۶$$

$$۲a + b = -۳ \xrightarrow{a=-۶} ۲(-۶) + b = -۳ \Rightarrow b = ۹$$

۲.۲۱۲ ❶

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dy = f'(x)dx$$

$$x^۲ - ۳xy + ۲y^۲ = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{۲x-۳y}{۴y-۳x}\Big|_{x=y=۱} = -\frac{۲-۳}{۴-۳} = -\frac{-۱}{۱} = ۱ = f'(x)$$

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow dy = (۱)dx \Rightarrow dy = dx$$

۲۱۳. ❶

$$t = ۱ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۱} \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow u = \sqrt{۱+۳} \Rightarrow u = ۲$$

با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم.

$$y'_t = y'_u \cdot u'_x \cdot x'_t = \frac{۱}{۲\sqrt{u+۲}} \cdot \frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}} \cdot \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{t^۲}}\Bigg|_{\substack{t=۱\\x=۱\\u=۲}} = \frac{۱}{۲(۲)} \cdot \frac{۱}{۲(۲)} \cdot \frac{۱}{۳(۱)} = \frac{۱}{۱۶\times۳} = \frac{۱}{۴۸}$$

۲۱۴. ❷

$$y = Ln\frac{x}{x+۱} \Rightarrow y' = \frac{\frac{x+۱-x}{(x+۱)^۲}}{\frac{x}{x+۱}} = \frac{۱}{x(x+۱)} \Rightarrow y'' = \frac{-(۲x+۱)}{x^۲(x+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow -۲x-۱ = ۰ \Rightarrow -۲x = ۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

در بازه [۲ و ۱] با توجه به علامت مشتق دوم $y''<۰$ در نتیجه تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است.

۲۱۵. ❸ با توجه به دامنه تابع $D_y = (۰ \text{ و } +\infty) = R^+$ داریم.

$$y = xLnx \Rightarrow y' = Lnx + \frac{۱}{x}\cdot x \Rightarrow y' = Lnx + ۱ = ۰ \Rightarrow Lnx = -۱ \Rightarrow x = e^{-۱}$$ طول نقطه بحرانی

x	۰	$e^{-۱}$	$+\infty$
y'	$-$ ↘	۰ Min	$+$ ↗

پس نقطه بحرانی $x=e^{-۱}$ و نوع آن بصورت، می‌نیمم می‌باشد.

۲۱۶. ❹ اگر تابع f در همسایگی نقطه $x_۰$ تعریف شود، حد زیر را در صورت وجود مشتق تابع f در نقطه $x_۰$ می‌نامند و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$f'(x_۰) = \lim_{h\to۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$$

$$f(x) = \sqrt[۳]{(x^۲-۲x)^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲(۲x-۲)}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۲x)}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۲(۸-۲)}{۳\sqrt[۳]{۸}} = ۲$$

۲۱۷. ❶

$$y = Ln(x^۲-۳)$$

$$x=۲ \Rightarrow y = Ln(۴-۳) = Ln۱ = ۰ \Rightarrow y = ۰$$

$$y = Ln(x^۲-۳) \Rightarrow y' = \frac{۲x}{x^۲-۳}\Bigg|_{x=۲} = \frac{۴}{۴-۳} = ۴$$ شیب خط مماس

$$y - y_۱ = m(x-x_۱) \Rightarrow y - ۰ = ۴(x-۲) \Rightarrow y = ۴x-۸$$ معادله خط مماس

برای یافتن نقطه تقاطع خط مماس با نیمساز ربع اول و سوم معادله خط مماس را با $y=x$ تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = 4x-8 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 4x-8 = x \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

۲۱۸. ❹

$$f(x) = (x^2+1)e^{-x}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x} = -e^{-x}(x^2-2x+1) = -e^{-x}(x-1)^2 < 0 \quad \text{همواره نزولی}$$

پس تابع f در هیچ بازه‌ای صعودی نمی‌باشد.

۲۱۹. ❹

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$

$$f''(x) = -x(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} - 2xe^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \, , \pm\sqrt{3}$$

مجموعه طول نقاط عطف نمودار بصورت $\{\sqrt{3} \, , 0 \, , -\sqrt{3}\}$ می‌باشد.

۲۲۰. ❷ **راه حل اول** - با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$$y^2 = f(y-2x) \Rightarrow y^2 - f(y-2x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2f'(y-2x)}{2y - f'(y-2x)}\Bigg|_{\substack{x=1 \, , \, y=3 \\ f'(1) = -2}} = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم -

$$y^2 = f(y-2x) \Rightarrow 2yy' = (y'-2)f'(y-2x) \xrightarrow{x=1 \, , \, y=3} 6y' = (y'-2)f'(1)$$

$$\xrightarrow{f'(1) = -2} 6y' = (y'-2)(-2) \Rightarrow 6y' + 2y' = 4 \Rightarrow 8y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}$$

د - پاسخ‌های آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته علوم اقتصادی

۲۲۱. ❹ شیب خط مماس را در این نقطه تعیین می‌کنیم برای اینکار y' را محاسبه می‌کنیم:

$$x^3 + x^2y^2 - x - 2y + 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{3x^2+2xy^2-1}{2x^2y-2} \Rightarrow y'\Bigg|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{0+0-1}{0-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{شیب خط قائم} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

۲۲۲. ❷
$x=(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ و $L(x) = x_1+2x_2 + \dots + nx_n$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}) = (1+2+\dots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲۲۳. ❶
$y = f(t) = \sqrt{t} \quad t=1 \quad dt = x$

$dy = f'(t)dt = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \Big|_{\substack{t=1 \\ dt=x}} = \frac{1}{2} x$ و $f(t)\Big|_{t=1} = 1 \Rightarrow$ مقدار تقریبی $= 1+\frac{1}{2}x$

۲۲۴. ❹ با استفاده از تعریف مشتق تابع نمایی داریم:

$y = a^x \Rightarrow y'_x = a^x \, Lna$

$y = a^u \Rightarrow y'_x = u' a^u Lna$

$f(a) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x Ln2 \Big|_{x=0} = 2^0 Ln2 = Ln2$

۲۲۵. ❷ **قضیه-** اگر تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد آنگاه در آن نقطه پیوسته است.

اثبات: می‌دانیم‌که f در aتعریف شده است حال باید نشان دهیم که $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و برابر f(a) است یعنی:

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) - f(a)] = 0$

توجه کنید که برای $x \neq a$

$f(x)-f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$

اما بنابر فرض $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ و $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$ پس:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\times 0 = 0$$

عکس این قضیه در حالت کلی صحیح نیست.

۲۲۶. ❷
$f(x) = (Lnx^2)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(Lnx^2)'(Lnx^2)^2 \Rightarrow f'(x) = 3(\frac{2x}{x^2})(Lnx^2)^2 = \frac{6}{x}(Lnx^2)^2$

۲۲۷. ❷
$f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \Rightarrow f'(x) = (1-x)e^{-x}$

۲۲۸. ❷
$y = x(Arctg(1-x^2))$

$y' = Arctg(1-x^2) + \frac{-2x^2}{1+(1-x^2)^2} \Rightarrow y' = Arctg(1-x^2) - \frac{2x^2}{1+(1-x^2)^2}$

$y'\Big|_{x=0} = Arctg(1) - \frac{2(0)^2}{1+(1-0^2)^2} \Rightarrow y' = Arctg(1) = \frac{\pi}{4}$

۲۲۹. ❸
$y = x+Lnx$

$y' = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ **همواره مقعر**

$$2x^3 - \mathrm{Ln}y + x^2\sqrt{y} - 6x + 2y = 10$$

۲۳۰. ۱

با استفاده از مشتق ضمنی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2 + 2x\sqrt{y} - 6}{-\frac{1}{y} + \frac{x^2}{2\sqrt{y}} + 2} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=y=1} = -\frac{6+2-6}{-1+\frac{1}{2}+2} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

۲۳۱. ۳

$$\sin\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2-1}{y+1} \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2-1}{y+1} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - \frac{2x(y+1)}{(y+1)^2}}{-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x^2-1}{(y+1)^2}} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\frac{\cos 0 - \frac{2(0)(1+1)}{(1+1)^2}}{-0\,(\cos 0) - \frac{1}{4}} = -\frac{1-0}{0-\frac{1}{4}} = 4$$

۲۳۲. ۳

$$f(x^2-1) = 6x^2+1 \Rightarrow 2xf'(x^2-1) = 12x \Rightarrow f'(x^2-1) = 6$$

۲۳۳. ۱

$$f(x) = \mathrm{Ln}(x+1)$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y^{(2)} = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow y^{(3)} = \frac{1\times 2}{(x+1)^3} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{-(1\times 2\times 3)}{(x+1)^4}$$

$$\Rightarrow y^{(5)} = \frac{1\times 2\times 3\times 4}{(x+1)^5} \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$

$$y = \mathrm{Ln}(x+1) \Rightarrow y^{(10)} = \frac{-(1\times 2\times \dots \times 9)}{(x+1)^{10}} = \frac{-9!}{(x+1)^{10}}$$

$$\left.y^{(10)}\right|_{x=0} = \frac{-9!}{(0+1)^{10}} = -9!$$

۲۳۴. ۴ تابع داده شده یک تابع هموگرافیک می‌باشد زمانی صعودی است که $y' > 0$ باشد.

$$y = \frac{ax+1}{x-2} \Rightarrow y' = \frac{a(x-2)-ax-1}{(x-2)^2} = \frac{ax-2a-ax-1}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow \frac{-2a-1}{(x-2)^2} > 0$$

$$\Rightarrow -2a-1 > 0 \Rightarrow -2a > 1 \Rightarrow a < -\frac{1}{2}$$

۲۳۵. ۳ اگر تغییر متغیر $\sqrt{x} = u$ فرض کنیم در اینصورت :

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow f(u) = \sqrt{u^2+u}$$

$$f'(u) = \frac{2u+1}{2\sqrt{u^2+u}} \xrightarrow{x=1\Rightarrow u=1} f'(1) = \frac{2(1)+1}{2\sqrt{1^2+1}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

۲۳۶. ۳

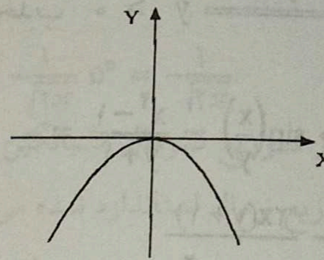
$$y = 8x - x^2 \xrightarrow{x=3} y = 8(3) - 3^2 \Rightarrow y = 15 \Rightarrow A(3 \text{ و } 15)$$

$$y = 8x - x^2 \Rightarrow y' = \left.8 - 2x\right|_{x=3} = 8 - 2(3) = 8 - 6 = 2 = m_{\text{مماس}}$$

معادله خط مماس $y-y_۱ = m(x-x_۱) \Rightarrow y-۱۵ = ۲(x-۳) \Rightarrow y = ۲x+۹$

$$y = ۲x+۹ \xrightarrow[\quad]{\text{برای قطع محور عرضها باید } x=۰} y = ۲(۰)+۹ \Rightarrow y = ۹$$

۲۳۷. ❶ چنین شرایطی برای نقطه ماکزیمم برقرار است برای مثال تابع $y = -x^۴$ در نقطه $x = ۰$ دارای ماکزیمم می‌باشد زیرا:



$$f(x) = -x^۴$$

$$f'(x) = -۴x^۳ \Rightarrow f'(x) = ۰$$

$$f''(x) = -۱۲x^۲ \Rightarrow f''(۰) = ۰$$

$$f'''(x) = -۲۴x \Rightarrow f'''(۰) = ۰$$

$$f''''(x) = -۲۴ < ۰$$ نقطه Max دارد.

۲۳۸. ○

$$y = xLn(x+۱)$$

$$y' = Ln(x+۱) + \frac{x}{x+۱} \Rightarrow y'' = \frac{۱}{x+۱} + \frac{x+۱-x}{(x+۱)^۲} \Rightarrow y'' = \frac{۱}{x+۱} + \frac{۱}{(x+۱)^۲} = \frac{x+۲}{(x+۲)^۲}$$

$$y''-y'+y = \frac{x+۲}{(x+۱)^۲} - Ln(x+۱) - \frac{x}{x+۱} + xLn(x+۱)\Big|_{x=۱} = \frac{.۱+۲}{(۱+۱)^۲} - Ln(۱+۱) - \frac{۱}{۱+۱} + Ln(۱+۱)$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴} - Ln۲ - \frac{۱}{۲} + Ln۲ = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۳-۲}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

۲۳۹. ❹

$$f(x) = x - \frac{۱}{x}$$

$$y^{(1)} = ۱ + \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow y^{(۲)} = \frac{-۲}{x^۳} \Rightarrow y^{(۳)} = \frac{۲x^۳}{x^۴} \cdots\cdots \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-۱)^{n+۱}n!}{x^{n+۱}}$$

$$y^{(۸)} = \frac{(-۱)^{۸+۱}۸!}{x^{۸+۱}} = -\frac{۸!}{x^۹}\Big|_{x=۱} = -۸!$$

۲۴۰. ❸

$$y = \frac{۲x}{x^۲-۱} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۱} \Rightarrow \begin{cases} A = ۱ \\ B = ۱ \end{cases} \Rightarrow y = \frac{۱}{x-۱} + \frac{۱}{x+۱}$$

$$y^{(1)} = \frac{-۱}{(x-۱)^۲} - \frac{۱}{(x+۱)^۲} \Rightarrow y^{(۲)} = \frac{۲}{(x-۱)^۳} + \frac{۲}{(x+۱)^۳} \Rightarrow \ldots y^{(n)} = \frac{(-۱)^n n!}{(x-۱)^{n+۱}} + \frac{(-۱)^n n!}{(x+۱)^{n+۱}}$$

$$\Rightarrow y^{(۸)}\Big|_{x=۰} = \frac{(-۱)^۸ ۸!}{(-۱)^۹} + \frac{(-۱)^۸ ۸!}{(۱)^۹} = -۸! + ۸! = ۰$$

۲۴۱. ❸

$$y = (۲-x)^۲ + (۳-x)^۲ + (۴-x)^۲$$

$$y' = ۲(-۱)(۲-x) + ۲(-۱)(۳-x) + ۲(-۱)(۴-x) = ۶x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow y=۲$$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
		Min	

در نقطه $x=۳$ دارای مینیمی برابر ۲ می‌باشد.

۲۴۲. ❶

$$y = x\text{Ln}\sqrt{x} \Rightarrow y' = \text{Ln}\sqrt{x} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot x = \text{Ln}\sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \xlongequal{D_y:\ x>0} y'' > 0$$ تقعر رو به بالاست پس همواره محدب

۲۴۳. ❷

$$\sin\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2-1}{y+1} \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2-1}{y+1} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - \frac{2x(y+1)}{(y+1)^2}}{-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x^2-1}{(y+1)^2}} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\ y=1}} = -\frac{\cos 0 - \frac{2(0)(1+1)}{(1+1)^2}}{-0\,(\cos 0) - \frac{1}{4}} = 4$$

هـ- پاسخ‌های آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت

۲۴۴. ❷ c یک عدد ثابت می‌باشد بنابراین: $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u) = c\frac{du}{dx}$

۲۴۵. ❹ $f'(x) = 0$ ممکن است نقطه اکسترمم باشد وقتی $f''(x) > 0$ باشد تقعر در آن نقطه روبه بالاست. بنابراین نقطه مذکور نقطه Min تابع است که در گزینه‌ها نمی‌باشد.

۲۴۶. ❷

$$y = f(x)$$

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow dy = 5x^4dx$$

۲۴۷. ❹ در صورتیکه $f(x,y) = 0$ باشد در اینصورت خواهیم داشت: $f'_x\,dx + f'_y\,dy = 0$

۲۴۸. ❸ در صورتیکه در رابطه $y = \left(\frac{Q}{2}\right)ch + \left(\frac{D}{Q}\right)s$ متغیر مستقل را Q و متغیر وابسته را y در نظر بگیریم، داریم:

$$y'_Q = \frac{1}{2}ch - \frac{1}{Q^2}Ds$$

۲۴۹. ❶

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

۲۵۰. ❹

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = u' + v'$$

۲۵۱. ❸

$$y = f(x) \xlongequal{\text{دیفرانسیل}} dy = f'(x)\,dx$$

$$y = x^9 + 2x \Rightarrow dy = (x^9 + 2x)'dx \Rightarrow dy = (9x^8 + 2)\,dx$$

❹.۲۵۲

$y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۵$

$y' = ۳x^{۲} - ۶x \Rightarrow y'' = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$

با توجه به اینکه علامت مشتق دوم در نقطه x=۱ تغییر علامت داده است پس طول نقطه عطف می‌باشد.

❶.۲۵۳ $y = xLnx \Rightarrow y' = Lnx + \frac{۱}{x}x \Rightarrow y' = Lnx + ۱ = Lnx + Lne = Lnex$

❶.۲۵۴ **راه حل اول -** $y = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{x^{۲}}{۲}} \Rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{x^{۲}}{۲}} = ۰ \Rightarrow x = ۰$ و $y = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{0} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}$

راه حل دوم - در توزیع نرمال میانگین، میانه و مد (ماکزیمم تابع چگالی) با هم برابرند تابع مفروض تابع توزیع نرمال استاندارد شده می‌باشد و در این تابع $\overline{x} = Med = Mod = ۰$ است پس :

$$y \Big|_{x=۰} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۰}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}$$

❸.۲۵۵ اگر فرض کنیم بعد از k سال، حقوق ماهیانه دو کارمند با هم برابر شود پس:

$$۳۰۰ + ۳۰k = ۴۰۰ + ۲۰k \Rightarrow ۱۰k = ۱۰۰ \Rightarrow k = ۱۰$$

❹.۲۵۶ $R = ax - bx^{۲} \Rightarrow \frac{dR}{dx} = R'_x = a - ۲bx$

❷.۲۵۷ $y = x^x \Rightarrow Lny = Lnx^x \Rightarrow Lny = xLnx$

با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری از تابع لگاریتم طبیعی داریم:

$$(Lny)' = (xLnx)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = (۱)\ Lnx + \frac{۱}{x}.\ x \Rightarrow y' = x^x\ (Lnx+۱)$$

❹.۲۵۸ $y = sinx$

$$y^{(۱)} = cosx = sin\ (x + \frac{\pi}{۲})$$

یعنی مشتق سینوس همان سینوس است. با این تفاوت که $\frac{\pi}{۲}$ برقوس آن افزوده می‌شود به همین ترتیب :

$$y^{(۲)} = cos\ (x + \frac{\pi}{۲}) = sin\ (x + ۲\ \frac{\pi}{۲})$$

$$y^{(۳)} = sin\ (x + ۳\ \frac{\pi}{۲})$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = sin\ (x + n\ \frac{\pi}{۲})$$

❸.۲۵۹ $y = a^{tanx} \Rightarrow y' = (tanx)'\ a^{tanx}\ Lna \Rightarrow y' = (۱ + tan^{۲}x)\ a^{tanx}\ Lna$

❹.۲۶۰ **مشتق راست** $f'_+(۰) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{|x| - |۰|}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{x} = ۱$

مشتق چپ $f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{|x| - |۰|}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x}{x} = -۱$

چون $f'_+(۰) \neq f'_-(۰)$ است پس تابع در نقطه x=۰ فاقد مشتق است.

۲۴۲. ❶
$$y = x\mathrm{Ln}\sqrt{x} \Rightarrow y' = \mathrm{Ln}\sqrt{x} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot x = \mathrm{Ln}\sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} \xlongequal{D_y:\ x>0} y'' > 0$$ همواره محدب
تقعر رو به بالاست پس

۲۴۳. ❷
$$\sin\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2-1}{y+1} \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2-1}{y+1} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - \frac{2x(y+1)}{(y+1)^2}}{-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x^2-1}{(y+1)^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\frac{\cos 0 - \frac{2(0)(1+1)}{(1+1)^2}}{-0\,(\cos 0) - \frac{1}{4}} = 4$$

هـ-پاسخ‌های آزمون کارشناسی ارشد دانشگاه آزاد اسلامی رشته مدیریت

۲۴۴. ❷ c یک عدد ثابت می‌باشد بنابراین:
$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u) = c\frac{du}{dx}$$

۲۴۵. ❹ $f'(x) = 0$ ممکن است نقطه اکسترمم باشد وقتی $f''(x) > 0$ باشد تقعر در آن نقطه روبه بالاست. بنابراین نقطه مذکور نقطه Min تابع است که در گزینه‌ها نمی‌باشد.

۲۴۶. ❷

$$y = f(x)$$
$$dy = f'(x)dx \Rightarrow dy = 5x^4dx$$

۲۴۷. ❹ در صورتیکه $f(x,y) = 0$ باشد در اینصورت خواهیم داشت:
$$f'_x\,dx + f'_y\,dy = 0$$

۲۴۸. ❸ در صورتیکه در رابطه $y = (\frac{Q}{2})\,ch + (\frac{D}{Q})\,s$ متغیر مستقل را Q و متغیر وابسته را y در نظر بگیریم، داریم:

۲۴۹. ❶
$$y'_Q = \frac{1}{2}\,ch - \frac{1}{Q^2}\,Ds$$

۲۵۰. ❹
$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

۲۵۱. ❸
$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = u' + v'$$

$$y = f(x) \xlongequal{\text{دیفرانسیل}} dy = f'(x)\,dx$$

$$y = x^9 + 2x \Rightarrow dy = (x^9 + 2x)'dx \Rightarrow dy = (9x^8 + 2)\,dx$$