

به نام خدا

تعریف مدل سازی ریاضی

مدل سازی ریاضی عبارت است از بیان ریاضی رفتار فیزیکی و شیمیایی تغییرات و تحولات انجام یافته در یک یا چند سامانه مرتبط با یکدیگر. مدل سازی ریاضی شامل سه مرحله اساسی فرمول بندی مسئله، حل معادله های حاصل و تحلیل نتایج می باشد.

کاربرد مدل سازی ریاضی

- ❖ در تحقیق و توسعه^۱، برای تعیین سینتیک واکنش ها و پارامترهای آن با استفاده از یک واحد آزمایشگاهی یا واحد پیشتاز^۲، بررسی اثر شرایط عملیاتی، تعیین شرایط بهینه فرایند^۳ و نیز به منظور افزایش مقیاس^۴ از مدل های ریاضی استفاده می شود.
- ❖ در طراحی^۵، به منظور تعیین اندازه و آرایش فرایند^۶، بررسی اثر بخش های مختلف فرایندی بر یکدیگر، تعیین استراتژی کنترل فرایند، شبیه سازی فرایند در هنگام راه اندازی، هنگام توقف و به طور کلی شبیه سازی در شرایط گذرا از مدل سازی ریاضی استفاده می شود.
- ❖ در عملیات واحد^۷، به منظور عیب یابی و رفع معضلات کنترل فرایند، کاهش گلوگاه ها، بهینه کردن شرایط عملیاتی و آموزش های راه اندازی و عملیاتی از مدل های ریاضی استفاده می شود.

روش های مدل سازی

به طور کلی شیوه های مختلفی در مدل سازی وجود دارند که مهم ترین آن ها عبارتند از:

الف) مدل سازی تجربی^۸ و ب) مدل سازی نظری^۹

در مدل سازی تجربی با انجام آزمایش های متعدد، متغیرهای مختلف اندازه گیری می شوند. سپس با رسم متغیرها، رابطه ای میان آن ها به دست می آید و پارامترهای مدل تعیین می گردند. در این نوع مدل سازی دید تئوری نسبت به نوع معادله و ارتباط متغیرها با یکدیگر وجود ندارد و یک رابطه تجربی که صرفاً از نتایج آزمایشگاهی به دست آمده است، بیانگر مدل می باشد.

¹ Research and development

² Pilot plant

³ Optimization

⁴ Scale up

⁵ Design

⁶ Process arrangement

⁷ Unit operation

⁸ Experimental modeling

⁹ Theoretical modeling

در برخی از مدل‌سازی‌های تجربی، رابطه بین متغیرها از یک تئوری به دست آمده است، ولی پارامترهای مدل با انجام آزمایش‌ها به دست می‌آیند. این نوع مدل‌سازی را مدل‌سازی نیمه‌تجربی می‌گویند.

در مدل‌سازی نظری یا مدل‌سازی ریاضی با استفاده از قوانین اساسی و قوانین ویژه، مسئله فرمول‌بندی می‌شود و معادله ریاضی حاکم بر متغیرهای سامانه به دست می‌آید، سپس با حل این معادله‌ها رابطه بین متغیرها حاصل می‌شود.

اهداف مدل‌سازی ریاضی

- ❖ پیش‌بینی رفتار فرایند بر اساس تغییر در ورودی‌ها یا تغییر در شرایط عملیاتی
- ❖ تعیین اندازه و مشخصات فرایند جهت طراحی
- ❖ تعیین یا اصلاح مقادیر عددی پارامترهای مدل با تطبیق نتایج حاصل از مدل و آزمایش
- ❖ تعیین وابستگی و اثر متقابل پارامترها و متغیرهای مدل

مراحل مدل‌سازی ریاضی

اصول مدل‌سازی شامل مراحل سه‌گانه فرمول‌بندی مسئله، حل معادله‌ها و تحلیل نتایج می‌باشد که در ادامه این مراحل شرح داده می‌شود:

(۱) اساس فرمول‌بندی عبارت است از به کارگیری قوانین عمومی شیمیایی و فیزیکی از جمله قانون بقای جرم، قانون بقای انرژی و قانون بقای اندازه حرکت. لازم به ذکر است که قوانین عمومی در ابتدا برای یک سامانه بسته بیان شده‌اند ولی در مدل‌سازی ریاضی لازم است که از این قوانین در حجم کنترل استفاده شود. بنابراین ابتدا باید قوانین عمومی از سامانه بسته به حجم کنترل تعمیم داده شوند.

در فرمول‌بندی یک مدل باید نکات زیر مورد توجه قرار گیرد:

- ❖ فرض‌های مدل: اعمال فرض‌ها برای جلوگیری از پیچیده شدن معادله‌ها و اتلاف وقت است. انجام فرضیات باید به گونه‌ای باشد که تضادی با شرایط فیزیکی و شیمیایی مسئله نداشته باشد.
- ❖ نوع فرمول‌بندی: با توجه به شرایط، پیچیدگی و فرض‌های مدل معمولاً یکی از فرمول‌بندی‌های زیر برای رسیدن به جواب واقعی انتخاب می‌گردد:

الف) فرمول‌بندی کلی یا توده‌ای^{۱۰}، ب) فرمول‌بندی دیفرانسیلی^{۱۱} و ج) فرمول‌بندی انتگرالی^{۱۲}

- ❖ سازگاری ریاضی مدل: باید تعداد متغیرهای مجهول با تعداد معادلات تعیین شده برابر باشند تا درجه آزادی سامانه برابر با صفر باشد.

¹⁰ Lump formulation

¹¹ Differential formulation

¹² Integral formulation

❖ بدون بعد کردن معادله‌ها: برای اطمینان از هماهنگی در واحد کمیت‌ها، نیز برای مرتب کردن معادله‌ها و در نهایت امکان یافتن دیدی مناسب نسبت به جواب‌ها، بهتر است که معادلات بی‌بعد شوند.

۲) حل معادله‌های مدل: با توجه پیچیدگی‌های معادلات می‌توان از روش‌های مختلفی برای حل مسائل استفاده نمود:

❖ روش‌های تحلیلی: برای حل معادله‌های جبری یا دیفرانسیلی از روش تحلیلی بدون نیاز به کامپیوتر استفاده می‌شود. این روش از روش‌های حل دقیق معادله‌ها محسوب می‌شود و جز خطاهایی که با اعمال فرض‌های ساده‌کننده در مرحله فرمول‌بندی وارد شده است، خطای دیگری در جواب‌ها وارد نمی‌شود. چنانچه معادله یا معادله‌ها پیچیده باشند، ممکن است نتوان جواب تحلیلی ارائه داد.

❖ روش‌های عددی: حل معادله‌ها از روش عددی را با کمک برنامه‌نویسی‌ها کامپیوتر می‌توان انجام داد. این روش‌ها از نوع روش‌های حل تقریبی محسوب می‌شوند و علاوه بر خطای اعمال‌شده در بخش فرض‌های مدل، خطای روش عددی و خطای کامپیوتر نیز بر نتایج تاثیر می‌گذارد.

❖ روش‌های ترسیمی: در این روش تابع‌های مدل بر حسب متغیرهای مستقل مربوطه به صورت منحنی‌هایی ترسیم شده و نتایج حاصل به کمک این منحنی‌هایی به دست می‌آیند. به عنوان مثال می‌توان به منحنی‌های Panchon-Savarit در مبحث تقطیر محلول‌های دو جزئی ایده‌آل اشاره کرد.

۳) تحلیل نتایج: این مرحله شامل بررسی صحت نتایج، تفسیر نتایج و بررسی اعتبار مدل است.

❖ بررسی صحت نتایج: در این قسمت لازم هست پاسخ حدی سامانه تعیین گردد. یعنی وقتی زمان یا مکان به سمت حد نهایی خود میل می‌کند، رفتار مدل تعیین گردد و از نظر فیزیکی صحت آن مشخص شود. از سوی دیگر باید در روش عددی، پایداری و همگرایی روش ارزیابی شود. به عنوان مثال در برخی از روش‌های عددی چنانچه با اعمال تغییر کوچکی در پارامترهای مدل، تغییرات بزرگی در جواب‌های مدل ملاحظه شود، این امر نشان‌دهنده ناپایداری روش عددی است که مطلوب نمی‌باشد.

❖ تفسیر نتایج: در این مرحله رسم نتایج، بررسی رفتار توابع حاصل، تعیین حساسیت جواب‌ها نسبت به پارامترهای مدل و نسبت به شرایط ورودی و عملیاتی و مقایسه آن با فیزیک حاکم بر مسئله انجام می‌شود.

❖ بررسی اعتبار مدل: برای بررسی اعتبار مدل، نتایج حاصل از مدل با نتایج تجربی مقایسه شده و میزان خطای حاصل ارزیابی می‌شود. همچنین می‌توان نتایج مدل حاضر را با نتایج مدل‌های دیگر مورد مقایسه و ارزیابی قرار داد.

مراحل فرمول‌بندی یک مسئله

الف) جمع‌آوری اطلاعات

ب) تعیین متغیرها و پارامترهای مدل: در یک مدل‌سازی ابتدا باید متغیرهای وابسته (مانند دما، غلظت و ...) و متغیرهای مستقل (مانند زمان، مکان و ...) انتخاب شوند. افزایش تعداد متغیرهای وابسته در یک مدل، سبب افزایش تعداد معادله‌های آن می‌شود. در صورتی که افزایش متغیرهای مستقل سبب پیچیده شدن نوع معادله از دیفرانسیلی به معادله جزئی می‌گردد. پارامترهای سامانه مقادیری هستند، که می‌توانند در یک شرایط ثابت باشند و با تغییر شرایط ممکن است تغییر کنند، مانند خواص فیزیکی یا شیمیایی سیال. ثابت‌های یک مدل آن‌هایی هستند که همواره ثابت بوده و تابعیتی نداشته باشند، مانند ابعاد و اندازه سامانه مورد مطالعه.

پ) فرض‌های مدل: در مدل‌سازی انجام فرضیات ساده‌کننده که با فیزیک مسئله سازگاری داشته باشند، لازم می‌باشد. در این قسمت تعیین شرایط اولیه و شرایط مرزی برای حل اختصاصی معادله‌های مدل ضروری است.

ت) تعیین نوع سامانه مورد مطالعه:

(۱) سامانه منفرد^{۱۳}: سامانه‌ای که ورودی و خروجی جرم و انرژی ندارد.

(۲) سامانه بسته^{۱۴}: سامانه‌ای که ورودی و خروجی جرم ندارد.

(۳) حجم کنترل^{۱۵}: سامانه‌ای که ورودی و یا خروجی جرم دارد. چنانچه ورودی و خروجی به حجم کنترل قطع شود، تبدیل به سامانه بسته می‌شود.

(۴) جزء حجم^{۱۶}: بخش کوچکی از حجم کنترل است که ورودی و خروجی جرم دارد.

ث) با توجه به فرض‌های مدل، نوع فرمول‌بندی انتخاب می‌شود. اگر فرض بر این باشد که کمیت مورد مطالعه به صورت توده‌ای یا کلی تغییر کند یعنی تابعیت مکانی نداشته باشد، در این صورت نوع فرمول‌بندی به صورت توده‌ای یا کلی انتخاب شده و سامانه مورد مطالعه حجم کنترل در نظر گرفته می‌شود. چنانچه کمیت مورد مطالعه تابعی از مکان باشد، در این صورت نوع فرمول‌بندی را دیفرانسیلی انتخاب کرده و سامانه مورد مطالعه جز حجم در نظر گرفته می‌شود. اگر در هنگام نوشتن قانون‌های عمومی بر روی جز حجم از هر عبارت به صورت انتگرالی استفاده شود، فرمول‌بندی انتگرالی نتیجه می‌شود.

¹³ Isolated system

¹⁴ Closed System

¹⁵ Control volume

¹⁶ Element

ج) فرمول بندی قوانین عمومی^{۱۷}: در این مرحله عملاً فرمول بندی آغاز می شود. قوانین عمومی عبارتند از:

(۱) قانون بقای جرم که منجر به معادله های پیوستگی می شود.

(۲) قانون بقای انرژی یا قانون اول ترمودینامیک که منجر به معادله انرژی می شود.

(۳) قانون بقای اندازه حرکت یا قانون دوم نیوتن که منجر به معادله حرکت می شود.

لازم به ذکر است که قوانین عمومی همگی در سامانه بسته بیان شده اند و لازم است برای مدل سازی ریاضی به حجم کنترل تعمیم داده شوند که در جای خود توضیح داده می شود.

چ) کاربرد قوانین ویژه^{۱۸}: در برخی موارد پس از فرمول بندی قوانین عمومی لازم است از قوانین خاصی نیز استفاده شود. این امر کمک می کند تعداد مجهول ها کاهش یابد.

(۱) قانون فیک^{۱۹} در نفوذ جرم، وابستگی شار انتقال جرم جزئی به گرادیان غلظت:

$$J_i = -D_{iM} \frac{dC_i}{dx}$$

(۲) قانون فوریه^{۲۰} در هدایت گرمایی، وابستگی شار انتقال حرارت هدایتی به گرادیان دما:

$$q_x = -K \frac{dT}{dx}$$

(۳) قانون ویسکوزیته نیوتن^{۲۱} در نفوذ مومنتوم، وابستگی تنش به گرادیان سرعت:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{du_x}{dy}$$

(۴) قانون نیوتن در انتقال حرارت جابجایی، وابستگی شار انتقال حرارت جابجایی به اختلاف دما:

$$q = h\Delta T$$

(۵) قانون گازها^{۲۲}، وابستگی فشار، دما و چگالی گاز

$$P = \frac{\rho}{M} ZRT$$

¹⁷ General laws

¹⁸ Particular laws

¹⁹ Fick's law

²⁰ Fourier's law

²¹ Newton viscosity law

²² Gas law

۶) قانون استفان بولتزمن^{۲۳} در تشعشع حرارتی، وابستگی شار انتقال حرارت تشعشعی به تفاضل توان چهارم دماها

$$q = \sigma \Delta T^4$$

با استفاده از قوانین عمومی و قوانین ویژه، معادله یا معادله‌هایی به دست می‌آید که معمولاً دیفرانسیلی می‌باشد که با مرتب کردن، بررسی سازگاری معادله‌ها و بدون بعد کردن آن‌ها، معادله‌هایی حاکم بر مدل به دست می‌آیند.

ح) مرتب کردن معادله‌ها: در معادله حاصل اگر کمیت مورد مطالعه تابع زمان و مکان نباشد، معادله جبری و اگر فقط تابع زمان یا تابع یک بعدی مکان باشد، معادله‌های دیفرانسیل معمولی (ODE) حاصل می‌شود. چنانچه کمیت مورد مطالعه تابع بیش از یک متغیر باشد، معادله‌های دیفرانسیل جزئی (PDE) حاصل می‌شود که نحوه حل آن‌ها چه به صورت تحلیلی و چه به صورت عددی روش خاص خود را دارد.

معادله دیفرانسیلی که از فرمول‌بندی توده‌ای حاصل می‌شوند از نوع مسائل شرط اولیه^{۲۴} بوده و تابعیت زمانی دارند. معادله‌هایی که از فرمول‌بندی دیفرانسیلی حاصل می‌شوند دارای تابعیت مکانی بوده و در صورت وجود عبارت نفوذ، از نوع مسائل شرط مرزی^{۲۵} می‌باشند.

²³ Stephan Boltzmann law

²⁴ Initial value problem

²⁵ Boundary value problem

فرمول بندی کلی یا توده‌ای

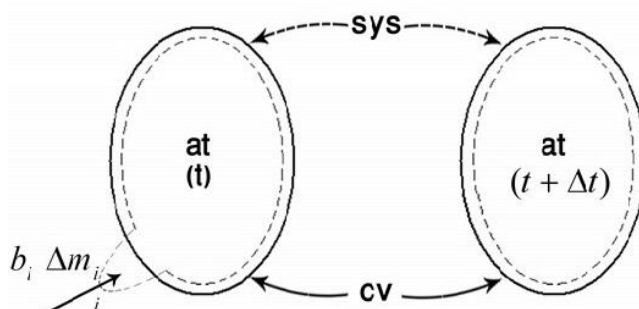
با بیان قضیه تبدیل رینولدز، فرمولی به دست می‌آید که به کمک آن انتقال قوانین عمومی از سامانه به حجم کنترل میسر می‌شود. در این قضیه کمیت مورد مطالعه کمیت کلی B و مقدار مخصوص آن b نامیده می‌شود، یعنی:

$$b = \frac{B}{m}$$

با توجه به فرمول بندی توده‌ای و یکنواخت بودن کمیت در آن مورد مطالعه B فقط تابع زمان در نظر گرفته می‌شود. به جدول زیر توجه کنید:

b	B	کمیت
1	m	جرم
v	V	حجم
e	E	انرژی کل
$\vec{u}$	$m\vec{u}$	اندازه حرکت
h	H	آنتالپی
u	U	انرژی داخلی

شکل زیر حجم کنترلی را نشان می‌دهد که در آن تحولی در حال انجام می‌باشد و حالت‌های ابتدایی و انتهایی آن مشخص شده است. انبساط یا انقباض حجم کنترل امکان‌پذیر است، همچنین حجم کنترل می‌تواند ساکن یا متحرک باشد. در این تحول Δm_i مقدار جرمی است که در ناحیه i وارد حجم کنترل می‌شود. برای نشان دادن رابطه حجم کنترل یا سامانه بسته، لازم است مرزهای سامانه به گونه‌ای مشخص شوند که ورودی و خروجی جرم نداشته باشند. بنابراین مطابق شکل زیر در حالت اولیه به دلیل ورود جرم Δm_i مرز سامانه و مرز حجم کنترل بر هم منطبق نیست، بلکه مرز سامانه علاوه بر حجم کنترل شامل حجم ورودی نیز می‌باشد. در حالت نهایی که خروجی وجود ندارد، سامانه و حجم کنترل بر هم منطبق هستند:



با توجه به شکل بالا، B_1 مقدار اولیه کمیت B در سامانه، B_2 مقدار نهایی کمیت B در سامانه، B' مقدار اولیه کمیت B در حجم کنترل و B'' مقدار نهایی کمیت B در حجم کنترل است.

تغییر کمیت B در مدت زمان Δt :

$$(\Delta B)_{sys} = B_2 - B_1$$

ارتباط B در سامانه با حجم کنترل:

$$B_1 = B' + b_1 \Delta m_1$$

$$B_2 = B''$$

$$\rightarrow (\Delta B)_{sys} = (B'' - B') - b_1 \Delta m_1 = (\Delta B)_{c.v} - b_1 \Delta m_1$$

در صورتی که چند ورودی داشته باشیم:

$$(\Delta B)_{sys} = (\Delta B)_{c.v} - \sum_{i=1}^N b_i \Delta m_i$$

با تقسیم رابطه بالا بر مدت زمانی (Δt) که این تحول رخ داده است و میل دادن Δt به سمت صفر و در نظر گرفتن خروجی‌ها نرخ کمیت B به دست می‌آید:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{sys} = \left(\frac{dB}{dt}\right)_{c.v} - \sum_{i=1}^N b_i w_i + \sum_{e=1}^M b_e w_e$$

در این رابطه M تعداد مسیر خروجی می‌باشد. w_i و w_e همچنین جرم ورودی و خروجی به حجم کنترل است. این فرمول، تبدیل رینولدز در فرمول توده‌ای می‌باشد.

(۱) فرمول بندی قانون بقای جرم

طبق قانون بقای جرم، جرم کلی در سامانه همواره ثابت است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys} = 0$$

برای انتقال این قانون از سامانه به حجم کنترل از فرمول تبدیل رینولدز استفاده می‌گردد. در این فرمول ابتدا باید کمیت‌های B و b مشخص گردد:

$$B = m, b = 1$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{c.v} = \sum_{i=1}^N w_i - \sum_{e=1}^M w_e, w_i = \rho_i v_i, w_e = \rho_e v_e$$

$$\rightarrow \left(\frac{d\rho V}{dt}\right)_{c.v} = \sum_{i=1}^N \rho_i v_i - \sum_{e=1}^M \rho_e v_e$$

رابطه بالا رابطه پیوستگی در حجم کنترل است. در روابط بالا V حجم و ρ دانسیته حجم کنترل، v_i و v_e شدت جریان‌های حجمی ورودی و خروجی و ρ_i و ρ_e دانسیته ورودی و خروجی می‌باشند. در یک فرمول‌بندی توده‌ای فرض بر این است که دانسیته جریان خروجی با دانسیته حجم کنترل برابر است. همچنین در یک سیال تراکم‌ناپذیر می‌توان دانسیته را ثابت فرض کرد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N v_i - \sum_{e=1}^M v_e$$

(۲) فرمول‌بندی جزء مولی

برای فرمول‌بندی یک جزء از توده کل، قانون کلی وجود ندارد. اگر غلظت ماده مورد نظر در یک واکنش و یا در یک پدیده انتقال جرم تغییر کند، باید تغییرات آن در سامانه بر اساس قانون‌های دیگر (قانون‌های ویژه) جایگزین گردد. برای فرمول‌بندی جزء ماده A در یک محلول، به جای کمیت B در فرمول تبدیل رینولدز، می‌توان جزء جرمی یا جزء مولی را قرار داد:

$$B = n_A, b = \frac{n_A}{n_A} = 1, w = C_A v$$

$$\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{sys} = \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{c.v} - \sum_{i=1}^N C_{Ai} v_i + \sum_{e=1}^M C_{Ae} v_e$$

برای استفاده از معادله بالا باید در مورد $\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{c.v}$ تصمیم‌گیری گردد. حالت‌های مختلف زیر را می‌توان در نظر گرفت:

الف) جریان ساده^{۲۶}:

برای حالتی که ماده A مصرف یا تولید نمی‌شود:

$$\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{sys} = 0, n_A = C_A V \rightarrow \frac{d(C_A V)_{c.v}}{dt} = \sum_{i=1}^N C_{Ai} v_i - \sum_{e=1}^M C_{Ae} v_e$$

لازم به ذکر است که $C_A = C_{Ae}$ می‌باشد.

ب) جریان + واکنش^{۲۷}: در این حالت تولید یا مصرف ماده A در سامانه به کمک رابطه سرعت واکنش (R_A) محاسبه می‌شود. رابطه سرعت واکنش در یک سامانه بسته برای تولید ماده A به صورت زیر ارائه می‌شود:

²⁶ Simple flow

²⁷ Flow + Reaction

$$(R_A) = \frac{1}{V} \frac{dn_A}{dt}, \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{sys} = V (R_A)$$

البته باید دقت شود که R_A برای مصرف A ، مقدار منفی و برای تولید A ، مقداری مثبت خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d(C_A V)_{c.v}}{dt} = V(R_A) + \sum_{i=1}^N C_{Ai} v_i - \sum_{e=1}^M C_{Ae} v_e$$

ج) جریان + انتقال جرم^{۲۸}: در صورتی که در یک تحول غلظت ماده مورد نظر (A) در اثر انتقال جرم، مانند جذب یا دفع، تغییر کند باید تغییرات آن را در فرمول بندی غلظت در نظر گرفت. در فرایندهای انتقال جرم، از قانونهای ویژه انتقال جرم با اعمال ضریب انتقال جرم استفاده می شود.

$$\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{sys} = k_c S \Delta C_A$$

به طوری که k_c ضریب انتقال جرم، S سطح انتقال جرم و ΔC_A اختلاف غلظت یا نیروی محرکه انتقال جرم است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{sys} = \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{c.v} - \sum_{i=1}^N C_{Ai} v_i + \sum_{e=1}^M C_{Ae} v_e, \left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{sys} = k_c S \Delta C_A \rightarrow$$

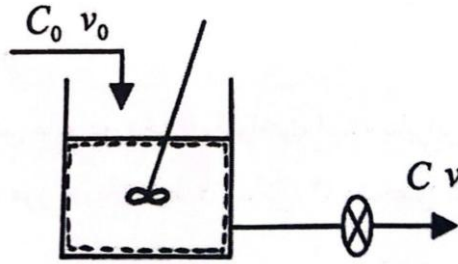
$$\left(\frac{dn_A}{dt}\right)_{c.v} = k_c S \Delta C_A + \sum_{i=1}^N C_{Ai} v_i - \sum_{e=1}^M C_{Ae} v_e$$

لازم به ذکر است که ΔC_A بر حسب جهت تغییر، می تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: مطابق شکل زیر در مخزنی تا نیمه آب خالص ریخته شده است. این مخزن مجهز به همزن است. در زمان اولیه محلول آب و نمک با غلظت C_0 و شدت جریان حجمی v_0 به آن وارد می شود. تغییرات غلظت نمک را در جریان خروجی به دست آورید. مسئله را در دو حالت زیر در نظر بگیرید:

الف) شدت جریان حجمی خروجی از مخزن v_0 باشد.

ب) تا پر شدن کامل مخزن جریان خروجی وجود ندارد ولی پس از پر شدن، شیر خروجی مخزن باز و محلول با شدت جریان حجمی v_0 از آن خارج می گردد.



پاسخ مثال: این نمونه یک مساله جریان ساده است، زیرا هیچ واکنش و انتقال جرمی وجود ندارد.

پاسخ قسمت الف: به طور کلی بهتر است مراحل زیر را در نظر بگیرید:

(۱) رسم شکل و نمایش مختصات

(۲) تشخیص متغیرهای وابسته و مستقل و تعیین پارامترهای و ثوابت:

C_0 ، v_0 و V (حجم مخزن) ثابت‌ها، غلظت محلول نمک در جریان خروجی (C) متغیر وابسته و زمان (t) متغیر مستقل می‌باشد.

(۳) فرضیات: واکنش اتفاق نمی‌افتد، به دلیل وجود همزن غلظت در کل مخزن یکنواخت است، سیال تراکم‌ناپذیر و دانسته ثابت است.

شرط اولیه: غلظت اولیه نمک در مخزن برابر با صفر است.

(۴) سامانه مورد بررسی: مایع درون مخزن به عنوان حجم کنترل در نظر گرفته می‌شود.

(۵) از آنجایی که تغییرات غلظت نمک مورد نظر می‌باشد، فرمول‌بندی برای جرم نمک نوشته می‌شود. با توجه به قضیه انتقال رینولدز:

$$\frac{d(CV)}{dt} = C_0 v - C v$$

چون V ثابت است، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} V \frac{dC}{dt} = v (C_0 - C) \\ t = 0 \rightarrow C = 0 \end{cases}$$

(۶) تعریف متغیرهای بدون بعد:

$$\bar{C} = \frac{C}{C_0}, \tau = \frac{tv}{V} \rightarrow \begin{cases} \frac{d\bar{C}}{d\tau} = (1 - \bar{C}) \\ \tau = 0 \rightarrow \bar{C} = 0 \end{cases}$$

(۷) حل معادله: به کمک جداسازی متغیرها خواهیم داشت:

$$\bar{C} = 1 - e^{-\tau}$$

۸) بررسی صحت مدل: با توجه به فیزیک مساله، پس از مدت زمان زیاد، انتظار می‌رود غلظت نمک در مخزن به غلظت ورودی نزدیک شود:

$$\tau \rightarrow \infty, \bar{C} \rightarrow 1$$

پاسخ قسمت ب: در این مرحله تا زمان پر شدن مخزن، حجم مایع متغیر است و پس از آن ثابت می‌ماند. به این ترتیب مساله به دو بخش تفکیک شده و هر بخش جداگانه فرمول‌بندی می‌شود.

مرحله اول:

در این مرحله جریان خروجی نداریم و در نتیجه v_e برابر با صفر است. بنابراین حجم مایع داخل مخزن نیز تابع زمان است. پس متغیرهای وابسته در این حالت V و C خواهند بود. بنابراین برای تعیین تغییرات حجم و غلظت دو معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

معادله پیوستگی برای نمک:

$$\frac{d(CV)}{dt} = C_0 v_0$$

معادله پیوستگی کلی برای سیال تراکم‌ناپذیر:

$$\frac{dV}{dt} = v_0$$

شرایط اولیه مسئله:

$$V(0) = \frac{V_t}{2}, C(0) = 0$$

V_t حجم کل مخزن است. بدون بعد کردن معادله‌ها با تغییر متغیرهای بدون بعد انجام می‌شود:

$$\bar{C} = \frac{C}{C_0}, \bar{V} = \frac{V}{V_t}, \tau = \frac{t v_0}{V_t}$$

با انجام دیفرانسیل جزئی، معادله پیوستگی نمک به صورت زیر می‌شود:

$$V \frac{dC}{dt} + C \frac{dV}{dt} = C_0 v_0$$

با بی‌بعد سازی، معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\bar{V} \frac{d\bar{C}}{d\tau} + \bar{C} \frac{d\bar{V}}{d\tau} = 1, \bar{C}(0) = 0$$

$$\frac{d\bar{V}}{d\tau} = 1, \bar{V}(0) = \frac{1}{2}$$

ابتدا معادله پیوستگی کلی را حل می‌کنیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\bar{V}(\tau) = \tau + \frac{1}{2}$$

سپس با استفاده از معادله پیوستگی برای نمک و با جایگذاری مقادیر $\bar{V}$ و $\frac{d\bar{V}}{d\tau}$ خواهیم داشت:

$$\bar{C}(\tau) = \frac{2\tau}{1+2\tau}$$

این مدل برای حل مسئله تا زمانی پر شدن مخزن، یعنی تا زمانی که $V = V_t$ یا $\bar{V} = 1$ شود، استفاده می‌گردد. حال لازم است زمان پر زدن مخزن محاسبه شود:

$$\bar{V}(\tau) = \tau + \frac{1}{2} \rightarrow \bar{V} = 1 \rightarrow \tau = \frac{1}{2}$$

همچنین در همین زمان می‌توان غلظت نمک در مخزن و خروجی را محاسبه نمود:

$$\tau = \frac{1}{2} \rightarrow \bar{C} = \frac{1}{2}$$

سپس مرحله دوم مسئله آغاز می‌شود و نتایج حاصل از مرحله اول به عنوان شرط اولیه در مرحله دوم به کار خواهند رفت. بنابراین معادله‌های بالا در مدت $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$ رفتار سامانه را نشان می‌دهد. ولی از زمان $\tau \geq \frac{1}{2}$ مدل غلظت نمک از مدل دیگری تبعیت می‌کند.

در این مرحله شدت جریان خروجی وجود دارد و حجم مایع درون مخزن نیز ثابت می‌ماند، یعنی

$$v = v_0, V = V_t = cte$$

متغیر وابسته فقط غلظت نمک خواهد بود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d\bar{C}}{d\tau} = (1 - \bar{C})$$

با شرط اولیه:

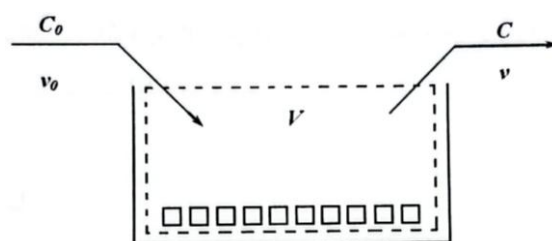
$$\tau = \frac{1}{2} \rightarrow \bar{C} = \frac{1}{2}$$

حل معادله با اعمال شرط اولیه فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{C} = 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}-\tau}$$

این معادله در فاصله $\frac{1}{2} \leq \tau < \infty$ قابل قبول است. پس از مدت زمان زیاد غلظت خروجی به غلظت ورودی نزدیک می‌شود.

مثال: تغییرات غلظت مونواکسید کربن در هوای شهر تهران را می‌توان با فرض‌های ساده‌ای مدل‌سازی کرد. مطابق شکل زیر شهر را مانند یک مخزن اختلاط کامل در نظر گرفته که حجم معینی دارد و دما و فشار هوا در آن ثابت است. فرض می‌شود روزانه تعداد اتومبیل رفت و آمد می‌کنند و با سرعت معینی گاز آگزوز تولید می‌کنند که این گاز دارای کسر معینی مونواکسید کربن می‌باشد. دبی جریان هوای ورودی و خروجی به شهر مقداری ثابت و یکسان است. غلظت مونواکسید کربن در هوای ورودی مقدار معلوم C_0 و غلظت اولیه آن در شهر C_i است. تابع غلظت مونواکسید کربن نسبت به زمان را به دست آورید. سپس تعیین کنید غلظت مونواکسید کربن پس از مدت طولانی به چه حدی می‌رسد؟



مشخصات مسئله: V حجم تقریبی شهر، n تعداد اتومبیل متحرک در روز، F_p نرخ مولی گاز تولید شده از آگزوز هر اتومبیل، y_0 کسر مولی مونواکسید کربن در گاز آگزوز اتومبیل، C_0 غلظت اولیه کربن مونواکسید در هوای ورودی شهر و C_i غلظت اولیه کربن مونواکسید در هوای شهر است.

فرض‌های مسئله: غلظت مونواکسید کربن در شهر یکنواخت است. دما و فشار ثابت است در نتیجه دانسیته هوا ثابت است. نرخ تولید گاز آگزوز و کسر مولی مونواکسید کربن در گاز آگزوز ثابت است. سرعت هوای ورودی و خروجی ثابت و یکسان است.

انتخاب سامانه مورد مطالعه: به دلیل فرض اختلاط کامل در هوای شهر، از حجم کنترل به عنوان سامانه مورد مطالعه استفاده می‌شود.

فرمول‌بندی قانون بقای جرم:

$$V \frac{dC}{dt} = v_0(C_0 - C) + ny_0F_p$$

$$t = 0, C = C_i$$

حل نهایی معادله:

$$\frac{dC}{dt} = \left(\frac{v_0}{V} C_0 + \frac{ny_0F_p}{V} \right) - \frac{v_0}{V} C$$

تعریف متغیرها:

$$a = \left(\frac{v_0}{V} C_0 + \frac{ny_0F_p}{V} \right), b = \frac{v_0}{V}$$

$$\frac{dC}{dt} = a - bC \rightarrow \frac{dC}{a - bC} = dt \rightarrow -\frac{1}{b} \ln(a - bC) = k + t \rightarrow \ln(a - bC) = k - bt$$

$$t = 0, C = C_i \rightarrow k = \ln(a - bC_i)$$

$$\frac{a - bC}{a - bC_i} = e^{-bt} \rightarrow a - bC = (a - bC_i)e^{-bt} \rightarrow C = \frac{a}{b} - \frac{(a - bC_i)e^{-bt}}{b}$$

پس از مدت طولانی:

$$t \rightarrow \infty, C = C_0 + \frac{ny_0 F_p}{v_0}$$

۳) فرمول‌بندی قانون بقای انرژی

بیان قانون بقای انرژی در سامانه بسته بر اساس نرخ انرژی به صورت زیر است:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}$$

در این حالت کمیتی که باید فرمول‌بندی شود انرژی هست. انرژی سامانه شامل شکل‌های مختلفی از انرژی درونی، جنبشی و پتانسیل است. بنابراین:

$$E = mu + \frac{1}{2} m v^2 + mgz$$

و انرژی مخصوص سامانه عبارتند از:

$$e = e_u + e_k + e_p$$

با استفاده از فرمول تبدیل رینولدز، کمیت B و b بر اساس انرژی جایگزین می‌شود. به طوری که:

$$B = E, b = e$$

و در نتیجه با در نظر گرفتن ورودی خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{c.v} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum_{i=1}^N e_i w_i$$

به طوری که $\dot{W}$ توان خروجی و $\dot{Q}$ نرخ حرارت دریافتی به وسیله سامانه است. $\dot{Q}$ با حرارت دریافتی از راه حجم کنترل برابر است. بنابراین:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{c.v}$$

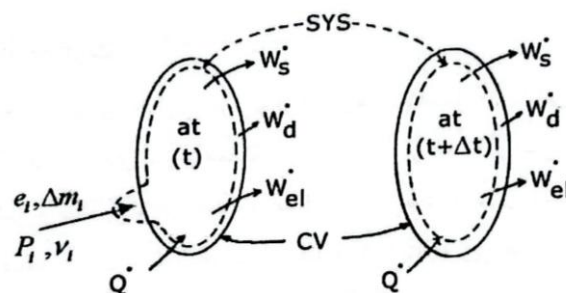
همچنین توان خروجی به صورت تفکیک‌شده معرفی می‌شود:

$$\dot{W} = \dot{W}_d + \dot{W}_s + \dot{W}_{el}$$

که به ترتیب عبارتند از توان‌های جابجایی، شفت و الکتریکی حاصل از سامانه که بر اساس روابط زیر به توان‌های حاصل از حجم کنترل مربوط می‌شوند:

$$\dot{W}_{el} = (\dot{W}_{el})_{c.v}, \dot{W}_s = (\dot{W}_s)_{c.v}, \dot{W}_d = (\dot{W}_d + \dot{W}_i)_{c.v}$$

در عبارت‌های بالا $(\dot{W}_{el})_{c.v}$ ، $(\dot{W}_s)_{c.v}$ ، $(\dot{W}_d)_{c.v}$ مربوط به توان‌های الکتریکی، شفت، جابجایی در حجم کنترل است و $(\dot{W}_i)_{c.v}$ توان مربوط به جریان جرم ورودی به حجم کنترل می‌باشد که در اثر جابجایی سیال در ورود به حجم کنترل انجام می‌شود. شکل زیر ارتباط سامانه و حجم کنترل را در قانون بقای انرژی نشان می‌دهد.



با توجه به شکل بالا، جریان ورودی، کار انقباضی روی حجم کنترل انجام می‌دهد، که مقدار آن حاصل ضرب فشار در حجم جریان ورودی هست:

$$(\dot{W}_i)_{c.v} = - \sum_{i=1}^N P_i v_i$$

در رابطه بالا P_i فشار سیال ورودی و v_i شدت جریان حجم ورودی است و علامت منفی به دلیل انجام کار روی حجم کنترل است:

$$\frac{d(E)_{c.v}}{dt} = \dot{Q}_{c.v} - (\dot{W}_d + \dot{W}_s + \dot{W}_{el})_{c.v} + \sum_{i=1}^N P_i v_i + \sum_{i=1}^N e_i w_i$$

در نتیجه بر اساس روابط زیر معادله کلی به دست می‌آید:

$$w_i = \rho_i v_i$$

$$(E)_{c.v} = (\rho V e)_{c.v}$$

$$e = e_u + e_k + e_p$$

$$e_i = e_{ui} + e_{ki} + e_{pi}$$

$$\dot{W}_{c.v} = (\dot{W}_d + \dot{W}_s + \dot{W}_{el})_{c.v}$$

$$\frac{d}{dt} [\rho V (e_u + e_k + e_p)]_{c.v} = \dot{Q}_{c.v} - \dot{W}_{c.v} + \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \left(\frac{P_i}{\rho_i} + e_{ui} + e_{ki} + e_{pi} \right)$$

اگر جریان خروجی وجود داشته باشد، به انتهای معادله بالا عبارت خروجی مانند ورودی، ولی با علامت مخالف اضافه می‌شود. همچنین با توجه به توده‌ای بودن مدل، خاصیت حجم کنترل، یعنی جرم حجمی و انرژی مخصوص با خاصیت جریان خروجی در هر لحظه برابر است. در معادله بالا می‌توان به جای عبارت مجموع انرژی درونی و انرژی فشاری، آنتالپی ($h = \frac{P}{\rho} + e_u$) را جایگزین کرد. با استفاده از فرضیات بالا می‌توان معادله حرارت و برنولی را به دست آورد.

الف) معادله حرارت: با صرف نظر از انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}(\rho V e_u)_{c.v} = \dot{Q}_{c.v} + \sum_{i=1}^N \rho_i v_i h_i - \sum_{e=1}^N \rho_e v_e h_e$$

عبارت آخر نرخ آنتالپی خروجی است. رابطه آنتالپی و انرژی درونی با دما به صورت زیر است:

$$dh = \bar{c}_p dT, de_u = \bar{c}_v dT$$

در رابطه بالا $\bar{c}_p$ و $\bar{c}_v$ به ترتیب گرمای ویژه در فشار ثابت و حجم ثابت هستند. با پذیرفتن کمی خطا روابط زیر حاصل می‌گردد:

$$h = \bar{c}_p T, e_u = \bar{c}_v T$$

در نتیجه معادله بالا به معادله زیر تبدیل می‌گردد:

$$\frac{d}{dt}(\rho V \bar{c}_v T)_{c.v} = \dot{Q}_{c.v} + \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \bar{c}_{pi} T_i - \sum_{e=1}^N \rho_e v_e \bar{c}_{pe} T_e$$

با توجه به توده‌ای بودن کمیت‌ها در هر لحظه خاصیت خروجی و داخلی از جمله دانسیته و دما برابرند. اگر سیال تراکم‌ناپذیر باشد، خواهیم داشت:

$$\bar{c}_{pi} = \bar{c}_{pe} = \bar{c}_v = \bar{c}, \rho_i = \rho_e = \rho$$

توجه: در صورتی که در حجم کنترل واکنشی رخ دهد، به دلیل تبادل حرارت ناشی از واکنش مقداری حرارت مبادله و سبب تغییر دمای حجم کنترل می‌شود. در نتیجه لازم است آنتالپی واکنش را در معادله حرارت دخالت داد. این حرارت در صورت گرمازا بودن واکنش به طرف دوم معادله اضافه و در صورت گرماگیر بودن از آن کم می‌شود. اگر ΔH_{RA} آنتالپی واکنش به ازای مصرف یک مول A باشد، چون برای واکنش گرمازا ΔH_{RA} منفی و برای واکنش گرماگیر مثبت است، بنابراین رابطه زیر باید به سمت راست معادله انرژی اضافه شود:

$$\dot{Q}_R = (-\Delta H_{RA})(-R_A V)$$

$-R_A$ سرعت مصرف ماده واکنش‌دهنده A است که به صورت یک تابع جبری از دما و غلظت مواد واکنش‌گر معرفی می‌شود. V نیز حجم مخزن واکنش (حجم کنترل) می‌باشد.

ب) معادله برنولی: برای جریان یک سیال درون لوله شرایط زیر حاکم است:

ورودی و خروجی جرم وجود دارد ولی تجمع جرمی وجود ندارد:

$$\rho_i v_i = \rho_e v_e$$

کار و گرما مبادله نمی‌شود:

$$\dot{Q}_{c.v} = 0, \dot{W}_{c.v} = 0$$

اصطکاک وجود ندارد، بنابراین تجمع انرژی وجود ندارد. در نتیجه دمای ورودی و خروجی یکسان است.
بنابراین:

$$\frac{dE}{dt} = 0, e_{ui} = e_{ue}$$

بنابراین معادله بالا به معادله زیر یعنی معادله برنولی تبدیل می‌شود:

$$\frac{P_i}{\rho_i} + \frac{V_i^2}{2} + z_i g = \frac{P_e}{\rho_e} + \frac{V_e^2}{2} + z_e g$$

مثال: مطابق شکل زیر مخزنی مجهز به همزن را در نظر بگیرید که دارای آب به حجم V و ورودی و خروجی یکسان است. دمای آب ورودی در ابتدا T_{i0} می‌باشد. آب این مخزن به وسیله یک گرم‌کن الکتریکی گرم می‌شود. حرارت ورودی به مخزن توسط یک کنترل‌گر با رابطه زیر تنظیم می‌شود به طوری که وقتی شرایط پایدار برقرار است، مخزن مقدار حرارت معین $\dot{q}_0$ را دریافت می‌کند و آب با دمای T_e خارج می‌شود.

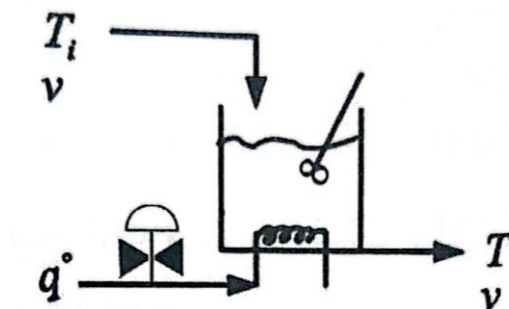
$$\dot{q} = k(T_c - T) + \dot{q}_0$$

K ثابت کنترل، T_c دمای تنظیم‌شده و T دمای آب مخزن است.

الف) چنانچه در دمای آب ورودی تغییری ایجاد شود، مدلی برای تغییرات دمای آب خروجی به دست آورید.

ب) در نهایت دمای آب خروجی به چه مقداری می‌رسد؟

پ) مقدار کل حرارت ورودی به مخزن را پس از مدت زمان معین t_f به دست آورید.



پاسخ قسمت الف:

(۱) رسم شکل و نمایش مشخصات

(۲) تعیین متغیرهای مستقل و وابسته، ثابت‌ها و پارامترها: دمای خروجی یا دمای آب مخزن متغیر وابسته‌ای است که با زمان و دمای ورودی تغییر می‌کند. نرخ حرارت ورودی در ابتدا ثابت است، ولی با تغییر دمای ورودی و در نتیجه تغییر دمای مخزن تغییر می‌کند. شدت جریان‌های ورودی و خروجی، حجم آب و پارامترهای فیزیکی ثابت هستند.

(۳) فرض‌ها: سیال تراکم‌ناپذیر است، بنابراین جرم حجمی و گرمای ویژه ثابت است. به علت وجود همزن در همه جای مخزن دمای آب یکنواخت و دمای خروجی و دمای مخزن در هر لحظه برابر است.

شرط اولیه: در زمان اولیه شرایط پایا و دمای آب ثابت و برابر با T_c و به عبارت دیگر برابر با T_{e0} است.

(۴) انتخاب سامانه مورد مطالعه: آب مخزن به عنوان حجم کنترل در نظر گرفته می‌شود و تغییرات انرژی حرارتی در آن فرمول‌بندی می‌شود.

(۵) فرمول‌بندی قوانین بقای جرم و انرژی

فرمول‌بندی جرم نشان می‌دهد که حجم مایع ثابت است، زیرا:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = \rho v$$

فرمول‌بندی انرژی حرارتی به شکل زیر انجام می‌شود:

مصرف - تولید + خروجی - ورودی = تجمع

$$\frac{d}{dt}(\rho V c T) = \rho v c T_i - \rho v c T + \dot{q}$$

(۶) معادله حرارت در شرایط پایا: در زمان اولیه که دمای آب ورودی ثابت و شرایط پایا است، عبارت تجمع برابر صفر است:

$$T_{e0} = T_{i0} + \frac{\dot{q}_0}{\rho v c}$$

(۷) در زمان $t \geq 0$ ، هنگامی که T_i تغییر می‌کند، از نظر حرارتی شرایط ناپایدار ایجاد می‌شود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}(\rho V c T) = \rho v c T_i - \rho v c T + k(T_c - T) + \dot{q}_0$$

$$\rightarrow \frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{v}{V} T_i + \frac{k T_c}{\rho V c} + \frac{\dot{q}_0}{\rho V c}}_a - \underbrace{\left(\frac{v}{V} + \frac{k}{\rho V c}\right)}_b T$$

برای سهولت پارامترهای ثابت a و b تعریف می‌گردد. لازم به ذکر است که T_i تابع زمان نیست و فقط به صورت یک متغیر تغییر کرده است:

$$\frac{dT}{dt} = a - bT$$

شرط اولیه:

$$t = 0 \rightarrow T = T_c$$

در نتیجه پس از حل معادله خواهیم داشت:

$$T = \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} - T_c\right)e^{-bt}$$

پاسخ قسمت ب:

$$t \rightarrow \infty, T \rightarrow \frac{a}{b}$$

با توجه به پارامتر a ، دمای نهایی تابع دمای آب ورودی است.

پاسخ قسمت پ:

$$Q = \int_0^{t_f} \dot{q} dt = \int_0^{t_f} [k(T_c - T) + \dot{q}_0] dt$$

۴) فرمول‌بندی قانون بقای اندازه حرکت:

قانون بقای اندازه حرکت (مومنتوم)، قانون دوم نیوتن است که بیانگر برابری تغییرات اندازه حرکت یک سامانه با جمع جبری نیروهای اعمال شده است:

$$\frac{d(m\vec{u})}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

در این قانون کمیتی که باید فرمول‌بندی شود، اندازه حرکت است که یک کمیت برداری است و در هنگام فرمول‌بندی علاوه بر مقدار باید جهت آن در نظر گرفته شود:

$$B = m\vec{u}, b = \vec{u}$$

با جایگذاری پارامترهای ذکر شده در فرمول تبدیل رینولدز خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d(m\vec{u})}{dt}\right]_{c.v} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i^N \vec{u}_i w_i$$

نیروی وارد بر یک سامانه شامل نیروهای وزنی^{۲۹}، اصطکاک^{۳۰} و فشاری^{۳۱} به صورت زیر است:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{B}_f + \sum_i^N \vec{P}_i A_i$$

از آنجا که سیال ورودی دارای فشار هیدرواستاتیک می‌باشد، بنابراین هنگام ورود به حجم کنترل نیروی فشاری وارد می‌کند. نیروی اصطکاک نیز در خلاف جهت حرکت اعمال می‌شوند، که در هنگام جایگذاری با علامت منفی در معادله به کار می‌رود. در نهایت خواهیم داشت:

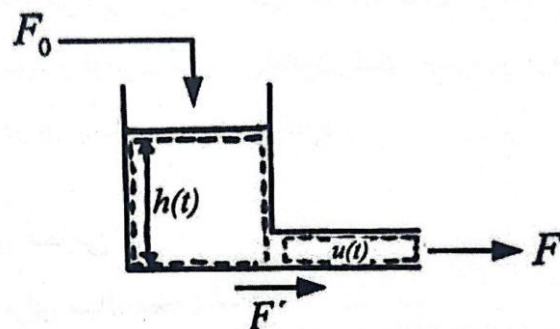
$$\frac{d(\rho V \vec{u})_{c.v}}{dt} = \rho V \vec{g} + \vec{B}_f + \sum_i^N \vec{P}_i A_i + \sum_i^N (\rho_i u_i A_i) \vec{u}_i$$

چنانچه جریان خروجی وجود داشته باشد، دو عبارت دیگر شامل نیروهای فشاری اعمال شده از جریان خروجی و نیروی وارده در اثر حرکت سیال به معادله بالا اضافه می‌شود. با توجه به اینکه این نیروها در خلاف جهت حرکت از محیط به حجم کنترل وارد می‌شوند، دارای علامت منفی هستند.

مثال: مطابق شکل زیر مخزنی را در نظر بگیرید که در آن آب جریان دارد. طول لوله خارج شده از مخزن، L ، سطح مقطع لوله A_p و سطح مقطع مخزن A_t است. شدت جریان حجمی سیال ورودی F_0 می‌باشد. در ابتدا ارتفاع سیال در مخزن H_0 و سرعت متوسط حرکت سیال u_0 است. نیروی اصطکاک ناشی از تماس سیال با لوله در جریان متلاطم، متناسب با مجذور سرعت حرکت و متناسب با طول لوله است. یعنی:

$$B_f = k_f L u^2$$

K_f ضریب اصطکاک و B_f نیروی اصطکاک است. با توجه به وجود نیروی اصطکاک در لوله، سرعت جریان سیال در لوله تغییر می‌کند که سبب تغییر ارتفاع سیال در مخزن می‌شود. معادله‌ای برای تغییرات ارتفاع سیال در مخزن و نیز سرعت خطی سیال در لوله نسبت به زمان به دست آورید.



پاسخ:

²⁹ Gravity force

³⁰ Body force

³¹ Pressure force

(۱) رسم شکل و مشخصات آن

(۲) متغیرهای مستقل و وابسته: شدت جریان (F) و به عبارت دیگر سرعت (u) حرکت سیال در لوله و نیز حجم (V) و به عبارت دیگر ارتفاع سیال (h) در مخزن متغیرهای وابسته هستند. زمان متغیر مستقل است.

(۳) فرض‌های مدل: سیال تراکم‌ناپذیر و در نتیجه دانسیته آن ثابت است. دما ثابت است. جرم ورودی به لوله و جرم خروجی از آن برابر است و در لوله تجمع وجود ندارد.

شرایط اولیه:

$$t = 0 \rightarrow u = u_0, h = H_0$$

رابطه H_0 و u_0 از معادله برنولی در شرایط پایا به دست می‌آید.

(۴) انتخاب سامانه مورد مطالعه: بررسی ارتفاع سیال در مخزن، حجم کنترل سیال درون مخزن فرض می‌شود و فرمول‌بندی قانون بقای جرم در آن انجام می‌گیرد. برای بررسی سرعت سیال در لوله، باید آب درون لوله به عنوان حجم کنترل در نظر گرفته شود و فرمول‌بندی‌های قانون بقای جرم و مومنتوم روی آن اعمال شود.

(۵) فرمول‌بندی قانون‌های عمومی

الف-فرمول‌بندی جرم سیال برای سیال مخزن:

$$\frac{dV}{dt} = F_0 - F$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_0}{A_t} - u \frac{A_p}{A_t}$$

ب-فرمول‌بندی جرم برای سیال داخل لوله:

چون سیال درون لوله از نظر جرمی در حالت پایا است، جرم سیال درون لوله ثابت باقی می‌ماند:

$$\rho_e u_e A_e = \rho_i u_i A_i$$

با توجه به تراکم‌ناپذیر بودن سیال و عدم تغییر قطر لوله:

$$A_i = A_e = A, \rho_i = \rho_e = \rho$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$u_i = u_e = u$$

ب-فرمول‌بندی مومنتوم برای سیال داخل لوله:

نیروهای اعمال‌شده بر سیال داخل لوله در جهت حرکت سیال تصویر می‌شود و با توجه به فرمول‌بندی توده‌ای برای قانون بقای اندازه حرکت، نیروی وزن در جهت افقی برابر با صفر است ($g_x = 0$).

نرخ جرمی ورودی و خروجی و نیز سرعت سیال ورودی و خروجی در لوله با هم برابر است:

$$(\rho u^2 A)_i = (\rho u^2 A)_e$$

رابطه فشار ورودی و خروجی از لوله به صورت زیر می باشد:

$$P_i = \rho gh + P_0, P_e = P_0$$

که P_0 فشار محیط است. در نتیجه معادله توده‌ای قانون بقای اندازه حرکت برای سیال درون لوله به صورت زیر است:

$$\rho L A_p \frac{du}{dt} = A_p (P_i - P_e) - B_f$$

با جایگذاری رابطه اصطکاک و مرتب کردن عبارت‌های معادله دیفرانسیلی سرعت در لوله حاصل می‌شود:

$$\frac{du}{dt} = \frac{gh}{L} - \frac{k_f}{\rho A_p} u^2$$

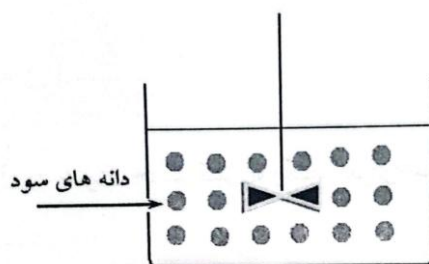
با حل دو معادله دیفرانسیلی مربوط به ارتفاع و سرعت، تغییرات ارتفاع مخزن و سرعت در لوله به دست می‌آید.

مثال: مطابق شکل زیر به یک مخزن که ابتدا حاوی آب خالص است، دانه‌های سود کروی شکل به شعاع متوسط R ریخته و هم‌زده می‌شوند. دانه‌ها به تدریج حل شده و گرما تولید می‌کنند و به مرور اندازه آن‌ها کاهش می‌یابد. چنانچه ضریب انتقال جرم سود مقدار ثابت K_c باشد، موارد زیر را تعیین کنید:

الف) مدلی برای تغییرات غلظت محلول بر حسب زمان.

ب) مدلی برای تغییرات دمای محلول بر حسب زمان.

ج) تغییرات شعاع متوسط دانه‌ها بر حسب زمان.



فرض‌های مسئله: دانسیته محلول ثابت فرض می‌شود. ضریب انتقال جرم ثابت است. شعاع دانه یکنواخت است. غلظت سود در محلول، تابع زمان است. دمای محلول با زمان تغییر می‌کند ولی دمای سود و محلول در هر زمان در تعادل گرمایی هستند. حجم محلول ثابت است. غلظت اشباع سود در محلول ثابت است. آنتالپی انحلال سود مقداری ثابت است.

سامانه مورد مطالعه: با توجه به اینکه متغیرهای وابسته در دو فاز سیال و جامد می‌باشند، فرمول‌بندی بر اساس دو فاز صورت می‌گیرد: تغییرات دما و غلظت برای فاز سیال و تغییرات شعاع ذرات برای فاز جامد.

الف) غلظت سود در محلول:

$$\frac{d(CV)}{dt} = N_A S$$

N_A شار انتقال جرم از دانه به محلول است که مطابق زیر می‌باشد:

$$N_A = K_c (C^* - C)$$

S سطح کل دانه‌های سود، V حجم محلول، C غلظت سود در محلول و C^* غلظت اشباع سود در محلول است که خود تابع دما می‌باشد. K_c نیز ضریب انتقال جرم سود در محلول با بعد طول بر زمان است. بنابراین با توجه به ثابت ماندن حجم محلول می‌توان نوشت:

$$\frac{dC}{dt} = K_c \frac{S}{V} (C^* - C)$$

با شرط اولیه:

$$t = 0 \rightarrow C = 0$$

ب) دمای محلول سود: افزایش دمای محلول به دلیل انحلال گرمای سود است. اگر آنتالپی انحلال را مقدار ثابت ΔH_s در نظر بگیریم، بر اساس گرمای تولیدی سبب تجمع انرژی در محلول می‌شود و معادله انرژی حرارتی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\rho c^{sol} V \frac{dT}{dt} = (-\Delta H_s) (N_A S)$$

$$\frac{dT}{dt} = (-\Delta H_s) K_c (C^* - C) \frac{S}{\rho c^{sol} V}$$

به طوری که c^{sol} گرمای ویژه محلول و ρ دانسیته آن است. همچنین شرط اولیه به صورت زیر است:

$$t = 0 \rightarrow T = T_\infty$$

ج) حجم دانه سود: در این حالت حجم کنترل، دانه سود می‌باشد و موازنه جرمی جامد به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d(\rho_s V_s)}{dt} = -K_c M_s (C^* - C) S$$

M_s جرم مولی سود می‌باشد. بر حسب شعاع دانه‌های سود می‌توان نوشت:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{K_c M_s}{\rho_s} (C^* - C)$$

با شرط اولیه:

$$t = 0 \rightarrow r = R$$

اگر در معادلات به جای S مقدار $4\pi r^2$ را قرار دهیم، سه معادله بر حسب سه متغیر وابسته ذکر شده یعنی دما و غلظت سیال و شعاع دانه‌ها حاصل می‌شود که باید به صورت همزمان حل شود.

با فرض ثابت بودن غلظت اشباع سود و آنتالپی انحلال، می‌توان مسئله را به صورت تحلیلی حل نمود. برای این منظور می‌توان با تقسیم معادله غلظت محلول بر شعاع دانه‌ها، تغییرات غلظت بر حسب شعاع دانه‌ها را به دست آورد. سپس با جایگذاری $C(r)$ در معادله غلظت و حل معادله‌ی حاصل می‌توان تغییرات r با زمان را محاسبه نمود و به این ترتیب غلظت بر حساب زمان نیز به دست می‌آید. در نهایت می‌توان تغییرات دمای محلول با زمان را نیز به دست آورد.

فرمول‌بندی دیفرانسیلی

جزء حجم^{۳۲}

در فرمول‌بندی دیفرانسیلی، سامانه مورد مطالعه جزء حجم می‌باشد. جزء حجم مانند حجم کنترل، ورودی و خروجی جرم دارد. شکل، ابعاد و نوع جزء حجم نیز، بر حسب سامانه مختصات انتخاب شده متفاوت است. معمولاً در مختصات کارتزین جزء حجم را به شکل مکعب مستطیل، در مختصات استوانه‌ای به شکل قطعه‌ی کوچک از استوانه و در مختصات کروی، به شکل قاچ کوچکی از کره در نظر می‌گیرند. مانند تابع f که اگر وابسته به ابعاد مکانی و زمان باشد پس از مدل‌سازی در سامانه‌های مختلف تابعیت آن به صورت زیر حاصل می‌شود:

در مختصات کارتزین

$$f = f(x, y, z, t)$$

در مختصات استوانه‌ای

$$f = f(r, \theta, z, t)$$

در مختصات کروی

$$f = f(r, \theta, \varphi, t)$$

در هنگام فرمول‌بندی دیفرانسیلی، ابتدا باید مشخص کرد که کمیت مورد بررسی تابع چه متغیرهای مستقلی است و در میان ابعاد مکانی سامانه کدام بعد نسبت به سایر متغیرهای مکانی اهمیت بیشتری دارد. این مسئله در انتخاب شکل و نوع جزء حجم به ما کمک می‌کند. به عنوان مثال اگر تابع مدل وابسته به سه بعد مکانی

باشد جزء حجم انتخاب شده نیز باید دارای سه بعد کوچک باشد تا پس از مدل سازی، کمیت مورد مطالعه به صورت تابعی از سه متغیر مکانی به دست آید. ولی اگر تابع مدل وابسته به یک بعد مکان باشد بهتر است که جزء حجم به شکلی انتخاب شود که فقط در همان بعد دارای اندازه کوچک بوده ولی در بقیه ابعاد به اندازه سامانه اصلی باشد.

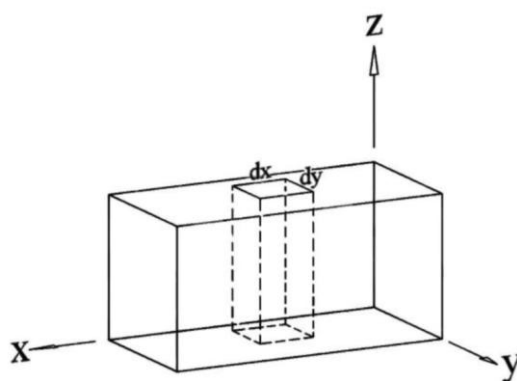
جزء حجم در مختصات کارتزین

در شکل های زیر جزء حجم های مکعب مستطیل با اندازه های مختلف مشخص شده اند.

جزء حجم مکعب مستطیل با سه بعد کوچک به اندازه ی

(dx, dy, l)

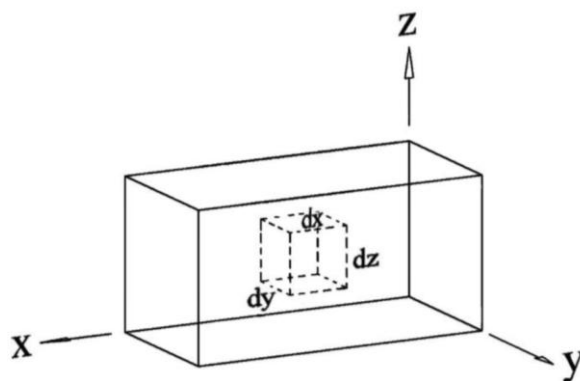
تابع بر حسب x و y



جزء حجم مکعب مستطیل با سه بعد کوچک به اندازه ی

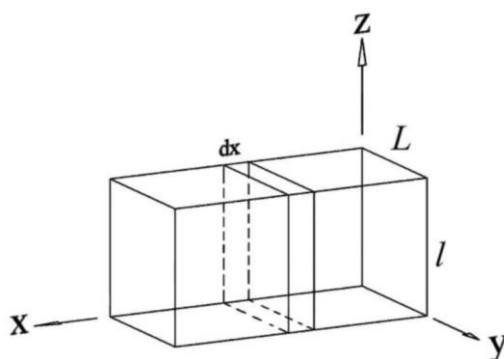
(dx, dy, dz)

تابع بر حسب x, y و z



جزء حجم مکعب مستطیل با سه بعد کوچک به اندازه ی (dx, L, l)

تابع بر حسب x



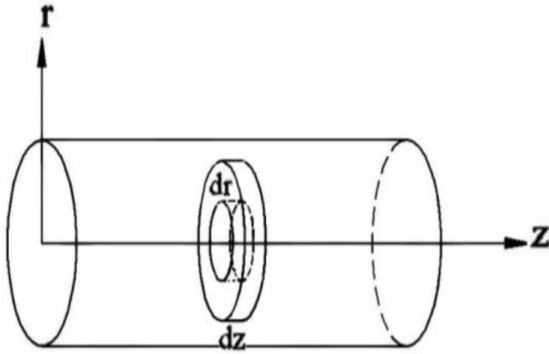
جزء حجم در مختصات استوانه‌ای

در شکل‌های زیر جزء حجم در مختصات استوانه‌ای با شکل‌های مختلف مشخص شده‌اند.

جزء حجم استوانه به شکل حلقه کوچک استوانه‌ای

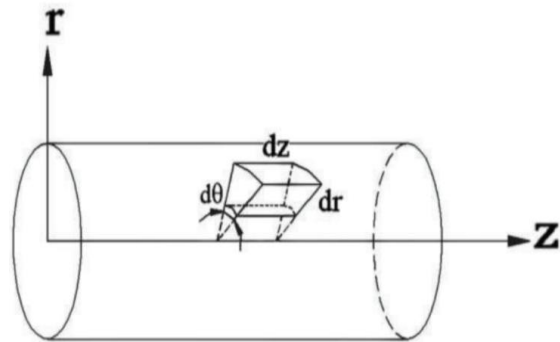
$$(dr, 2\pi r, dz)$$

تابع بر حسب r و z



جزء حجم استوانه به ابعاد $(dr, rd\theta, dz)$

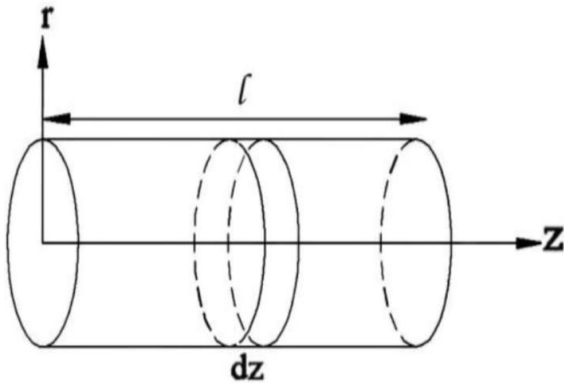
تابع بر حسب r ، θ و z



جزء حجم به شکل یک استوانه با ارتفاع کوچک به ابعاد

$$(R, 2\pi R, dz)$$

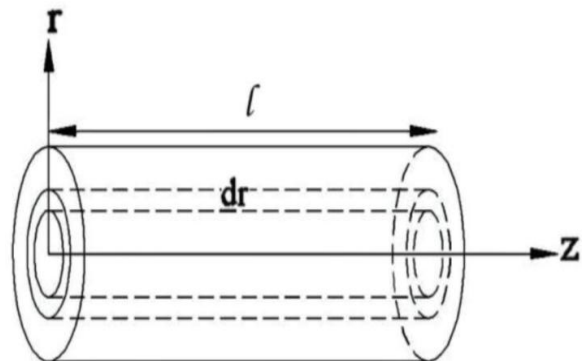
تابع بر حسب z



جزء حجم به شکل حلقه کوچک استوانه‌ای به ابعاد

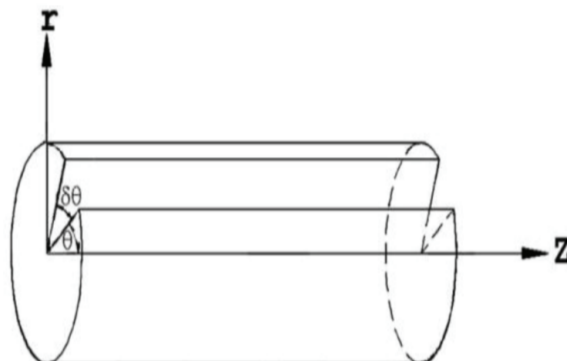
$$(dr, 2\pi r, l)$$

تابع بر حسب r



جزء حجم به شکل قاچ کوچکی از استوانه به ابعاد $(R, Rd\theta, l)$

تابع بر حسب θ



جزء حجم در مختصات کروی

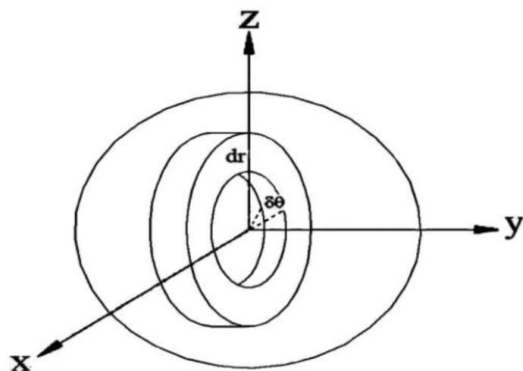
مختصات کروی شامل سه جهت فضایی می‌باشد، یک بعد در جهت شعاع (در بازه صفر تا R) و دو بعد زاویه شامل زاویه قطبی (در بازه صفر تا π) و زاویه افقی (در بازه صفر تا 2π) می‌باشد. المان سه بعدی در این نوع مختصات در شکل زیر نمایش داده شده‌است.

جزء حجم به صورت حلقه توخالی از کره به ابعاد

$$ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \sin(\theta) d\varphi = (2\pi r \sin\theta, rd\theta, dr)$$

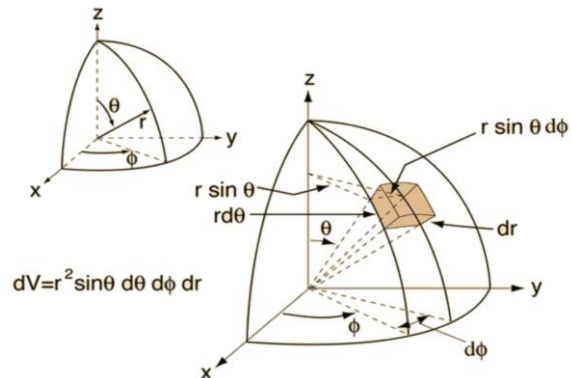
$(2\pi r \sin\theta)$

تابع بر حسب r و θ



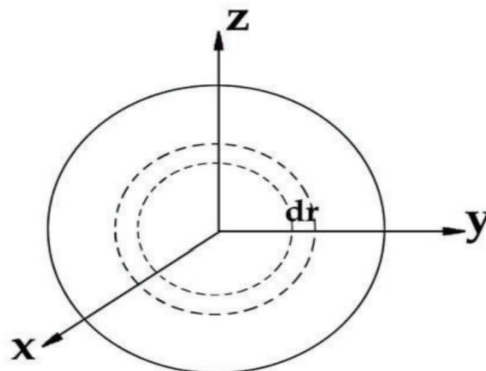
جزء حجم به شکل قاچی از کره $(r \sin\theta d\varphi, rd\theta, dr)$

تابع بر حسب r ، θ و φ



جزء حجم کروی به شکل کره توخالی به ضخامت dr با سطح جانبی و با سطح جانبی

$$dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2$$



در مرحله فرمول‌بندی، ابتدا با توجه به فرض‌های مسئله، باید شکل و نوع جزء حجم به درستی انتخاب شود، سپس قانون‌های عمومی بر روی آن نوشته شود و با کمک قوانین ویژه فرمول‌بندی کامل می‌شود.

فرمول‌بندی قانون‌های عمومی

با توجه به اینکه یک جزء حجم شش وجه دارد، باید ورودی‌ها و خروجی‌ها از این وجه‌ها مورد توجه قرار گیرند. در جزء حجمی که داخل سامانه اصلی مشخص می‌شود و هیچ مرز مشترکی با آن ندارد، همواره سه وجه در مقابل ورود کمیت و سه وجه دیگر در مقابل خروج کمیت قرار دارند. کمیت اصلی مورد مطالعه باید

به صورت نرخ فلاکس (شار) در نقطه‌ی ورود یا خروج از جزء حجم در نظر گرفته شود که پس از ضرب کردن در سطح مقطع جزء حجم مقدار نرخ کمیت انتقالی مشخص می‌شود. از آنجا که فرمول‌بندی کلی برای کمیت‌های مختلف جرم، انرژی و مومنتوم مشابه هستند، از این تشابه در مدل‌سازی کمک گرفته می‌شود. شار کمیت عبورکننده از جز حجم بر حسب جریان به دو عبارت تفکیک می‌شود که یکی در اثر جریان کلی^{۳۳} و دیگری اثر نفوذ^{۳۴} می‌باشد. در جدول زیر برای انواع کمیت‌های مورد بحث، هر یک از عبارات معرفی شده‌اند.

نوع کمیت	شار کمیت		
	جریان کلی (Bulk flow)	جریان نفوذی (Diffusion)	نوع نفوذ
جرم کلی (m)	ρu	-	-
جزء مولی (n_i)	$c_i u$	J_i	نفوذ مولکولی
انرژی حرارتی (H)	$\rho u h$	q	هدایت حرارتی
مومنتوم ($\vec{mu}$)	$(\rho u) \vec{u}$	τ	تنش

کمیت‌های نفوذ در جدول بالا، توابعی هستند که لازم است با استفاده از قوانین ویژه جایگزین شوند. برای مثال شار نفوذ جز جرمی (J_i) با قانون فیک^{۳۵} و شار نفوذ حرارت (q) با قانون فوریه^{۳۶} و شار نفوذ مومنتوم (τ) با قانون ویسکوزیته نیوتونی (برای سیال نیوتونی) جایگزین می‌شود.

قانون بقای جرم

با انجام موازنه جرم بر روی جزء حجم فرمول‌بندی دیفرانسیلی قانون بقای جرم، به نام معادلات پیوستگی حاصل می‌شود که تغییرات چگالی را نسبت به متغیرهای مکان و زمان تعیین می‌کند.

(۱) مختصات کارتزین

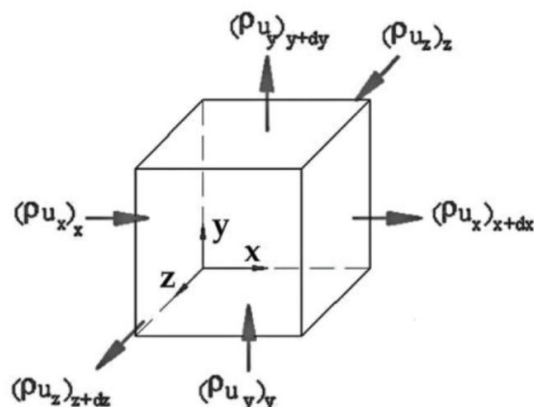
شکل زیر جزء حجم مکعب مستطیل به ابعاد dx ، dy و dz می‌باشد که نرخ فلاکس ورودی و خروجی جرم عمود بر سطح مشخص شده است. همواره جهت ورودی و خروجی در جزء حجم بر اساس جهت x ، y و z مشخص می‌شود.

³³ Bulk flow

³⁴ Diffusion

³⁵ Fick's law

³⁶ Fourier's law



پس از انتقال قانون بقای جرم از سامانه بسته به حجم کنترل (که در اینجا جز حجم می باشد)، رابطه زیر به دست می آید:

تجمع جرم = نرخ جرم خروجی - نرخ جرم ورودی

در فرمول بندی جرم، تولید، مصرف و نفوذ مطرح نمی باشد، زیرا جرم کلی سامانه همواره ثابت است. عبارت سمت چپ در سه جهت فضایی مختلف مطابق روابط زیر نوشته می شود:

(نرخ جرم خروجی - نرخ جرم ورودی)

$$(\rho u_x A)_x - (\rho u_x A)_{x+dx} \quad \text{در جهت } x$$

$$(\rho u_y S)_y - (\rho u_y S)_{y+dy} \quad \text{در جهت } y$$

$$(\rho u_z W)_z - (\rho u_z W)_{z+dz} \quad \text{در جهت } z$$

A سطح مقطع جز حجم عمود بر سطح x و S سطح مقطع جز حجم عمود بر جهت y و W سطح مقطع جز حجم عمود بر جهت z هستند. برای تعیین تابع y_{x+dx} می توان از بسط سری تیلور در حول نقطه x کمک گرفت، مطابق رابطه زیر:

$$y_{x+dx} = y_x + \frac{\partial y_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 y_x}{\partial x^2} \frac{(dx)^2}{2!} + \dots$$

به علت کوچکی dx می توان از عبارت آخر به بعد صرف نظر کرد. بنابراین در فرمول بندی قوانین عمومی می توان نرخ کمیت خروجی از جز حجم را مطابق معادله بالا جایگزین کرد. در این صورت، نرخ جرم خروجی از جزء حجم در مکان $(x+dx)$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$(\rho u A)_{x+dx} = (\rho u A)_x + \frac{\partial (\rho u A)_x}{\partial x} dx$$

معادله بالا را می‌توان برای هر سه جهت فضایی x ، y و z اعمال کرد که پس از تفاضل نرخ جرم خروجی از ورودی به نتایج زیر به دست می‌آید:

(نرخ جرم خروجی - نرخ جرم ورودی)

$$-\frac{\partial(\rho u_x A)_x}{\partial x} dx \quad \text{در جهت } x$$

$$-\frac{\partial(\rho u_y S)_y}{\partial y} dy \quad \text{در جهت } y$$

$$-\frac{\partial(\rho u_z W)_z}{\partial z} dz \quad \text{در جهت } z$$

در فرمول‌های بالا، $A_x = dydz$ ، $S_y = dxdz$ و $W_z = dxdy$ می‌باشد. عبارت تجمع جرم در جز حجم نیز نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho dxdydz)$$

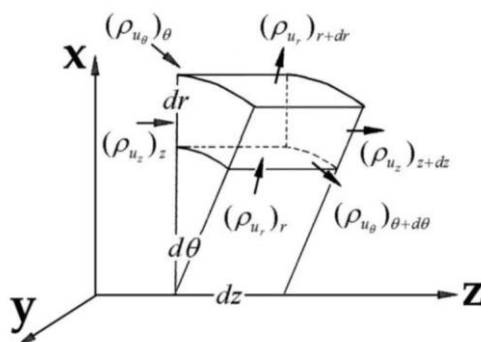
بنابراین با جای‌گذاری هر یک از عبارت‌های معادله در موازنه جرم و با حذف dx و dy و dz رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

معادله بالا، معادله پیوستگی در مختصات کارتزین است.

(۲) مختصات استوانه‌ای:

شکل زیر جزء حجم در مختصات استوانه‌ای به ابعاد است که شار ورودی و خروجی جرم از سطوح آن مشخص شده است.



برای نوشتن قانون بقای جرم، تفاضل نرخ جرم‌های ورودی و خروجی، در جزء حجم استوانه‌ای نوشته می‌شود:

(نرخ جرم خروجی - نرخ جرم ورودی)

$$(\rho u_r A)_r - (\rho u_r A)_{r+dr} \quad \text{در جهت } r$$

$$(\rho u_z S)_z - (\rho u_z S)_{z+dz} \quad \text{در جهت } z$$

$$(\rho u_\theta W)_\theta - (\rho u_\theta W)_{\theta+d\theta} \quad \text{در جهت } \theta$$

مطابق شکل بالا، سطح مقطع A (سطح عمود بر جهت r) در ناحیه r با ناحیه $r+dr$ یکسان نیست، در صورتی که سطح مقطع S نسبت به z و سطح مقطع W نسبت به θ ثابت است. به طوری که:

$$A_r = r d\theta dz \quad S_z = S_{z+dz} = r d\theta dr \quad W_\theta = W_{\theta+d\theta} = dz dr$$

$$A_{r+dr} = (r + dr) d\theta dz$$

بنابراین باید توجه داشت در مختصات استوانه‌ای بر خلاف مختصات کارتزین، A تابع r است. با کمک بسط سری تیلور نتیجه تفاضل خروجی‌ها از ورودی‌ها در هر جهت به دست می‌آید:

(نرخ جرم خروجی - نرخ جرم ورودی)

$$-\frac{\partial(\rho u_r A)_r}{\partial r} dr \quad \text{در جهت } r$$

$$-\frac{\partial(\rho u_z S)_z}{\partial z} dz \quad \text{در جهت } z$$

$$-\frac{\partial(\rho u_\theta W)_\theta}{\partial \theta} d\theta \quad \text{در جهت } \theta$$

تجمع جرم در داخل جزء حجم نیز به صورت زیر جایگزین می‌شود.

$$\frac{\partial(m)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho r d\theta dz dr)}{\partial t}$$

پس از جایگزین کردن کلیه عبارت‌های بالا در موازنه جرم خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial(\rho u_r r d\theta dz)}{\partial r} dr - \frac{\partial(\rho u_z r d\theta dr)}{\partial z} dz - \frac{\partial(\rho u_\theta r dr dz)}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial(\rho r d\theta dz dr)}{\partial t}$$

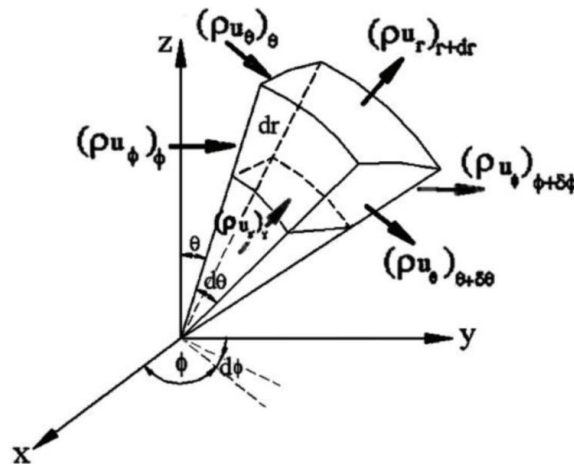
با حذف $d\theta dr dz$ از طرفین معادله و تقسیم بر r معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

معادله بالا، معادله پیوستگی در مختصات استوانه‌ای می‌باشد.

(۳) مختصات کروی:

شکل زیر جز حجم کروی به ابعاد dr ، $r d\theta$ ، $r \sin\theta d\phi$ می‌باشد که نرخ فلاکس‌های ورودی و خروجی جرم بر روی سطوح آن مشخص شده است. چنانچه موازنه جرم در جزء حجم نوشته شود، معادله پیوستگی در مختصات کروی به دست می‌آید.



(نرخ جرم خروجی - نرخ جرم ورودی)

$$(\rho u_r A)_r - (\rho u_r A)_{r+dr}$$

در جهت r

$$(\rho u_\theta S)_\theta - (\rho u_\theta S)_{\theta+d\theta}$$

در جهت θ

$$(\rho u_\phi W)_\phi - (\rho u_\phi W)_{\phi+d\phi}$$

در جهت ϕ

طبق شکل سطح‌های عمود بر مسیر جریان یعنی A_r ، S_θ و W_ϕ از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$A_r = r^2 \sin \theta d\phi d\theta, \quad S_\theta = r \sin \theta d\phi dr, \quad W_\phi = r d\theta dr$$

با استفاده از بسط سری تیلور برای کمیت‌های خروجی از جزء حجم، نتیجه تفاضل خروجی‌ها از ورودی‌ها چنین خواهد شد:

(نرخ جرم خروجی - نرخ جرم ورودی)

$$-\frac{\partial(\rho u_r A)_r}{\partial r} dr \quad \text{در جهت } r$$

$$-\frac{\partial(\rho u_\theta S)_\theta}{\partial \theta} d\theta \quad \text{در جهت } \theta$$

$$-\frac{\partial(\rho u_\phi W)_\phi}{\partial \phi} d\phi \quad \text{در جهت } \phi$$

عبارت تجمع جرم در داخل جزء حجم نیز به صورت به دست می‌آید:

$$\frac{\partial(m)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr)$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله موازنه جرم، معادله زیر به دست می‌آید:

$$-\frac{\partial(\rho u_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} d\phi d\theta dr - \frac{\partial(\rho u_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} d\theta dr d\phi - \frac{\partial(\rho u_\phi r)}{\partial \phi} d\phi d\theta dr = \frac{\partial(\rho r^2) \sin \theta}{\partial t} d\phi d\theta dr$$

پس از تقسیم معادله بالا بر عبارت $r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$ معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho u_\phi)}{\partial \phi} = 0$$

معادله بالا، معادله پیوستگی در مختصات کروی است. معادله پیوستگی در سامانه سه‌گانه دستگاه مختصات در جدول زیر جمع‌آوری شده است:

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$	مختصات کارتزین
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$	مختصات استوانه‌ای
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho u_\phi)}{\partial \phi} = 0$	مختصات کروی

در معادله‌های پیوستگی تابع‌های چگالی (ρ) و سرعت حرکت در جهت‌های سه‌گانه (u_x ، u_y و u_z) مجهول هستند. بنابراین لازم است از معادله‌های حرکت نیز استفاده شود که با حل همزمان معادله پیوستگی و معادله‌های حرکت توابع مجهول به دست می‌آیند. از طرفی با توجه به شرایط مساله می‌توان در برخی موارد

از فرض‌های ساده‌کننده استفاده کرده و معادله‌های پیچیده حاصل را ساده‌تر کرد. به عنوان مثال اگر سامانه مورد مطالعه یک سیال تراکم‌ناپذیر باشد، با توجه به ثابت بودن چگالی سیال معادله پیوستگی ساده‌تر می‌شود.

$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$	مختصات کارتزین
$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0$	مختصات استوانه‌ای
$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(u_\varphi)}{\partial \varphi} = 0$	مختصات کروی

چنانچه در یک سیال تراکم‌ناپذیر سرعت حرکت سیال فقط در یک بعد (x) اهمیت داشته باشد و در نتیجه ابعاد دیگر ناچیز باشد، معادله پیوستگی بسیار ساده می‌شود، به طوری که در مختصات کارتزین نتیجه می‌شود:

$$u_x \neq 0, u_y \cong 0, u_z \cong 0$$

بنابراین از معادله کارتزین برای دانسیته ثابت نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_x = \text{ثابت}$$

مثال: در لوله‌ای به شکل زیر سیالی در حرکت است. چگالی سیال در زمان اولیه و در ورودی لوله ρ_0 می‌باشد که با حرکت سیال در طول لوله و به مرور زمان تغییر می‌کند. در نهایت سیال با چگالی ρ_f خارج می‌شود. تغییرات چگالی در طول لوله از معادله تجربی زیر تبعیت می‌کند:

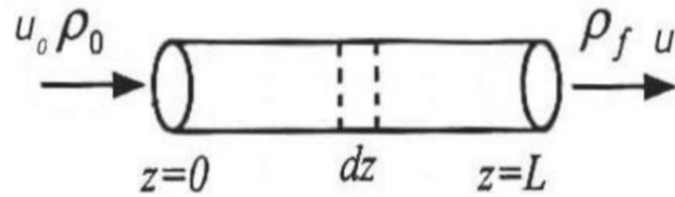
$$\rho(z, t) = A + (B + C \exp(-kt))z, \quad k = \frac{u_0}{L}$$

(u_0 سرعت ورودی سیال و اولیه سرعت و L طول لوله است.)

الف) ثابت‌های A ، B و C را با توجه شرایط مرزی و اولیه به دست آورید.

ب) به کمک معادله پیوستگی معادله سرعت سیال را به صورت تابعی از طول لوله و زمان به دست آورید.

پ) نیم رخ سرعت اولیه $u(z, 0)$ ، نیم رخ سرعت پایا $u(z, \infty)$ و همچنین مقدار نهایی سرعت سیال $u(L, \infty)$ را تعیین کنید.



پاسخ الف:

شرایط اولیه و مرزی عبارت است از:

$$\rho(0, t) = \rho_0$$

$$\rho(z, 0) = \rho_0$$

$$\rho(L, \infty) = \rho_f$$

به کمک شرایط بالا و جایگذاری در معادله چگالی، ثابت‌های A ، B و C به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A = \rho_0$$

$$B = -C = \frac{\rho_f - \rho_0}{L}$$

بنابراین معادله چگالی به دست می‌آید:

$$\rho(z, t) = B(1 - \exp(-kt))z + \rho_0$$

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_f - \rho_0} = [1 - \exp(-kt)] \frac{z}{L}$$

پاسخ ب:

فرض‌های مساله برای نوشتن معادله پیوستگی عبارتند از:

سیال تراکم‌ناپذیر و چگالی آن متغیر است. چگالی سیال فقط تابع طول است و با شعاع لوله تغییر نمی‌کند. از حرکت سیال در جهت‌های شعاعی و چرخشی، صرف نظر می‌شود. u_r و u_θ صفر است. با توجه به فرضیات موجود، سرعت سیال تابعی از طول لوله و زمان خواهد بود و جزء حجمی به ابعاد $(R, 2\pi, dz)$ انتخاب می‌شود. در این صورت معادله پیوستگی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

که شرط مرزی برای سرعت سیال به صورت زیر است:

$$\{u(0,t) = u_0$$

با جایگذاری معادله به دست آمده برای چگالی در معادله بالا (پیوستگی)، معادله سرعت حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$kBz \exp(-kt) + [B(1 - \exp(-kt))z + \rho_0] \frac{\partial u}{\partial z} + Bu(1 - \exp(-kt)) = 0$$

$$\frac{du}{dz} + \underbrace{\left[\frac{B(1 - \exp(-kt))}{B(1 - \exp(-kt))z + \rho_0} \right]}_{P(z)} u = \underbrace{\frac{-kB \exp(-kt)z}{B(1 - \exp(-kt))z + \rho_0}}_{Q(z)}$$

معادله بالا، یک معادله دیفرانسیلی مرتبه اول است که به روش فاکتور انتگرال حل می‌شود. در این معادله فاکتور انتگرال به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$If = e^{\int p(z) dz} = B(1 - \exp(-kt))z + \rho_0$$

$$[u \times (If)] = \int Q(z) \times (If) dz + D$$

$$u[B(1 - \exp(-kt))z + \rho_0] = -\frac{1}{2} kBz^2 \exp(-kt) + D$$

ثابت D با شرط مرزی $u(0,t) = u_0$ به دست می‌آید:

$$D = \rho_0 u_0$$

بنابراین تابع $u(z,t)$ نتیجه می‌شود:

$$u(z,t) = \frac{\rho_0 u_0}{B(1 - \exp(-kt))z + \rho_0} - \frac{kB \exp(-kt)z^2}{2[B(1 - \exp(-kt))z + \rho_0]}$$

پاسخ پ:

با کمک معادله بالا نیم‌رخ سرعت اولیه در لوله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(z,0) = u_0 - \frac{kBz^2}{2\rho_0}$$

تابع سرعت در حالتی که سامانه به شرایط نهایی (پایا) می‌رسد، عبارت است از:

$$u(z, \infty) = \frac{\rho_0 u_0}{Bz + \rho_0} = \frac{u_0}{\left(\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_0}\right) \frac{z}{L} + 1}$$

سرعت در شرایط نهایی و در خروجی از لوله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(L, \infty) = \frac{\rho_0 u_0}{\rho_f}$$

فرمول‌بندی جزء مولی

در فرمول‌بندی جزء جرمی یا مولی، معادله پیوستگی جزئی، همراه با عبارتهای مصرف یا تولید و نفوذ ماده i نوشته می‌شوند. در اینجا شار انتقال جرم جزء i با N_i نشان داده می‌شود که این انتقال شامل حرکت کلی سیال و نفوذ ماده i می‌باشد که به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$N_i = C_i u + J_i$$

u سرعت متوسط سیال است که جهت آن به N_i بستگی دارد.

اگر جزء i به وسیله یک واکنش مصرف یا تولید شود، سرعت واکنش نیز به فرمول‌بندی افزوده می‌شود. برای مصرف i : $R_i < 0$ و برای تولید i : $R_i > 0$. فرمول موازنه مولی ماده i در جزء حجم به صورت زیر نوشته می‌شود:

تجمع (i) = نرخ تولید (i) + نرخ مولی خروجی (i) - نرخ مولی ورودی (i)

مختصات کارتزین:

در یک جزء حجم مکعبی شکل، به ابعاد dx ، dy و dz روابط زیر حاصل می‌شود:

: (نرخ خروجی جزء i - نرخ ورودی جزء i)

$$N_{ix} A \Big|_x - N_{ix} A \Big|_{x+dx} \quad \text{در جهت } x$$

$$N_{iy} S \Big|_y - N_{iy} S \Big|_{y+dy} \quad \text{در جهت } y$$

$$N_{iz} W \Big|_z - N_{iz} W \Big|_{z+dz} \quad \text{در جهت } z$$

$$R_i V \quad \text{نرخ تولید جزء } i:$$

$$\frac{\partial(C_i V)}{\partial t} \quad \text{تجمع جزء } i:$$

A ، S و W سطح مقطع و V حجم جزء حجم است. با جایگذاری عبارتهای بالا در معادله موازنه جرم و مرتب کردن آنها رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial N_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial N_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{iz}}{\partial z} - R_i = 0$$

جدول زیر معادله‌های پیوستگی را برای جزء در دستگاه مختصات سه‌گانه نشان می‌دهد.

مختصات کارتزین	$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial N_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial N_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{iz}}{\partial z} - R_i = 0$
مختصات استوانه‌ای	$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r N_{ir}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{i\theta}) + \frac{\partial N_{iz}}{\partial z} - R_i = 0$
مختصات کروی	$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 N_{ir}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{i\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial N_{i\varphi}}{\partial \varphi} - R_i = 0$

اگر به جای N_i مجموع شارهای انتقال جرم در اثر جریان کلی و نفوذ i جایگزین شود و برای عبارت نفوذ از قانون فیک استفاده گردد، روابط زیر به ترتیب به دست می‌آید:

$$N_{ix} = C_i u_x + J_{ix} \quad \text{شار انتقال جرم در جهت } x$$

$$J_{ix} = -D_{iM} \frac{\partial C_i}{\partial x} \quad \text{شار نفوذ جزء } i \text{ در جهت } x$$

D_{iM} ضریب نفوذ مولکولی i در مخلوط سیال است. در این صورت مشتق N_i در جهت x به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial N_{ix}}{\partial x} = \frac{\partial (C_i u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (J_{ix})}{\partial x} = u_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (D_{iM} \frac{\partial C_i}{\partial x})$$

شار انتقال در دو جهت y و z به همین ترتیب نوشته می‌شود که با استفاده از فرض‌ها می‌توان آن را ساده‌تر نمود.

سیال تراکم‌ناپذیر با ضریب نفوذ مولکولی ثابت

در مختصات کارتزین با اعمال چگالی ثابت، معادله پیوستگی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

از طرفی با اعمال فرض ثابت بودن ضریب نفوذ مولکولی، معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial N_{ix}}{\partial x} = u_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i \frac{\partial u_x}{\partial x} - D_{iM} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}$$

با تعمیم رابطه بالا برای جهت‌های دیگر و با اعمال آن در معادله پیوستگی جزء i برای مختصات کارتزین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + (u_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + u_y \frac{\partial C_i}{\partial y} + u_z \frac{\partial C_i}{\partial z}) = D_{iM} \left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} \right) + R_i$$

معادله بالا، معادله پیوستگی جزء i در مختصات کارتزین برای سیال تراکم‌ناپذیر و ضریب نفوذ ثابت می‌باشد. جدول زیر معادله پیوستگی جزء i را برای سیال تراکم‌ناپذیر با ضریب نفوذ ثابت در دستگاه مختصات سه‌گانه نشان می‌دهد.

$\frac{\partial C_i}{\partial t} + (u_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + u_y \frac{\partial C_i}{\partial y} + u_z \frac{\partial C_i}{\partial z}) = D_{iM} \left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} \right) + R_i$
مختصات کارتزین
$\frac{\partial C_i}{\partial t} + (u_r \frac{\partial C_i}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial C_i}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial C_i}{\partial z}) = D_{iM} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C_i}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} \right] + R_i$
مختصات استوانه‌ای
$\frac{\partial C_i}{\partial t} + (u_r \frac{\partial C_i}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial C_i}{\partial \theta} + u_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial C_i}{\partial \phi}) =$ $D_{iM} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial C_i}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 C_i}{\partial \phi^2} \right] + R_i$
مختصات کروی

سامانه‌های نفوذی

شار انتقال جرم جزء i در هر جهت فضایی شامل دو عبارت **جریان کلی** و **جریان نفوذی** می‌باشد:

$$N_i = C_i u + J_i$$

u عبارت است از سرعت حرکت کلی سیال در جهت و امتداد حرکت.

با توجه به سامانه‌های واقعی شرایط مختلفی بر فیزیک مسئله حاکم است که در دو حالت مختلف زیر طبقه‌بندی می‌شود:

حالت اول: سرعت حرکت کلی سیال صفر است ($u=0$).

در این صورت شار انتقال جرم برابر با شار نفوذ می‌باشد:

$$N_i = J_i$$

این فرض در شرایط زیر برقرار باشد:

❖ سیال کاملاً ساکن باشد.

❖ نفوذ در یک فاز جامد (با واکنش یا بدون واکنش) انجام شود.

❖ نفوذ (شار) دو طرفه با تعداد مول‌های مساوی انجام شود.

❖ نفوذ در فاز مایع همراه با واکنش رخ دهد.

حالت دوم: سرعت حرکت کلی سیال غیر صفر است ($u \neq 0$).

این حالت در شرایط زیر می‌تواند برقرار باشد:

۱- سیال دارای حرکت اجباری است و نفوذ در مقابل حرکت کلی سیال ناچیز است. در این صورت:

$$N_i = C_i u$$

۲- سیال فاقد حرکت اجباری است، اما در اثر عواملی مانند نفوذ یک طرفه یا نفوذ دو طرفه با مول‌های نابرابر دارای حرکت می‌شود. در این حالت برای تعیین سرعت حرکت کلی سیال می‌توان از روابط سرعت متوسط استفاده نمود:

$$u = \frac{C_i u_i + C_j u_j + \dots + C_n u_n}{(C_i + C_j + \dots + C_n)}$$

با توجه به تعریف N_i ، همواره شار انتقال جرم جزء i عبارت است از حاصل ضرب سرعت حرکت جزء i در غلظت آن. یعنی:

$$N_i = C_i u_i$$

در نتیجه با استفاده از دو معادله بالا نتیجه می‌شود:

$$u = \frac{N_i + N_j + \dots + N_n}{C_{total}}$$

C_{total} مجموع غلظت اجزا می‌باشد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$N_i = C_i u + J_i$$

$$N_i = (N_i + N_j + \dots) \frac{C_i}{C_{total}} + J_i$$

و به عبارت دیگر می‌توان گفت:

$$N_i = y_i \sum N_j + J_i$$

در این حالت رابطه‌ای برای N_i بر حسب شار انتقال جرم دیگر اجزاء به دست آمده است که می‌تواند در معادله پیوستگی به کار برده شود.

مثال: شار انتقال جرم (N_i) را در دو حالت زیر به دست آورید:

الف) نفوذ یک طرفه جزء i در مخلوط در جهت x

ب) نفوذ دو طرفه در مخلوط دوتایی در جهت x .

الف) در این حالت:

$$N_{ix} \neq 0 \text{ و } N_{jx}, N_{kx}, \dots = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$N_{ix} = N_{ix} \frac{C_i}{C_{total}} + J_{ix}$$

$$N_{ix} = \frac{J_{ix}}{(1 - y_i)}$$

$$N_{ix} = \frac{-D_{iM} C_{total}}{(1 - y_i)} \frac{\partial y_i}{\partial x}$$

$$y_i = C_i / C_{total}$$

ب) در این صورت شار انتقال جرم جزء i و j مساوی ولی در جهت مخالف هستند.

$$N_i = -N_j$$

در نتیجه خواهیم داشت:

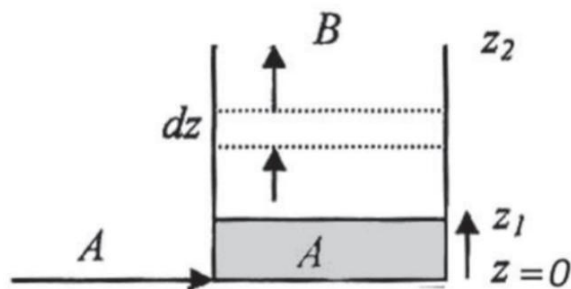
$$N_{ix} = -D_{iM} \frac{\partial C_i}{\partial x}$$

$$N_{ix} = -D_{iM} C_{total} \frac{\partial y_i}{\partial x}$$

مثال: ظرفی مطابق شکل زیر محتوی مایع فرار A می‌باشد. ظرف قبلاً از گاز B پر شده است. مایع A در اثر تبخیر به داخل B نفوذ می‌کند. با تزریق مایع A به ظرف سطح آن همواره در ارتفاع ثابتی حفظ می‌شود. دما و فشار محیط ثابت است. کسر مولی A در فصل مشترک مقدار ثابت y_{A1} و در بالای ظرف مقدار ثابت y_{A2} است. با فرض اینکه مخلوط گازهای A و B ایده‌آل باشند، تعیین کنید:

الف) فلاکس مولی انتقال جرم ماده A به درون گاز B

ب) تغییرات کسر مولی A بر حسب ارتفاع ظرف



در اینجا یک سامانه نفوذ یک طرفه داریم که مایع فرار A به درون گاز B نفوذ می‌کند. در سطح مایع بیشترین غلظت A و در بالای ظرف کمترین غلظت A وجود دارد:

فرض‌های مدل: سامانه در شرایط پایا است. دما و فشار سامانه ثابت است و گازها از قانون گاز ایده‌آل پیروی می‌کنند و غلظت کل ثابت است. غلظت A و B در ارتفاع z_1 و z_2 مقدار ثابتی است. غلظت A در گاز فقط تابع ارتفاع است و ضریب نفوذ A در B مقدار ثابتی است. نفوذ یک طرفه است و B در A نفوذ نمی‌کند.

با توجه به اینکه کسر مولی A در فاز گاز تابع ارتفاع است، باید تغییرات کسر مولی A در فاز گاز فرمول‌بندی شود. بنابراین یک جزء حجم در داخل گاز با بعد کوچک dz انتخاب و موازنه جزء در این جزء حجم نوشته می‌شود:

نتیجه می‌شود که شار انتقال جرم در جهت z مقدار ثابتی است و از معادله زیر به دست می‌آید:

$$0 = \text{در اثر حرکت کلی و نفوذ (نرخ جرم خروجی } A - \text{نرخ جرم ورودی } A)$$

$$-\frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0$$

نتیجه می‌شود که شار انتقال جرم در جهت z (N_{Az}) مقدار ثابتی است و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$N_{Az} = C_A u_z + J_{Az}$$

با جایگذاری روابط سرعت حرکت متوسط و نفوذ:

$$N_{Az} = \frac{C_A(N_{Az} + N_{Bz})}{C} - D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

در نفوذ یک طرفه $N_{Bz} = 0$ و چون $y_A = \frac{C_A}{C}$ بنابراین:

$$N_{Az} = \frac{-D_{AB} C \frac{\partial y_A}{\partial z}}{(1 - y_A)}$$

الف) با توجه به ثابت بودن N_{Az} از معادله بالا در محدوده z_1 تا z_2 انتگرال گیری می‌شود:

$$-\int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{(1 - y_A)} = \frac{N_{Az}}{D_{AB} C} \int_{z_1}^{z_2} dz$$

در این صورت شار انتقال جرم به دست می‌آید:

$$N_{Az} = \frac{D_{AB} C}{(z_2 - z_1)} \ln\left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}}\right)$$

ب) برای حل قسمت مجدد از معادله دیفرانسیلی به دست آمده برای N_{Az} در محدوده z_1 تا z انتگرال گیری می‌شود:

$$-\int_{y_A}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{(1 - y_A)} = \frac{N_{Az}}{D_{AB} C} \int_z^{z_2} dz$$

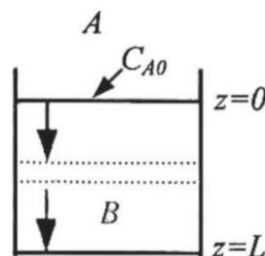
با جایگذاری N_{Az} به دست آمده در قسمت الف که مقدار ثابتی است، در معادله بالا، تغییرات y_A بر حسب z به دست می‌آید:

$$\frac{1-y_A}{1-y_{A_2}} = \left(\frac{1-y_{A1}}{1-y_{A_2}} \right)^{\frac{z-z_2}{z_1-z_2}}$$

مثال: ظرفی مطابق شکل زیر حاوی محلول B می‌باشد. گاز A درون محلول نفوذ می‌کند و واکنش درجه اول در فاز مایع رخ می‌دهد. تعیین کنید:

الف) تغییرات غلظت A در فاز مایع.

ب) شار انتقال ماده A به فاز مایع.



در این مسئله پدیده نفوذ همراه با واکنش در فاز مایع رخ می‌دهد و غلظت A در فاز مایع تغییر می‌کند، بنابراین فرمول‌بندی باید در فاز مایع انجام شود.

فرض‌های مدل: سامانه در شرایط پایا قرار دارد. سیال تراکم‌ناپذیر است. غلظت کل مایع مقدار ثابتی است. ضریب نفوذ A در B مقدار ثابتی است. سرعت واکنش در فاز مایع از درجه اول می‌باشد $(-r_A = kC_A)$.

انتخاب سامانه مورد مطالعه: با توجه به اینکه غلظت A فقط تابعی از ارتفاع مایع است، بنابراین یک جزء حجم با بعد کوچک dz در داخل مایع استفاده می‌شود و فرمول‌بندی غلظت A در این جزء حجم انجام می‌گیرد که از فرمول زیر تابعیت می‌کند:

$$0 = (\text{نرخ مصرف } A) - (\text{نرخ مولی خروجی } A - \text{نرخ مولی ورودی } A)$$

نتیجه فرمول‌بندی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial N_{Az}}{\partial z} + kC_A = 0$$

معادله شار انتقال ماده A:

$$N_{Az} = C_A u_z - D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

با توجه به اینکه واکنش در فاز مایع انجام می‌شود، حرکت کلی سیال ناچیز است ($u_z=0$). بنابراین:

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

در نتیجه با توجه به رابطه به دست آمده برای شار و جایگذاری آن فرمولی که در ابتدا به دست آمده بود، معادله زیر به دست می‌آید که یک معادله دیفرانسیل معمولی رتبه دوم می‌باشد:

$$\frac{d^2 C_A}{dz^2} - \frac{k C_A}{D_{AB}} = 0$$

شرایط مرزی مسئله عبارت است از:

$$\begin{cases} z = 0, C_A = C_{A0} \\ z = L, \frac{dC_A}{dz} = 0 \end{cases}$$

حل با استفاده از روش عملگر مشتق:

$$r^2 - \frac{k}{D_{AB}} = 0 \rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{k}{D_{AB}}}$$

$$C_A = c_1 e^{\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} z} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} z}$$

با استفاده از شرایط مرزی:

$$z = 0, C_A = C_{A0} \rightarrow c_1 + c_2 = C_{A0}$$

$$z = L, \frac{dC_A}{dz} = 0 \rightarrow c_1 e^{\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} L} = c_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} L} \rightarrow c_2 = c_1 e^{2\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} L}$$

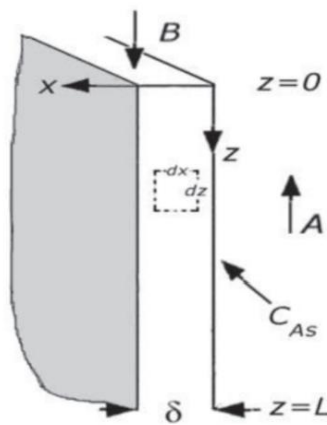
$$c_1 = \frac{C_{A0}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} L}}, c_2 = \frac{e^{2\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} L} C_{A0}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} L}}$$

$$\frac{C_A}{C_{A0}} = \frac{e^{\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}}z} + e^{2\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}}L}e^{-\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}}z}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}}L}}$$

(ب)

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} \Big|_{z=0} = -D_{AB} C_{A0} \frac{\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} - \sqrt{\frac{k}{D_{AB}}} e^{2\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}}L}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{k}{D_{AB}}}L}}$$

مثال: در یک برج دیواره مرطوب، مطابق شکل زیر، حلال B به صورت مداوم و از بالا به پایین جریان دارد. در این شرایط، گازی شامل جزء A از پایین به بالا حرکت می‌کند و به وسیله حلال B جذب می‌شود. اگر میان A و B واکنش انجام نشود و سرعت حرکت مایع نیز مقدار ثابت u باشد، معادله دیفرانسیل تغییرات غلظت A در داخل حلال B را به دست آورید. در نهایت شرایط مرزی مورد نیاز برای حل را مشخص نمایید. فرض کنید، غلظت جزء A در نزدیکی دیواره و همچنین در ورودی مایع برابر با C_{A0} می‌باشد.



با توجه به فیزیک مسئله، غلظت جزء A داخل حلال B، متغیر وابسته است که تابعی از طول بستر و ضخامت فیلم مایع می‌باشد.

فرضیات: دما ثابت است. واکنش انجام نمی‌شود. شرایط پایا برقرار است. سیال تراکم ناپذیر است. ضریب نفوذ A در B ثابت است. سرعت حرکت کلی سیال ثابت است. از نفوذ در جهت طولی (z) در مقابل حرکت کلی سیال صرف نظر می‌شود. از حرکت کلی سیال در جهت افقی (x) در مقابل نفوذ صرف نظر می‌شود.

فرمول‌بندی:

$$-\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} - \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0$$

در جهت x فقط عبارت نفوذ مهم است، بنابراین:

$$N_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x}$$

در جهت z حرکت کلی سیال مهم است، بنابراین:

$$N_{Az} = C_A u$$

با جایگذاری روابط بالا در فرمول بندی دیفرانسیلی به دست آمده خواهیم داشت:

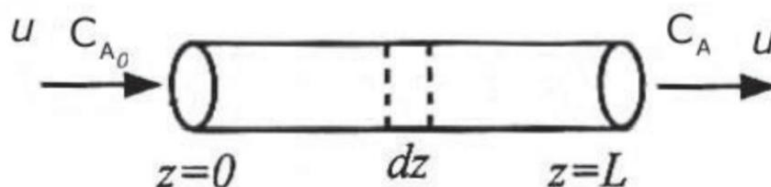
$$D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} - u \frac{\partial C_A}{\partial z} = 0$$

برای جهت x به دو شرط مرزی و برای جهت z فقط به یک شرط مرزی نیاز است. مطابق زیر:

$$\begin{cases} z = 0, C_A = C_{A0} \\ x = 0, C_A = C_{As} \\ x = \delta, C_A = C_{A0} \end{cases}$$

معادله بالا یک معادله دیفرانسیل جزئی است.

مثال: در یک واکنش گاه لوله ای به طول (L) ، مطابق شکل زیر، واکنش شیمیایی $A \rightarrow B$ از درجه اول در فاز مایع و به طور مداوم انجام می شود. غلظت A در جریان ورودی C_{A0} است. چنانچه سرعت حرکت سیال در طول واکنش گاه ثابت و مقدار متوسط u باشد و ضریب پراکندگی محوری A در سیال D فرض شود، تغییرات غلظت A را در طول لوله تعیین کنید.



در این مسئله انتقال ماده A ، علاوه بر حرکت کلی سیال با پراکندگی محوری نیز انجام می شود.

فرض ها:

سیال تراکم‌ناپذیر است. غلظت A فقط تابع طول واکنش‌گاه است. سرعت سیال ثابت است. دما ثابت است. شرایط پایا برقرار است.

با توجه به فرض‌های بالا غلظت A تابع طول لوله است. در این حالت لازم است جزء حجمی به طول کوچک dz در نظر گرفته شود که موازنه مولی A در این جزء حجم به صورت زیر خواهد بود:

$$0 = \text{نرخ مصرف } A - (\text{در اثر پراکندگی محوری} + \text{حرکت کلی}) (\text{نرخ خروجی } A - \text{نرخ ورودی } A)$$

نتیجه فرمول‌بندی به صورت زیر است:

$$-\frac{\partial(N_A S)}{\partial z} dz + (r_A)V = 0$$

معادله زیر با جایگذاری N_{Az} در معادله زیر حاصل می‌شود:

$$D_{ax} \frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} - u \frac{\partial C_A}{\partial z} - k C_A = 0$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} z = 0, C_A = C_0 \\ z = L, \frac{\partial C_A}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

معادله حاصل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت است که از روش عملگر مشتق حل می‌شود، به طوری که معادله مشخصه آن به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 C_A}{dz^2} - \frac{u}{D_{ax}} \frac{dC_A}{dz} - \frac{k}{D_{ax}} C_A = 0$$

$$r^2 - \frac{u}{D_{ax}} r - \frac{k}{D_{ax}} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{u}{D_{ax}}\right)^2 + \frac{4k}{D_{ax}}$$

$$r_1, r_2 = \frac{\frac{u}{D_{ax}} \pm \sqrt{\left(\frac{u}{D_{ax}}\right)^2 + \frac{4k}{D_{ax}}}}{2}$$

$$C_A = Ae^{r_1 z} + Be^{r_2 z}$$

با استفاده از شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$z = 0 \rightarrow C_A = C_{A0} \rightarrow A + B = C_{A0}$$

$$z = L \rightarrow \frac{dC_A}{dz} = 0 \rightarrow Ar_1 e^{r_1 L} + Br_2 e^{r_2 L} = 0$$

$$A = -\frac{r_2}{r_1} e^{(r_2-r_1)L} B$$

$$B = \frac{C_{A0}}{1 - \frac{r_2}{r_1} e^{(r_2-r_1)L}} \rightarrow A = \frac{-C_{A0} \frac{r_2}{r_1} e^{(r_2-r_1)L}}{1 - \frac{r_2}{r_1} e^{(r_2-r_1)L}}$$

قانون بقای انرژی

از فرمول بندی انرژی حرارتی، معادله‌ی حرارت به دست می‌آید که در مدل سازی دیفرانسیلی بر حسب متغیرهای مکان و زمان نوشته می‌شود و در نهایت تغییرات دما به دست می‌آید.

چنانچه مدل سازی حرارت در سیالات انجام شود، به دلیل وجود اصطکاک بین لایه‌های متحرک، انتقال حرارت رخ می‌دهد، بنابراین باید حرارت ناشی از اصطکاک نیز در نظر گرفته شود. در این بخش برای ساده سازی و عدم دخالت عبارت تنش در مدل دما، فرمول بندی حرارت با صرف نظر کردن از انرژی حاصل از اصطکاک انجام می‌شود.

برای فرمول بندی حرارت، نرخ حرارت ورودی و خروجی در اثر حرکت کلی و نفوذ، تولید یا مصرف و تجمع حرارت در جزء حجم نوشته و در معادله موازنه انرژی مطابق فرمول زیر جای گذاری می‌شوند:

$$\text{تجمع حرارت} = (\text{حرارت تولیدی}) + \text{در اثر حرکت کلی و نفوذ} (\text{نرخ حرارت خروجی} - \text{نرخ حرارت ورودی})$$

اگر در یک فرایند، حرارت مبادله شده در اثر مصرف جزء i در یک واکنش شیمیایی باشد، عبارت تولید (یا مصرف) انرژی حرارتی به صورت زیر نوشته می‌شود:

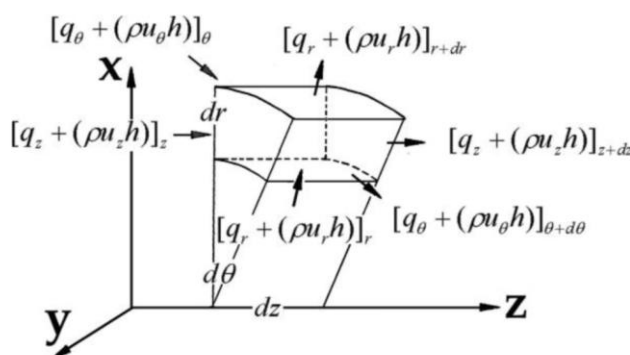
نرخ حجمی تولید (یا مصرف) گرما در اثر واکنش:

$$(-R_i)(-\Delta H_i)$$

R_i سرعت مصرف ماده‌ی i و ΔH_i آنتالپی واکنش برای مصرف یک مول ماده‌ی i می‌باشد. در صورتی که واکنش گرماده باشد، این عبارت در موازنه‌ی انرژی به صورت گرمای تولیدی (با علامت مثبت) و اگر واکنش گرماگیر باشد، این عبارت به صورت مصرفی (با علامت منفی) به کار می‌رود.

اگر در یک سامانه حرارت به وسیله‌ی یک سیم‌پیچ حرارتی تولید شود، معمولاً نرخ حجمی حرارت تولیدی با u''' مشخص می‌شود.

فرمول‌بندی حرارت را نیز می‌توان در دستگاه مختصات سه‌گانه‌ی کارتزین، استوانه‌ای یا کروی انجام داد. برای آشنایی بیشتر با فرمول‌بندی در مختصات استوانه‌ای، معادله‌ی حرارت در این سامانه مورد توجه قرار می‌گیرد. به این منظور مطابق شکل زیر جزء حجمی به ابعاد $(dr, r d\theta, dz)$ همراه با شارهای ورودی و خروجی حرارت در نظر گرفته می‌شود.



مطابق شکل بالا، حرارت به دو صورت نفوذ و حرکت کلی منتقل می‌شود. شار نفوذ حرارت با q و شار انتقال حرارت کلی با (puh) نشان داده شده است. h آنتالپی در واحد جرم است و ρu شار انتقال جرم است.

سیال در حال حرکت آنتالپی خود را منتقل می‌کند و آنتالپی به دما و گرمای ویژه (در فشار ثابت) بستگی دارد که بعداً برحسب دما جایگزین می‌شود. فرمول‌های زیر برای نرخ آنتالپی‌های ورودی و خروجی از جزء حجم در جهت‌های سه‌گانه نوشته می‌شوند که پس از اعمال بسط سری تیلور تفاضل ورودی از خروجی مشخص شده است.

نرخ عبور آنتالپی در اثر حرکت کلی

(نرخ حرارت خروجی - نرخ حرارت ورودی)

در جهت z

$$(\rho u_z h A)_z - (\rho u_z h A)_{z+dz} = - \frac{\partial (\rho u_z h A)_z}{\partial z} dz$$

در جهت r

$$(\rho u_r h S)_r - (\rho u_r h S)_{r+dr} = - \frac{\partial (\rho u_r h S)_r}{\partial r} dr$$

در جهت θ

$$(\rho u_{\theta} h W)_{\theta} - (\rho u_{\theta} h W)_{\theta+d\theta} = - \frac{\partial(\rho u_{\theta} h W)_{\theta}}{\partial \theta} d\theta$$

به طوری که h آنتالپی مخصوص می باشد. مولکول ها و ذرات ماده در اثر تماس با یکدیگر حرارت خود را با مکانیسم هدایت منتقل می کنند که به صورت عبارت نفوذ حرارت در نظر گرفته می شود و در جهت های سه گانه در جزء حجم نوشته می شود:

نرخ انتقال حرارت در اثر نفوذ:

(نرخ حرارت خروجی - نرخ حرارت ورودی)

در جهت Z

$$(q_z A)_z - (q_z A)_{z+dz} = - \frac{\partial(q_z A)}{\partial z} dz$$

در جهت r

$$(q_r S)_r - (q_r S)_{r+dr} = - \frac{\partial(q_r S)}{\partial r} dr$$

در جهت θ

$$(q_{\theta} W)_{\theta} - (q_{\theta} W)_{\theta+d\theta} = - \frac{\partial(q_{\theta} W)}{\partial \theta} d\theta$$

q_r ، q_{θ} و q_z شار انتقال حرارت در اثر نفوذ است که در اثر تماس مولکول ها به صورت هدایت حرارتی در جهت های سه گانه منتقل می شود. به کمک قانون ویژه فوریه می توان مقدار این حرارت را به گرادیان دما ارتباط داد. به صورت زیر:

$$q_z = -K_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad q_r = -K_r \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_{\theta} = -K_{\theta} \frac{\partial T}{r \partial \theta}$$

در فرمول های بالا، A_z ، S_r و W_{θ} سطح مقطع جزء حجم عمود بر جهت انتقال حرارت است. براساس شکل مساحت این سطوح در نواحی z ، r و θ به صورت زیر جایگزین می شود:

$$A_z = r d\theta dr \quad S_r = r d\theta dz \quad \text{و} \quad W_{\theta} = dz dr$$

چنانچه نرخ حجمی تولید حرارت u''' باشد و حجم جزء حجم نیز V باشد:

نرخ حرارت تولیدی:

$$(u''' V)$$

عبارت تجمع انرژی حرارتی در جزء حجم نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

تجمع حرارت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(me) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho e V)$$

e انرژی داخلی جزء حجم در واحد جرم می‌باشد که به دما و گرمای ویژه (در حجم ثابت) بستگی دارد. m جرم و V حجم جزء حجم است که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V = r d\theta dz dr$$

با جای گذاری عبارت‌های بالا در معادله‌ی موازنه‌ی انرژی، فرمول‌بندی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial(\rho u_z h)}{\partial z} r d\theta dr dz - \frac{\partial(\rho u_r h r)}{\partial r} d\theta dz dr - \frac{\partial(\rho u_\theta h)}{\partial \theta} dz dr d\theta \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) r d\theta dr dz + \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r \frac{\partial T}{\partial r} r \right) d\theta dz dr + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_\theta \frac{\partial T}{r \partial \theta} \right) d\theta dz dr \\ & + u''' r d\theta dz dr = \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) r d\theta dz dr \end{aligned}$$

با حذف $(r d\theta dz dr)$ از طرفین و با شرط تساوی ضرایب هدایت حرارتی در جهت‌های مختلف (K) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_z h)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r h)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta h)}{\partial \theta} = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K \frac{\partial T}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + u''' \end{aligned}$$

معادله‌ی بالا شکل کلی معادله‌ی حرارت در مختصات استوانه‌ای است که لازم است بر حسب دما جایگزین شود. به این ترتیب که ابتدا در عبارت تجمع، انرژی داخلی را با آنتالپی جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \frac{\partial[\rho(h - Pv)]}{\partial t} = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t}$$

اگر تغییرات فشار نسبت به زمان ناچیز باشد (این فرض در سامانه‌های تراکم ناپذیر فرض مناسبی است) بنابراین $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ و از آنتالپی به جای انرژی داخلی می‌توان استفاده کرد.

سپس در معادله کلی به دست آمده چهار عبارت سمت چپ را به صورت زیر باز می‌کنیم:

$$h \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} \right) + \rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u_z \frac{\partial h}{\partial z} + u_r \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) = \dots$$

پرانتر اول با توجه به قانون بقای جرم کلی صفر می‌شود و در پرانتر دوم با استفاده از رابطه $dh=c_p dT$ می‌توان تابع دما را جایگزین کرد. با فرض ثابت بودن ضریب هدایت حرارتی و تقسیم طرفین معادله به (ρc) معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{K}{\rho c} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] + \frac{u'''}{\rho c}$$

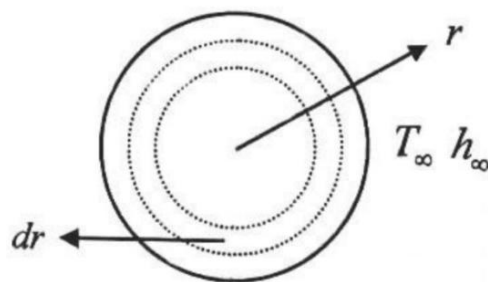
جدول زیر مدل دیفرانسیلی حرارت را، با صرف نظر کردن از گرمای حاصل از اصطکاک، در مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی برای شرایط K ، ρ و c ثابت نشان می‌دهد.

$\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{K}{\rho c} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{u'''}{\rho c}$
مختصات کارتزین
$\frac{\partial T}{\partial t} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{K}{\rho c} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] + \frac{u'''}{\rho c}$
مختصات استوانه‌ای
$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} =$ $\frac{K}{\rho c} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta^2} (\sin \theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \frac{u'''}{\rho c}$
مختصات کروی

مثال: گلوله‌ی داغی به شعاع R که از قبل در کوره‌ای به دمای T_0 بوده است، وارد آب سردی به دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت h_∞ می‌شود. ضریب هدایت حرارتی گلوله مقدار ثابت K می‌باشد. گرمای ویژه و چگالی گلوله به ترتیب c و ρ است. معادله‌ی دیفرانسیل حرارت را در گلوله همراه با شرایط مرزی به دست آورید.

در این مسئله چون ابتدا گلوله در محیط دیگری بوده است، دمای کره به صورت تابعی گذرا خواهد بود. علاوه بر این، توزیع دما در جهت شعاع کره برقرار است.

فرض‌ها: در گلوله حرارت تولید یا مصرف نمی‌شود. گرمای ویژه و چگالی گلوله ثابت است. تغییر دما در گلوله تابع شعاع است. گلوله از نظر حرارتی در شرایط ناپایا قرار دارد.



با توجه به فرضیات بالا، دمای گلوله تابعی از شعاع است. بنابراین سامانه مورد مطالعه، یک جزء حجم کروی به ضخامت dr ، مطابق شکل بالا می‌باشد که فرمول‌بندی حرارت در آن به صورت زیر انجام می‌شود:

تجمع حرارت = (در اثر نفوذ به جزء حجم) (نرخ حرارت خروجی - نرخ حرارت ورودی)

$$(q_r A)_r - (q_r A)_{r+dr} = \frac{\partial}{\partial t} (me)$$

$$-\frac{\partial (q_r A)_r}{\partial r} dr = m \frac{\partial}{\partial t} (e)$$

در معادله‌ی بالا، A_r سطح مقطع جزء حجم در ناحیه‌ی r و m جرم جزء حجم است. با توجه به اینکه، $A_r = 4\pi r^2$ و جرم جزء حجم $m_r = 4\rho\pi r^2 dr$ است و نیز $\frac{\partial e}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t}$ ، با جایگزین کردن این عبارتها و q برحسب قانون فوریه و سپس مرتب کردن آنها نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

به طوری که $\alpha = \frac{K}{\rho c}$ ، ضریب نفوذ حرارتی نامیده می‌شود.

شرایط مرزی:

$$r = 0: \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{یا} \quad T = \text{محدود}$$

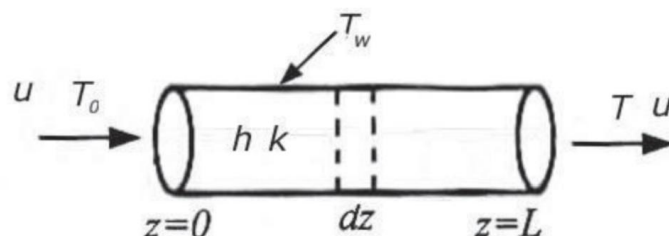
$$r = R: \quad -k \frac{\partial T}{\partial r} = h_{\infty} (T - T_{\infty})$$

شرط مرزی اول به دلیل خاصیت تقارن یا محدود بودن دما در مرکز کره است. شرط مرزی دوم، به دلیل تبادل حرارت به صورت جابجایی با محیط می‌باشد.

شرط اولیه:

$$t = 0, T = T_0$$

مثال: جریانی از هوای سرد با عبور از یک لوله‌ی استوانه‌ای داغ، مطابق شکل زیر گرم می‌شود. شعاع و طول لوله به ترتیب R و L است. دمای دیواره‌ی استوانه مقدار ثابت T_w و ضریب انتقال حرارت هوای لوله h می‌باشد. ضریب هدایت حرارتی، چگالی و گرمای ویژه‌ی هوا به ترتیب K ، ρ و c_p می‌باشد. هوا با سرعت ثابت u در لوله حرکت می‌کند. اگر دمای هوای ورودی T_0 باشد، تغییرات دمای هوا را در طول لوله در شرایط پایا تعیین کنید.



در این مسئله انتقال انرژی هوا، هم در اثر جریان کلی و هم در اثر نفوذ حرارت انجام می‌شود. همچنین هوا با جداری لوله، انتقال حرارت جابجایی نیز انجام می‌دهد.

فرض‌ها: حرارتی در لوله تولید یا مصرف نمی‌شود. لوله در شرایط پایا برقرار است. تغییرات دمای هوا تابع شعاع لوله نبوده و فقط تابعی از طول است. تبادل حرارت هوای لوله با دیواره‌ی آن به صورت جابجایی با ضریب انتقال حرارت h انجام می‌شود. تبادل حرارت هوا در طول لوله به صورت کلی (به علت حرکت هوا) و نفوذی (با ضریب هدایت حرارتی K) انجام می‌شود. چگالی و گرمای ویژه‌ی هوا ثابت فرض می‌شود. سرعت جریان هوا ثابت است.

با توجه به اینکه توزیع دما فقط تابعی از طول لوله است، جزء حجمی استوانه‌ای شکل به طول dz در نظر گرفته می‌شود و موازنه‌ی حرارت روی آن نوشته می‌شود.

$$0 = (\text{نرخ حرارت جابجایی}) - (\text{در اثر حرکت کلی و نفوذ}) (\text{نرخ حرارت خروجی} - \text{نرخ حرارت ورودی})$$

$$(q_z A)_z - (q_z A)_{z+dz} + (\rho u h A)_z - (\rho u h A)_{z+dz} - h_0 S (T - T_w) = 0$$

با استفاده بسط سری تیلور در جهت $z+dz$ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{\partial}{\partial z}(q_z A)_z dz - \frac{\partial}{\partial z}(\rho u h A)_z dz - h_0 S(T - T_w) = 0$$

S سطح جانبی جزء حجم و A سطح مقطع جزء حجم است، به طوری که $S=2\pi r dz$ و $A=\pi r^2$ بنابراین معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - u \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2h}{R\rho c_p} (T - T_w) = 0$$

به طوری که: $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$. شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$\begin{cases} z = 0, T = T_0 \\ z = L, \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

در منطقه‌ی خروج هوا یعنی در $z=L$ چون دما دیگر تغییر نمی‌کند، می‌توان مشتق آن را صفر در نظر گرفت که در شرط مرزی بالا ملاحظه می‌شود.

حل معادله:

$$\frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{u}{\alpha} \frac{dT}{dz} - \frac{2h}{R\rho c_p \alpha} (T - T_w) = 0$$

پس از تغییر متغیر $\theta = T - T_w$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{u}{\alpha} \frac{d\theta}{dz} - \frac{2h}{R\rho c_p \alpha} \theta = 0$$

معادله‌ی به دست آمده یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی با ضریب ثابت است. بنابراین برای حل آن از عملگر مشتق استفاده می‌شود. بنابراین معادله‌ی مشخصه‌ی زیر با دو ریشه‌ی حقیقی r_1 و r_2 حاصل می‌شود:

$$r_1, r_2 = \frac{u}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4\alpha^2} + \frac{2h^2}{R\rho c_p \alpha}}$$

در نتیجه تابع θ به دست می‌آید:

$$\theta = E e^{r_1 z} + F e^{r_2 z}$$

با جای‌گذاری شرایط مرزی، دستگاه دو معادله دو مجهول زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} E + F = \theta_0 \\ Er_1 e^{r_1} + F_1 r_2 e^{r_2} = 0 \end{cases}$$

پس از حل دستگاه بالا، جواب خصوصی مسئله حاصل می‌شود.

تذکر: چون ضریب هدایت حرارتی گازها نسبت به گرمای ویژه‌ی آن‌ها کوچک است، بنابراین ضریب نفوذ حرارتی آلفا برای یک گاز عدد کوچکی است و می‌توان از نفوذ حرارت نسبت به انتقال حرارت در اثر حرکت سیال صرف‌نظر کرد. در این صورت عبارت مشتق دوم در معادله‌ی به دست آمده حذف و معادله ساده‌تر می‌گردد.

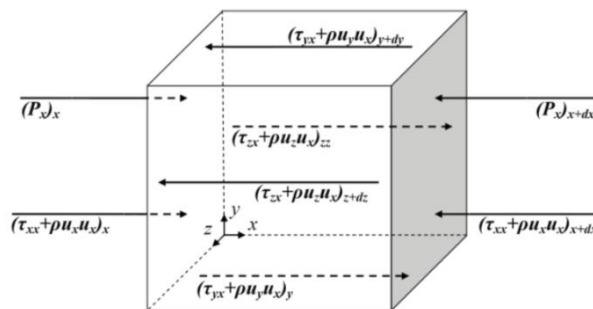
قانون بقای اندازه‌ی حرکت

اندازه‌ی حرکت (مومنتوم) برخلاف جرم و انرژی، یک کمیت برداری است و در فرمول‌بندی، علاوه بر مقدار، باید جهت و امتداد آن مورد توجه قرار گیرد. نرخ اندازه‌ی حرکت، نیرو است. بنابراین در این مدل‌سازی موازنه‌ی نیروها انجام می‌شود. در این بخش فرمول‌بندی اندازه‌ی حرکت در مختصات کارتزین بررسی می‌شود.

با توجه به جهت‌های سه‌گانه‌ی دستگاه مختصات، سرعت دارای سه مولفه‌ی u_x ، u_y و u_z است که پس از فرمول‌بندی سه معادله‌ی حرکت حاصل می‌شود. این سه معادله، وابسته به یکدیگر هستند و باید به طور هم‌زمان حل شوند تا تغییرات مومنتوم در جهت‌های سه‌گانه تعیین گردد. همراه با معادله‌های حرکت، لازم است معادله‌ی پیوستگی نیز تحلیل شود، زیرا اندازه حرکت تابع دو متغیر سرعت و چگالی می‌باشد.

در این بخش فرمول‌بندی مومنتوم برای سیال نیوتنی مطرح می‌شود. همان‌طور که می‌دانید، مولفه‌ی مومنتوم تابع جهت‌های x ، y و z می‌باشد. در اینجا ابتدا، موازنه‌ی مومنتوم در امتداد محور x نوشته می‌شود تا در نهایت معادله‌ی دیفرانسیلی تغییرات u_x نسبت به مکان و زمان به دست آید، سپس به تشابه، دو معادله‌ی دیگر برای u_y و u_z نیز نوشته می‌شود.

جزء حجمی به ابعاد (dx, dy, dz) مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. در این شکل شارهای مومنتوم در اثر حرکت کلی سیال، در اثر نفوذ مومنتوم (تنش‌های برشی و نرمال) و فشار هیدرواستاتیکی در امتداد محور x نشان داده شده‌است.



به طور کلی معادله موازنه مومنتوم در این جزء حجم در امتداد یک محور مشخص عبارت است از:

تجمع مومنتوم = نیروی وزنی + (در اثر تنش های برشی و نرمال + حرکت کلی سیال) (نرخ مومنتوم خروجی - نرخ مومنتوم ورودی)

به منظور نوشتن تغییرات مومنتوم در اثر حرکت کلی سیال باید دانست که انتقال جرم در جهت های سه گانه x ، y و z وجود دارد. ولی در تعیین شار مومنتوم در امتداد محور x فقط مولفه (u_x) در نظر گرفته می شود. بنابراین:

(در اثر حرکت کلی سیال) در جهت x (نرخ مومنتوم خروجی - نرخ مومنتوم ورودی)

$$((\rho u_x A)u_x)_x - ((\rho u_x A)u_x)_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}[(\rho u_x A)u_x]dx \quad \text{انتقال جرم در جهت } x$$

$$((\rho u_y S)u_x)_y - ((\rho u_y S)u_x)_{y+dy} = -\frac{\partial}{\partial y}[(\rho u_y S)u_x]dy \quad \text{انتقال جرم در جهت } y$$

$$((\rho u_z W)u_x)_z - ((\rho u_z W)u_x)_{z+dz} = -\frac{\partial}{\partial z}[(\rho u_z W)u_x]dz \quad \text{انتقال جرم در جهت } z$$

نرخ های انتقال جرم ورودی و خروجی، همگی در سرعت u_x ضرب شده اند، یعنی مولفه مومنتوم فقط در جهت x مشخص شده اند.

در ادامه تغییرات مومنتوم ناشی از نفوذ به جزء حجم بررسی می شود. نفوذ مومنتوم، در اثر تنش های نرمال و تنش های برشی ایجاد می شود. از آنجایی که تنش یک تنسور است باید هم امتداد نیرو و هم سطحی که نیرو بر آن اعمال می شود، مشخص باشد. تنش نرمال، یعنی فشاری که به صورت عمود، بر سطح جزء حجم وارد می شود. تنش برشی فشاری است که بر اثر اصطکاک لایه ها به وجود می آید و مماس بر سطح جزء حجم وارد می شود.

تنش های نرمال خود شامل فشار هیدرواستاتیکی و تنش عمودی است. فشار هیدرواستاتیکی همان فشار ناشی از ارتفاع سیال است و تنش عمودی فشاری است که در اثر اصطکاک در مسیر حرکت به وجود می آید. در جدول زیر انواع تنش ها مشخص شده اند.

فشار هیدرواستاتیکی (P_z, P_y, P_x)	تنش نرمال (normal stress)
تنش عمودی $(\tau_{zz}, \tau_{yy}, \tau_{xx})$	
$(\tau_{zx}$ یا $\tau_{xz})$ ، $(\tau_{zy}$ یا $\tau_{yz})$ ، $(\tau_{xy}$ یا $\tau_{yx})$	تنش برشی (shear stress)

منظور از τ_{zx} تنش است که در آن نیرو و سرعت حرکت در امتداد محور x است، ولی تغییرات نیرو یا سرعت در جهت z رخ می دهد. τ_{yx} یعنی تنش است که در آن نیرو و حرکت در جهت x است ولی تغییر نیرو و سرعت در

جهت y اعمال می‌شود. تنش‌های τ_{zx} و τ_{yx} تنش‌های برشی هستند که بر سطح مماس بر مسیر حرکت وارد می‌شوند، در واقع نیروهای اصطکاکی که موجب کند شدن حرکت می‌شوند. τ_{xx} یعنی تنشی که در آن هم امتداد نیرو و هم تغییر نیرو در جهت x اعمال می‌شود. با توجه به اینکه در فرمول‌بندی فقط تصویر نیروها در جهت x لحاظ می‌شود، بنابراین تغییرات u_x مورد توجه است. در این حالت نیروهای وارد بر جزء حجم در اثر تنش‌های عمودی و برشی در جهت x تصویر می‌شوند:

(در اثر تنش عمودی + برشی) در جهت x (نرخ مومنتوم خروجی - نرخ مومنتوم ورودی)

$$(\tau_{xx}A)_x - (\tau_{xx}A)_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}A)dx \quad \text{در اثر تنش عمودی به دلیل تغییر } u_x \text{ در جهت } x$$

$$(\tau_{yx}S)_y - (\tau_{yx}S)_{y+dy} = -\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}S)dy \quad \text{در اثر تنش برشی به دلیل تغییر } u_x \text{ در جهت } y$$

$$(\tau_{zx}W)_z - (\tau_{zx}W)_{z+dz} = -\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}W)dz \quad \text{در اثر تنش برشی به دلیل تغییر } u_x \text{ در جهت } z$$

τ_{xx} تنشی است که بر سطح عمود بر مسیر حرکت وارد می‌شود و مطابق شکل بالا این فشار بر سطح $(dzdy)$ وارد می‌شود. τ_{xx} در دو ناحیه x و $x+dx$ و در دو جهت مخالف به جزء حجم وارد می‌شود. هنگام ورود سیال علامت τ_{xx} مثبت و هنگام خروج از جزء علامت آن منفی است، زیرا نیروی اعمال شده هنگام خروج سیال در خلاف جهت حرکت به جزء حجم وارد می‌شود.

τ_{yx} تنشی است که به سطح مماس بر امتداد حرکت یعنی سطح $(dxdz)$ وارد می‌شود و به این دلیل پدید می‌آید که لایه‌های موازی به علت اصطکاک با یکدیگر باعث کند شدن حرکت می‌شوند.

τ_{yx} در بالا و پایین جزء حجم، به ترتیب در دو ناحیه y و $y+dy$ و در دو جهت مخالف اعمال می‌شود که در موازنه مومنتوم در ناحیه y با علامت مثبت و در ناحیه $y+dy$ با علامت منفی وارد می‌شود.

τ_{zx} نیز در دو ناحیه z و $z+dz$ به طور مماس بر سطح $(dydx)$ در دو جهت مخالف اعمال می‌گردد. در ناحیه z با علامت مثبت و در ناحیه $z+dz$ با علامت منفی وارد می‌شود.

در مرحله بعد لازم است موازنه نیروها در اثر فشار هیدرواستاتیک نوشته شود. فشار هیدرواستاتیکی شامل مولفه‌های P_x ، P_y و P_z است. با توجه به اینکه تصویر نیروها باید در جهت x نوشته شود، بنابراین فقط مولفه P_x باقی می‌ماند. نیروی فشاری هنگام ورود به جزء حجم در جهت حرکت و مثبت می‌باشد، اما هنگام خروج از جزء حجم در خلاف جهت حرکت با علامت منفی اعمال می‌شود، بنابراین:

(نیروی فشار هیدرواستاتیکی خروجی - نیروی فشار هیدرواستاتیکی ورودی)

$$(P_x A)_x - (P_x A)_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}(P_x A)dx \quad \text{در امتداد محور } x$$

علاوه بر نیروهای تنشی و نیروهای حاصل از حرکت کلی سیال، نیروی وزنی نیز مطرح است که به علت جاذبه زمین ایجاد می‌شود:

$$mg_x = \rho g_x V \quad \text{در امتداد محور } x$$

V حجم جزء حجم و g_x مولفه شتاب جاذبه در جهت x است. همچنین تغییرات مومنتوم در اثر تجمع در جزء حجم لازم است که در جهت x تصویر شود.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x V) \quad \text{در امتداد محور } x:$$

مقدار A_x ، S_y ، W_z و V که در هر قسمت آمده با روابط زیر مشخص می‌شوند:

$$A_x = dzdy, \quad S_y = dzdx, \quad W_z = dxdy, \quad V = dxdydz$$

با جایگذاری عبارت معرفی شده در معادله موازنه مومنتوم، سپس با کمک بسط سری تیلور و ساده کردن عبارت‌ها، معادله زیر برای مولفه مومنتوم در امتداد محور x حاصل می‌شود:

$$\frac{d(\rho u_x)}{dt} + \frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_x)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial P_x}{\partial x} - \rho g_x = 0$$

برای تکمیل کار لازم است معادله مومنتوم هم زمان با معادله پیوستگی نوشته شود، زیرا عبارت ρu_x دارای دو تابع ρ و u_x است. بنابراین با کمک معادله پیوستگی در مختصات کارتزین:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right) = 0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial P_x}{\partial x} - \rho g_x = 0$$

معادله بالا معادله حرکت در مختصات کارتزین در امتداد محور x ها است. به روش مشابه با نوشتن معادله حرکت در امتداد محور x ها خواهیم داشت:

مؤلفه x: $\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial P_x}{\partial x} - \rho g_x = 0$
مؤلفه y: $\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial P_y}{\partial y} - \rho g_y = 0$
مؤلفه z: $\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial P_z}{\partial z} - \rho g_z = 0$

در روابط بالا چنانچه گرانروی سیال ثابت باشد معادله‌های حالت به نام نویه استوکس حاصل می‌شوند. در سیال نیوتونی و تراکم ناپذیر و با فرض عدم وجود حرکت‌های چرخشی، عبارت‌های تنش به صورت زیر جایگزین می‌شود:

$$\begin{array}{lll} \tau_{xx} = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} & \tau_{xy} = -\mu \frac{\partial u_y}{\partial x} & \tau_{xz} = -\mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \tau_{yx} = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial y} & \tau_{yy} = -\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} & \tau_{yz} = -\mu \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \tau_{zx} = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{zy} = -\mu \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{zz} = -\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array}$$

پس از جایگذاری روابط بالا در معادله‌های حرکت در مختصات کارتزین، معادلات زیر حاصل می‌شود.

مؤلفه x: $\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \rho g_x$
مؤلفه y: $\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial P_y}{\partial y} + \rho g_y$
مؤلفه z: $\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial P_z}{\partial z} + \rho g_z$

اگر معادلات حرکت در مختصات استوانه‌ای و کروی نیز نوشته شوند، برای سیال نیوتونی و تراکم ناپذیر معادلات زیر حاصل می‌شود.

مختصات استوانه‌ای:

مؤلفه r: $\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}\right) =$ $\mu\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial(u_r)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r$
مؤلفه θ: $\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) =$ $\mu\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial(u_\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta$
مؤلفه z: $\rho\left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] =$ $\mu\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$

مختصات کروی:

مؤلفه r :

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) =$$

$$\mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r$$

مؤلفه θ :

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) =$$

$$\mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

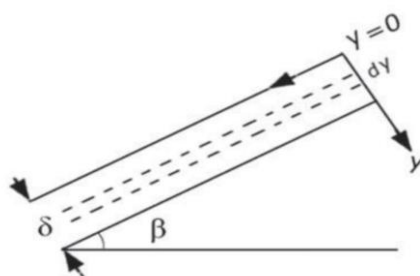
مؤلفه ϕ :

$$\rho \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} \cot \theta \right) =$$

$$\mu \left(\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \rho g_\phi$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

مثال: مطابق شکل زیر مایعی روی سطحی به شیب β در حال حرکت است. ضخامت فیلم مایع روی سطح δ و طول سطح شیبدار L می باشد. توزیع سرعت حرکت سیال را به دست آورید.



با توجه به شکل بالا، حرکت سیال در جهت x مهم است. بنابراین برای تعیین تغییرات سرعت از معادله نویه استوکس برای مختصات کارتزین و در جهت x استفاده می شود. به دلیل وجود اصطکاک در دیواره، سرعت حرکت u_x تابعی از ضخامت فیلم مایع می باشد.

فرض های مدل: سیال تراکم ناپذیر و دارای گرانروی ثابت است. سیال فقط در جهت x حرکت می کند. سامانه در شرایط پایا قرار دارد. سطح آزاد مایع سبب ثابت ماندن فشار هیدرواستاتیکی در مسیر x می شود.

برای نوشتن معادله حرکت سیال در این مسئله می‌توان به دو روش عمل کرد:

روش اول: یک جزء حجمی مکعبی با ابعاد dx , dy و عمق واحد در داخل سیال در نظر گرفته و با توجه به فرضیات مسئله برآیند نیروها را در امتداد محور x مشخص کرد.

روش دوم: می‌توان معادله حرکت را در مختصات کارتزین و در امتداد محور x مطابق معادله زیر نوشته و بر اساس فرضیات موجود آن را ساده کرد:

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \rho g_x$$

در این مسئله از روش دوم استفاده می‌شود، بنابراین با توجه به فرضیات مسئله:

$$u_z, u_y \approx 0, \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0, \frac{\partial P_x}{\partial x} = 0, \frac{\partial u_x}{\partial z}, \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0, g_x = g \sin \beta$$

حال برای تعیین $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ از معادله پیوستگی سیال تراکم‌ناپذیر استفاده می‌شود. یعنی:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

با توجه به ناچیز بودن u_y و u_z نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

بنابراین u_x در جهت x ثابت و در نتیجه مشتق دوم u_x نیز صفر می‌شود، یعنی:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0$$

با جایگذاری تمام عبارت‌های در معادله نویه استوکس، معادله حرکت به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g \sin \beta = 0$$

به دلیل ناچیز بودن u_y و u_z نیازی به معادله‌های حرکت برای مولفه‌های y و z نیست.

شرایط مرزی:

چون سرعت حرکت در سطح سیال، بیشینه است، بنابراین:

$$y=0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad \text{یا} \quad u_x = u_{max}$$

در ناحیه تماس سیال با سطح دیواره نیز شرط مرزی سکون برقرار است:

$$y=\delta, \quad u_x=0$$

به این ترتیب با حل معادله دیفرانسیلی معمولی رتبه دوم بالا با دو شرط مرزی توزیع سرعت حرکت سیال به دست می‌آید:

$$u_x = \frac{\rho g \sin \beta}{2\mu} (\delta^2 - y^2)$$

و یا:

$$u_x = u_{max} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]$$

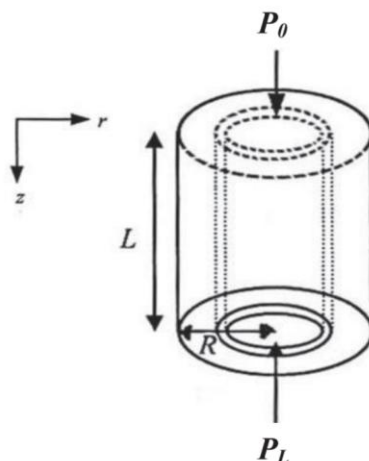
$$u_{max} = \frac{\rho g \sin \beta}{2\mu} \delta^2$$

با وجود فرضیاتی که در این مسئله برقرار است، یعنی تراکم‌ناپذیر بودن سیال و عدم وجود u_y و u_z ، نتیجه شد که u_x فقط تابع y است. برای استفاده از روش اول در این مسئله می‌توان جزء حجم را به صورت یک لایه نازک به ضخامت dy در نظر گرفت و فقط نیروهای ناشی از تنش برشی و وزن سیال را در جهت محور x تصویر کرد.

مثال: یک سیال نیوتونی تراکم‌ناپذیر با جریان آرام در لوله‌ای قائم به ارتفاع L و شعاع R ، مطابق شکل زیر جریان دارد. فشار هیدرواستاتیکی سیال در ورود و خروج از لوله به ترتیب P_0 و P_L است. نیم رخ سرعت را در لوله به دست آورید. مسئله را به دو روش زیر حل کنید:

الف) با استفاده از معادله کلی حرکت و اعمال فرضیات ساده‌کننده.

ب) انتخاب جزء حجم و انجام فرمول‌بندی معادله حرکت با فرضیات موجود.



حل قسمت الف: با توجه به اینکه سیال تراکم‌ناپذیر و حرکت به صورت یک‌بعدی و در جهت ارتفاع است، از سرعت در جهت‌های دیگر یعنی u_θ و u_r صرف نظر می‌شود، بنابراین معادله حرکت برای سیال نیوتونی و تراکم‌ناپذیر در مختصات استوانه‌ای فقط در جهت z و به صورت معادله زیر انتخاب می‌شود:

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

همراه با معادله مومنتموم، معادله پیوستگی نیز برای سیال تراکم‌ناپذیر در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z) = 0$$

همچنین فرض‌های مسئله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \quad (1) \text{ شرایط پایا برقرار است:}$$

$$u_\theta, u_r = 0 \quad (2) \text{ سرعت سیال در جهت‌های } r \text{ و } \theta \text{ ناچیز است:}$$

(۳) با توجه به معادله پیوستگی نتیجه می‌شود: $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ، بنابراین مشتق دوم نیز صفر است:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \quad (4) \text{ } u_z \text{ تابع } \theta \text{ نیست:}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0$$

(۵) لوله عمودی است:

$$g_z = g$$

با توجه به فرضیات بالا، معادله نویه استوکس به صورت زیر ساده می گردد:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial P_z}{\partial z} + \rho g = 0$$

با حرکت سیال در لوله، فشار هیدرواستاتیکی در طول لوله تغییر می کند که بر حسب فشار ورودی و خروجی به صورت تابعی خطی از طول لوله به دست می آید:

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{P_L - P_0}{L}$$

در این صورت معادله بالا به یک دیفرانسیل معمولی رتبه دوم تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + A &= 0 \\ A &= \rho g - \frac{(P_L - P_0)}{L} \end{aligned}$$

پس از حل معادله نهایی خواهیم داشت:

$$u_z = A \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2$$

شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} r=0, \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 0 \quad \text{یا} \quad u_z = \text{محدود} \\ r=R, u_z &= 0 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه در $r=0$ سرعت محدود است، بنابراین باید C_1 صفر باشد و با توجه به شرط مرزی جداره لوله،

$$C_2 = -A \frac{R^2}{4\mu}$$

مقدار C_2 تعیین می شود و در نتیجه جواب نهایی حاصل

می شود:

$$u_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g \right) \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

حل قسمت ب: در این روش از ابتدا با توجه به فرضیات مسئله و استفاده از جزء حجم مناسب در داخل سیال، فرمول‌بندی معادله حرکت شروع می‌شود. با توجه به تراکم‌ناپذیر بودن سیال و ناچیز بودن سرعت‌های u_θ و u_r نتیجه می‌شود که مقدار u_z در جهت z و فقط تابعی از شعاع استوانه است. بنابراین مطابق شکل بالا یک جزء حجم استوانه‌ای به ضخامت dr در نظر گرفته می‌شود و نیروهای وارد بر این جزء حجم در جهت z نوشته می‌شود:

بر اساس فرض‌های مدل:

(۱) با توجه به تراکم‌ناپذیر بودن سیال، u_z در جهت z ثابت است. بنابراین تغییرات مومنتوم در اثر حرکت کلی سیال در جهت z صفر می‌شود:

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_z)|_{z+dz} = 0$$

(۲) به علت ثابت بودن سرعت در جهت z ، از تغییرات تنش عمودی در جهت z نیز صرف نظر می‌شود:

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) = 0$$

(۳) به علت وجود نیروی اصطکاک، مماس بر سطح جانبی جزء حجم تغییرات تنش برشی در جهت r وجود دارد:

$$(\tau_{rz}A)_r - (\tau_{rz}A)_{r+dr} \neq 0$$

(۴) به علت اختلاف فشار هیدرواستاتیک در بالا و پایین لوله تغییرات تنش عمودی در جهت z وجود دارد:

$$(PS)_z - (PS)_{z+dz} \neq 0$$

(۵) نیروی وزن جزء حجم نیز در جهت z غیر صفر است:

(۶) به علت پایا بودن جریان سیال در این مسئله، تجمع مومنتوم صفر است.

با توجه به موارد بالا برابری نیروها در جهت z نوشته می‌شود:

$$0 = \text{نیروی وزن} + \text{نیروی فشار خروجی} - \text{نیروی فشار ورودی} + \text{تنش برشی خروجی} - \text{تنش برشی ورودی}$$

$$(\tau_{rz}A)_r - (\tau_{rz}A)_{r+dr} + (P_0S)_{z=0} - (P_L S)_{z=L} + \rho g V = 0$$

V جزء حجم، A سطح جانبی و S سطح مقطع جزء حجم است. به طوری که:

$$V = 2\pi L r dr \text{ و } S = 2\pi r dr \text{ ، } A_r = 2\pi r L$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(\tau_{rz} 2\pi r L)_r dr + (P_0 - P_L) 2\pi r dr + \rho g (2\pi r L dr) = 0$$

طرفین معادله بالا بر تقسیم شده و به جای معادله گرانیوی نیوتن جایگذاری می‌شود. نتیجه حاصل به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{P_0 - P_L}{L} + \rho g = 0$$

معادله حاصل با اعمال شرایط مرزی مانند روش قبل قابل حل است.

نگاهی به حل معادلات دیفرانسیلی

حل معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه اول

هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول را می توان به شکل کلی زیر بیان کرد:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

و یا به صورت:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

معادلات بالا، معادلات دیفرانسیلی مرتبه اول ($n = 1$) می باشد. بنابراین جواب عمومی آن ها شامل یک ثابت (C_1) خواهد بود. البته با توجه به نوع تابع $f(x, y)$ و یا $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ روش های مختلفی را می توان برای حل این معادلات به کار برد.

(۱) روش جداسازی متغیرها:

اگر در معادله دیفرانسیلی معمولی بالا، مقادیر توابع $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ به صورت $P(x, y) = f_1(x)g_1(y)$ و $Q(x, y) = f_2(x)g_2(y)$ تعریف شوند، آن گاه خواهیم داشت:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

با تقسیم کردن طرفین رابطه فوق بر $f_2(x)g_1(y)$ داریم:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

اکنون متغیرها از یکدیگر جدا شده اند و می توان با انتگرال گیری از طرفین معادله بالا جواب معادله را به دست آورد.

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c$$

(۲) روش فاکتور انتگرال:

به کمک روش فاکتور انتگرال می توان معادلات خطی مرتبه اول را که به شکل کلی زیر می باشد، حل نمود:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x)$$

بر اساس این روش مقدار $\mu = e^{\int p dx}$ تعریف می شود که با ضرب آن در طرفین معادله خواهیم داشت:

$$d(\mu y) = \mu r$$

برای حل معادله بالا از معادله انتگرال می گیریم:

$$\mu y = \int \mu r dx + c \rightarrow y = \frac{1}{\mu} [\int \mu r dx + c]$$

که با جایگذاری μ در معادله فوق و بعد از ساده سازی خواهیم داشت:

$$y = e^{-\int p dx} [\int r e^{\int p dx} dx + c]$$

(۳) معادله برنولی (بر پایه تغییر متغیر):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0,1$$

این معادله مشابه با معادله عامل انتگرال ساز است. با این تفاوت که y^n در طرف راست معادله ظاهر شده است. با تقسیم دو طرف معادله بر y^{1-n} نتیجه می شود:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

سپس تابع جدیدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$u = y^{1-n}$$

از دو طرف معادله بالا دیفرانسیل گرفته می شود:

$$du = (1-n)y^{-n} dy$$

با جایگذاری دو عبارت بالا، در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$\left(\frac{1}{1-n}\right) \frac{du}{dx} + P(x) u = Q(x)$$

معادله بالا به روش عامل انتگرال ساز قابل حل هست که تابع $u(x)$ به دست می آید و در نتیجه آن $y(x)$ حاصل می شود.

معادلات دیفرانسیلی مرتبه n

بطور کلی معادله دیفرانسیلی مرتبه n را می توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

اگر کلیه ضرایب $a_0, a_1, \dots$ مقادیر ثابت باشند به معادله بالا اصطلاحاً معادله دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت گفته می شود و اگر حداقل یکی از ضرایب تابعی از x باشند به آن معادله دیفرانسیلی خطی با ضرایب متغیر گویند.

اگر حداقل یکی از ضرایب $a_0, a_1, \dots$ و ... تابعی از y و یا مشتقات آن باشد معادله دیفرانسیلی یک معادله دیفرانسیلی غیرخطی خواهد بود. همچنین اگر $f(x) = 0$ معادله همگن یا هموژن نامیده می‌شود و اگر $f(x) \neq 0$ آنگاه معادله یک معادله غیرهمگن یا هتروژن نامیده می‌شود.

حل معادله دیفرانسیل بالا در دو حالت بررسی می‌شود، حالت اول اگر $f(x) = 0$ باشد، معادله دارای جواب‌هایی است که اصطلاحاً به آن جواب قسمت همگن معادله گویند و با $y_h(x)$ نشان داده می‌شود و حالت دوم اگر $f(x) \neq 0$ باشد آنگاه معادله علاوه بر جواب قسمت همگن دارای جوابی است که به آن جواب قسمت غیر ناهمگن معادله (یا جواب خاص) گویند و با $y_p(x)$ نشان داده می‌شود. بطور کلی جواب نهایی معادله بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

قسمت همگن معادله با توجه به درجه معادله، دارای n جواب می‌باشد. همچنین جواب قسمت ناهمگن بر حسب نوع تابع $f(x)$ متفاوت خواهد بود.

(۱) حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضرایب ثابت

اگر کلیه ضرایب معادله دیفرانسیلی مقادیر ثابتی باشد خواهیم داشت:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

همانطور که پیش‌تر بیان شد جواب معادله فوق از دو قسمت همگن و غیر همگن تشکیل شده است و جواب نهایی به صورت $y = y_h + y_p$ می‌باشد.

• جواب قسمت همگن:

برای به دست آوردن جواب قسمت همگن (y_h) معادله بالا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

به طور کلی $y = e^{\lambda x}$ جواب کلی معادله می‌باشد. با قرار دادن آن در معادله و بعد از ساده کردن داریم:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ جواب‌های معادله درجه n فوق می‌باشند.

بر حسب مقادیر مختلف $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ سه حالت قابل بررسی است:

- اگر تمام ریشه‌های λ مقادیر حقیقی و نابرابر باشند، در این صورت جواب قسمت همگن معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

- اگر تعدادی از ریشه‌ها مختلط باشند، در این صورت برای ریشه‌های حقیقی جواب مانند قسمت قبل بوده و برای ریشه‌های موهومی (برای مثال $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$) جواب بصورت زیر خواهد بود:

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

- اگر تعداد k ریشه با هم برابر باشند یعنی $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = m$ آنگاه جواب برای k ریشه به صورت زیر می‌باشد:

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}) e^{mx}$$

به عنوان مثال برای یک معادله همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت خواهیم داشت:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$$

و در نتیجه معادله مشخصه زیر حاصل می‌شود:

$$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه بر حسب علامت دلتا به سه صورت تعیین می‌شوند که در نتیجه آن، دو جواب برای معادله بالا به دست می‌آید. در نهایت جواب عمومی معادله از ترکیب خطی جواب‌ها حاصل می‌گردد. در جدول زیر ریشه‌های معادله مشخصه همراه با جواب عمومی در حالت‌های مختلف ارائه شده است:

Δ	ریشه‌های معادله مشخصه	y_1, y_2	جواب عمومی
$\Delta > 0$	$r_1 = \alpha$ $r_2 = \beta$	$y_1 = \exp(\alpha x)$ $y_2 = \exp(\beta x)$	$y = C_1 \exp(\alpha x) + C_2 \exp(\beta x)$
$\Delta = 0$	$r_1 = r_2 = \gamma$	$y_1 = \exp(\gamma x)$ $y_2 = x \exp(\gamma x)$	$y = C_1 \exp(\gamma x) + C_2 x \exp(\gamma x)$
$\Delta < 0$	$r_1 = \lambda + i\omega$ $r_2 = \lambda - i\omega$	$y_1 = \exp[(\lambda + i\omega)x]$ $y_2 = \exp[(\lambda - i\omega)x]$	$y = \exp(\lambda x) [C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)]$

$$\alpha, \beta = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_0}, \quad \gamma = \frac{-a_1}{2a_0}, \quad \lambda = \frac{-a_1}{2a_0}, \quad \omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_0} \quad \Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2$$

• جواب قسمت ناهمگن:

جواب قسمت غیرناهمگن (y_p) را می‌توان بر حسب شکل تابع $f(x)$ تعریف نمود. برای مثال اگر تابع $f(x)$ بصورت $f(x) = Ae^{mx}$ باشد (A و m مقادیر مشخصی باشند) آنگاه می‌توان y_p را بصورت $y_p = ke^{mx}$ تعریف نمود و فقط کافیه مقدار y_p را در معادله اصلی قرار داده و مقدار مجهول k را بدست آورد. به طور کلی از جدول زیر می‌توان برای انواع مختلف تابع $f(x)$ استفاده نمود:

$f(x)$	y_p
Ae^{mx}	ke^{mx}
$A \cos mx + B \sin mx$	$k_1 \cos mx + k_2 \sin mx$
$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$	$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_0$
$e^{nx} (A \cos mx + B \sin mx)$	$e^{nx} (k_1 \cos mx + k_2 \sin mx)$
$e^{nx} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0)$	$e^{nx} (k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_0)$

در جدول فوق، ضرایب $k, k_0, k_1, \dots$ و k_n مجهول می‌باشند که با قرار دادن رابطه y_p در معادله اصلی مقادیر مجهول به دست می‌آیند.

نکته: اگر در جواب‌های بدست آمده برای y_p جملاتی شبیه به جملات y_h ایجاد شود آنگاه جملات مشابه در y_p را در x^N ضرب نموده (N کوچک‌ترین توان مثبت است) تا این جملات با تمامی جملات موجود در y_h غیر مشابه باشند.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 3y = 4x^2 + 3x$$

جواب این معادله به صورت مجموع دو جواب همگن و خصوصی، به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$y = y_H + y_P$$

حل قسمت همگن معادله:

$$\frac{d^2 y_H}{dx^2} + \frac{dy_H}{dx} - 3y_H = 0$$

$$y_H = A \exp(1.3x) + B \exp(2.3x)$$

برای تعیین جواب خصوصی، یک چند جمله‌ای از x مشابه با طرف دوم معادله سوال، یعنی یک چند جمله‌ای درجه دوم با ضرایب نامعین انتخاب می‌شود:

$$y_P = ax^2 + bx + c$$

با قرار دادن y_p در دو طرف معادله اصلی ضرایب a ، b و c تعیین می‌شود.

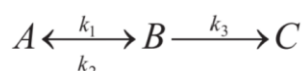
$$a = -\frac{4}{3}, b = -\frac{17}{9}, c = -\frac{8}{9}$$

در نتیجه جواب کلی معادله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$y = A \exp(1.3x) + B \exp(2.3x) - \frac{4}{3}x^2 - \frac{17}{9}x - \frac{8}{9}$$

در تعیین جواب خصوصی این نوع معادلات باید دقت کرد که جواب‌های تکراری نسبت به جواب‌های همگن ایجاد نشود.

مثال: واکنش سری و ابتدایی زیر در یک واکنش‌گاه نیمه پیوسته هم‌زن‌دار در شرایط حجم و دمای ثابت انجام می‌شود. در ابتدا مواد واکنش‌گر در واکنش‌گاه موجود نمی‌باشد. جریانی از ماده A با غلظت C_0 و نرخ حجمی v_0 به واکنش‌گاه تزریق می‌شود.



الف) با توجه به مدل‌سازی توده‌ای، روابط ریاضی تغییرات مول‌های A و B را نسبت به زمان در واکنش‌گاه بنویسید و نشان دهید که تغییرات مول‌های B نسبت به زمان از معادله دیفرانسیل رتبه دوم زیر پیروی می‌کند.

$$\frac{dn_B^2}{dt^2} + (k_1 + k_2 + k_3) \frac{dn_B}{dt} + (k_1 k_3) n_A = k_1 C_0 v_0$$

ب) این معادله را حل کنید و تابع $n_B(t)$ را به دست آورید.

فرض‌ها: سیال تراکم‌ناپذیر است. دمای واکنش‌گاه ثابت است. مول‌های اولیه A ، B و C در داخل واکنش‌گاه صفر است. واکنش‌های ابتدایی هستند.

قسمت الف:

فرمول‌بندی: موازنه جزء مولی A و B در حجم کنترل (محلول واکنش) به ترتیب، به صورت توده‌ای انجام می‌شود:

$$C_0 v_0 + r_A V = \frac{dn_A}{dt}$$

$$r_B V = \frac{dn_B}{dt}$$

سرعت واکنش مصرف A و سرعت واکنش تولید B به ترتیب به صورت زیر است (*):

$$\begin{aligned} -r_A &= k_1 C_A - k_2 C_B \\ r_B &= k_1 C_A - (k_2 + k_3) C_B \end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری r_B در معادله توده‌ای برای جزء B خواهیم داشت (*):

$$\frac{dn_B}{dt} = k_1 n_A - (k_2 + k_3) n_B$$

اگر چه حجم کنترل (حجم محلول واکنش‌گاه) در اثر ورود ماده A تغییر می‌کند ولی در این مسئله خاص، چون واکنش‌ها از درجه اول هستند، حجم محلول در معادله‌ها حذف شده و نیازی به تعیین آن نمی‌باشد. با مشتق‌گیری از معادله بالا بر حسب زمان خواهیم داشت:

$$\frac{dn_B^2}{dt^2} = k_1 \frac{dn_A}{dt} - (k_2 + k_3) \frac{dn_B}{dt}$$

چنانچه به جای $\frac{dn_A}{dt}$ در معادله بالا رابطه‌ی مربوط به موازنه توده‌ای A جایگذاری شود:

$$\frac{dn_B^2}{dt^2} = k_1 (C_0 \nu_0 - k_1 n_A + k_2 n_B) - (k_2 + k_3) \frac{dn_B}{dt}$$

سپس به جای n_A از معادله (*) استفاده کرده و بر حسب n_B جایگذاری می‌کنیم. که در این صورت معادله بالا فقط بر حسب n_B و مشتق آن به دست می‌آید و پس از مرتب کردن، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{dn_B^2}{dt^2} + \frac{dn_B}{dt} (k_1 + k_2 + k_3) + k_1 k_3 n_B = k_1 C_0 \nu_0$$

قسمت ب: برای حل این مسئله احتیاج دبه دو شرط اولیه داریم که هر دو در $t=0$ معلوم هستند. به طوری که در زمان اولیه هیچ ماده‌ای در واکنش‌گاه موجود نیست. بنابراین:

$$t=0: \quad n_A = n_B = n_C = 0$$

و همچنین در زمان اولیه می‌توان از معادله جزء مولی B استفاده کرد:

$$t=0: \quad \frac{dn_B}{dt} = r_B V = k_1 n_A - (k_2 + k_3) n_B$$

و از آنجا که مول‌های اولیه در ظرف صفر است، بنابراین:

$$\frac{dn_B}{dt}(0) = 0$$

برای حل معادله اگر فرض شود $P = k_1 C_0 v_0$ ، $Q = k_1 + k_2 + k_3$ و $R = k_1 k_3$. معادله نهایی به دست آمده در قسمت قبل به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dn_B^2}{dt^2} + Q \frac{dn_B}{dt} + R n_B = P$$

با شرایط اولیه:

$$t = 0: \quad n_B = 0, \quad \frac{dn_B}{dt} = 0$$

معادله بالا یک معادله ODE مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت است، بنابراین می‌توان از مجموع دو جواب همگن و خصوصی استفاده کرد:

$$n_B = Y_H + Y_P$$

جواب همگن:

$$Y_H = A \exp(a_1 t) + B \exp(a_2 t)$$

با فرض اینکه $Q^2 > 4R$ معادله دو جواب حقیقی دارد:

$$a_1, a_2 = \frac{-Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - R}$$

جواب خصوصی معادله نیز عبارت است از:

$$Y_P = \frac{P}{R} = \frac{C_0 v_0}{k_3}$$

بنابراین جواب عمومی مساله عبارت است از:

$$n_B = A \exp(a_1 t) + B \exp(a_2 t) + \frac{C_0 v_0}{k_3}$$

با جایگذاری شرایط اولیه:

$$t = 0: \quad \begin{cases} n_B = 0 \Rightarrow A + B = \frac{-C_0 v_0}{k_3} \\ \frac{dn_B}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{A}{B} = -\frac{a_2}{a_1} \end{cases}$$

در این صورت:

$$B = \frac{a_1 C_0 v_0}{k_3 (a_2 - a_1)} \quad A = \frac{a_2 C_0 v_0}{k_3 (a_1 - a_2)}$$

به این ترتیب با داشتن $n_B(t)$ می‌توان $n_A(t)$ را با حل معادله توده‌ای برای جزء A به دست آورد.

۲) حل معادلات دیفرانسیل خطی رتبه دوم با ضرایب متغیر

شکل کلی یک معادله خطی همگن با ضرایب متغیر به صورت زیر است:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0$$

معمولا حل تحلیلی این معادله‌ها به کمک چند جمله‌ای‌ها انجام می‌شود. به این ترتیب که تابع y ، به صورت یک چند جمله‌ای توانی در نظر گرفته می‌شود، سپس با جایگزین کردن آن در معادله دیفرانسیل، پارامتر نمای چند جمله‌ای و کلیه ثابت‌های آن تعیین می‌گردد. این روش به نام روش فروبنوس شناخته می‌شود. شرایط اعمال این روش این است که توابع $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ در محدوده مورد بررسی توابع پیوسته و معین باشند.

الف) معادله کوشی یا اویلر

شکل این معادله به صورت زیر است:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0$$

به طوری که a و b ثابت هستند. چنانچه ملاحظه می‌شود، هر سه معادله دارای ابعاد یکسان هستند. این معادله را می‌توان از راه ساده‌تری، با یک تغییر متغیر، به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل و سپس با استفاده از عملگر مشتق آن را به صورت زیر حل کرد.

با اعمال تغییر متغیر $z = \ln(x)$ و جایگزین کردن آن در مشتق اول و دوم معادله بالا:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$$

و پس از جایگذاری در معادله بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (a-1) \frac{dy}{dz} + by = 0$$

به این ترتیب معادله اولیه به معادله بالا با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود که معادله مشخصه آن عبارت است از:

$$r^2 + (a-1)r + b = 0$$

در این صورت بر حسب علامت دلتا سه حالت پیش می‌آید و در نهایت تابع y به صورت جدول زیر به دست می‌آید:

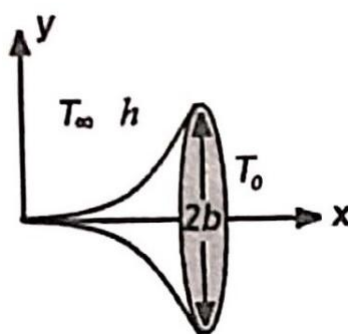
Δ	ریشه‌های معادله مشخصه	y_2, y_1	جواب عمومی
$\Delta > 0$	r_1, r_2	$y_1 = x^{r_1}$ $y_2 = x^{r_2}$	$y = Ax^{r_1} + Bx^{r_2}$
$\Delta = 0$	$r_1 = r_2 = r$	$y_1 = x^r$ $y_2 = x^r \ln x$	$y = Ax^r + Bx^r \ln x$
$\Delta < 0$	$\begin{cases} r_1 = \delta + i\beta \\ r_2 = \delta - i\beta \end{cases}$	$\begin{cases} y_1 = x^\delta \sin(\beta \ln x) \\ y_2 = x^\delta \cos(\beta \ln x) \end{cases}$	$y = x^\delta \left[A \sin(\beta \ln x) + B \cos(\beta \ln x) \right]$

$$r_{1,2} = \frac{1-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (a-1)^2 - 4b, \quad \delta = \frac{1-a}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

مثال: در شکل زیر یک پره سوزنی با نیم رخ هذلولی ($y = Cx^2$) نشان داده شده است. ضریب هدایت حرارتی، ضخامت پایه و طول پره به ترتیب K ، $2b$ و L است. دما و ضریب انتقال حرارت محیط به ترتیب T_∞ و h می‌باشد. تعیین کنید: (C عدد ثابت)

الف) توزیع دمای یک بعدی پره در شرایط پایا

ب) نرخ انتقال حرارت



$$q_x - q_{x+dx} - (dSh(T - T_{\infty})) = 0, dS = 2\pi y dx$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \rightarrow q_x - q_x - \frac{dq_x}{dx} dx - (dSh(T - T_{\infty})) = 0$$

$$- \frac{dq_x}{dx} dx - (dSh(T - T_{\infty})) = 0$$

$$- \frac{d(q_x'' A)}{dx} dx - (dSh(T - T_{\infty})) = 0, dS = 2\pi y dx, A = \pi y^2$$

$$- \frac{d(q_x'' y^2)}{dx} - (2yh(T - T_{\infty})) = 0, y = Cx^2$$

$$- \frac{d(q_x'' C^2 x^4)}{dx} - (2C x^2 h(T - T_{\infty})) = 0, q_x'' = -k \frac{dT}{dx}, k = cte$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^4 \frac{dT}{dx} \right) - \frac{(2x^2 h(T - T_{\infty}))}{kC} = 0, \theta = T - T_{\infty}$$

پس از تغییر متغیر:

$$\frac{d}{dx} \left(x^4 \frac{d\theta}{dx} \right) - \frac{(2x^2 h\theta)}{kC} = 0$$

معادله کوشی-اوایلر:

$$x^4 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 4x^3 \frac{d\theta}{dx} - \frac{2h}{kC} x^2 \theta = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 4x \frac{d\theta}{dx} - \frac{2h}{kC} \theta = 0$$

تغییر متغیر:

$$z = \ln(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{dy^2}{dz^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + 3 \frac{d\theta}{dz} - \frac{2h}{kC} \theta = 0$$

$$\Delta = 9 + \frac{8h}{kC}$$

$$r_1, r_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + \frac{8h}{kC}}}{2}$$

$$\theta = C_1 e^{\left(\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8h}{kC}}}{2}\right)z} + C_2 e^{\left(\frac{-3-\sqrt{9+\frac{8h}{kC}}}{2}\right)z}$$

$$\theta = C_1 x^{\left(\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8h}{kC}}}{2}\right)} + C_2 x^{-\left(\frac{3+\sqrt{9+\frac{8h}{kC}}}{2}\right)}$$

$$T(0) \text{ محدود} \rightarrow \theta(0) \text{ محدود} \rightarrow c_2 = 0$$

$$\theta = c_1 x^{\left(\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8h}{kC}}}{2}\right)}$$

$$T(L) = T_0 \rightarrow \theta(L) = \theta_0$$

$$c_1 = \frac{\theta_0}{L^{\left(\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8h}{kC}}}{2}\right)}}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8h}{kC}}}{2}}$$

$$y = Cx^2 \rightarrow b = CL^2 \rightarrow C = \frac{b}{L^2}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8hL^2}{kb}}}{2}}$$

$$\theta = \theta_0 \frac{x^{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8hL^2}{kb}}}{2}}}{L^{-3+\sqrt{9+\frac{8hL^2}{kb}}}}$$

$$q = -kA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = -k(\pi b^2) \frac{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8hL^2}{kb}}}{2}}{L^{\frac{-3+\sqrt{9+\frac{8hL^2}{kb}}}{2}}} L^{\frac{-5+\sqrt{9+\frac{8hL^2}{kb}}}{2}} = -k(\pi b^2) \frac{-3+\sqrt{9+\frac{8hL^2}{kb}}}{L}$$

ب) معادله بسل

شکل معادله بسل به صورت زیر است:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2)y = 0$$

v رتبه معادله است که ممکن است صفر، عدد صحیحی یا اعشاری باشد. این معادله به روش فروبنوس حل می‌شود. ابتدا تابع y به صورت چند جمله‌ای زیر تعریف می‌شود:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

پس از حل معادله، جواب برای $v+1$ به صورت مجموعه زیر می‌باشد. این مجموعه را تابع بسل با رتبه‌ی v از متغیر x گویند که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)} x^{2k+v}$$

با تبدیل v به $-v$ در معادله بالا، جواب دیگر معادله بسل حاصل می‌شود:

$$J_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k-v} k! \Gamma(k-v+1)} x^{2k-v}$$

به این صورت جواب عمومی برای معادله بسل بالا در صورتی که v عدد اعشاری باشد، به صورت زیر است:

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x)$$

جواب عمومی بالا در صورتی قابل قبول است که v عدد اعشاری باشد. به دلیل اینکه اگر v صفر یا یک عدد صحیح باشد، $J_v(x)$ و $J_{-v}(x)$ مستقل از یکدیگر نمی‌باشد، به طوری که:

$$v=n \text{ (عدد صحیح)}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

در این حالت جواب دوم به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$Y_v(x) = J_v(x) \ln(x) - \sum_{k=0}^{v-1} \frac{(v-k-1)!}{2^{2k-v} k!} x^{2k-v} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{[\varphi(k) + \varphi(k+v)]}{2^{2k-v} (v+k)!} x^{2k+v}$$

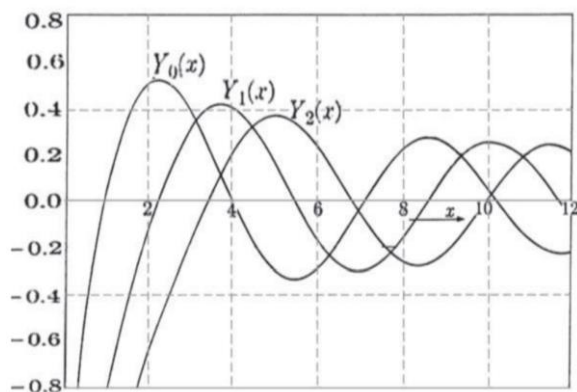
$$\varphi(0) = 0 \text{ و } \varphi(k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \text{ و } v = n \text{ (عدد صحیح)}$$

بنابراین در مواقعی که رتبه (v) عدد صحیح یا صفر باشد، جواب عمومی به صورت ترکیب خطی از جواب‌های زیر می‌باشد، یعنی:

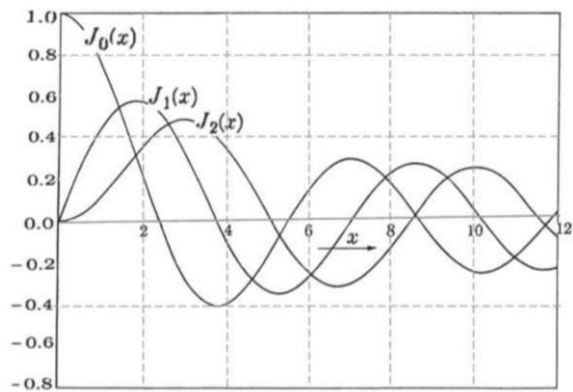
$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

شکل زیر، نمودارهای تابع بسل نوع اول و تابع بسل نوع دوم را با رتبه‌های صفر، یک و دو را نشان می‌دهد. چنانچه ملاحظه می‌شود، تشابه این دو تابع در نوسانی بودن و تفاوت آن‌ها در این است که تابع بسل نوع اول در $x=0$ معین ولی بسل نوع دوم در $x=0$ نامعین است.

تابع بسل نوع دوم



تابع بسل نوع اول



پس به طور کلی در صورتی که معادله به صورت زیر باشد:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) y = 0$$

❖ اگر ν عدد صحیح یا صفر نباشد:

$$y = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 J_{-\nu}(\lambda x)$$

❖ اگر ν عدد صحیح یا صفر باشد:

$$y = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)$$

مثال: توزیع دمای حالت پایدار را در استوانه بلند به شعاع r که در آن تولید حرارت به ازای واحد حجم برابر $a + bT$ وجود دارد بدست آورید. دمای سطح استوانه در T ثابت است. a و b مقادیر ثابت و مثبت هستند). معادله و شرایط مرزی آن به صورت زیر است.

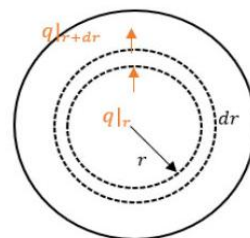
$$\frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + (a + bT) = 0$$

$$T(r) = T_s, \quad \frac{dT(\cdot)}{dr} = 0$$

تجمع = مصرف - تولید + خروجی - ورودی

$$q_r - q_{r+dr} + dV(a + bT) = 0$$

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{dq_r}{dr} dr \rightarrow q_r - q_r - \frac{dq_r}{dr} dr + dV(a + bT) = 0$$



$$- \frac{dq_r}{dr} dr + dV (a + bT) = .$$

$$- \frac{d(q_r'' A)}{dr} dr + dV (a + bT) = . , dV = \gamma \pi r dr L , A = \gamma \pi r L$$

$$- \frac{d(q_r'' (\gamma \pi r L))}{dr} dr + (\gamma \pi r dr L) (a + bT) = .$$

$$- \frac{d(r q_r'')}{dr} + (r)(a + bT) = . , q_r'' = -k \frac{dT}{dr} , k = cte$$

$$k \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + r(a + bT) = .$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{r}{k} (a + bT) = .$$

تغییر متغیر:

$$\theta = a + bT \rightarrow \frac{d\theta}{dr} = b \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + \frac{b}{k} r \theta = .$$

$$r \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{d\theta}{dr} + \frac{b}{k} r \theta = .$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} + \frac{b}{k} r^2 \theta = 0 , v = 0$$

$$\theta = c_1 J. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r \right) + c_2 Y. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r \right)$$

$$\theta = c_1 J. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r \right) + c_2 Y. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r \right)$$

$$\theta = a + bT \rightarrow T = \frac{1}{b} (\theta - a) = \frac{1}{b} \left(c_1 J. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r \right) + c_2 Y. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r \right) - a \right)$$

$$\frac{dT(\cdot)}{dr} = . \text{ یا } T(\cdot) \text{ محدود} \rightarrow c_2 = .$$

$$T = \frac{1}{b} \left(c_1 J. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r \right) - a \right)$$

$$T(r.) = T. \rightarrow c_1 = \frac{bT. + a}{J. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r. \right)}$$

$$T = \frac{1}{b} \left((bT. + a) \frac{J. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r. \right)}{J. \left(\sqrt{\frac{b}{k}} r. \right)} - a \right)$$

ب) معادله بسل تغییر یافته

معادله بسل تغییر یافته به صورت زیر می باشد:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + v^2) y = 0$$

در این صورت جواب معادله بالا به ازای مقادیر v به صورت زیر می باشد:

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+v}}{2^{2k+v} k! \Gamma(k+v+1)}$$

برای تعیین جواب دوم معادله بالا باید v را به $-v$ تبدیل کرد که در این صورت جواب عمومی، معادله ترکیب خطی از جواب ها خواهد بود:

$$y(x) = C_1 I_v(x) + C_2 I_{-v}(x)$$

در معادله بالا چنانچه v صفر یا عدد صحیح باشد، جواب دوم، $I_{-v}(x)$ ، مستقل نبوده و جواب دوم به صورت تابع بسل تغییر یافته نوع دوم $K_v(x)$ و با شکل کلی زیر می باشد:

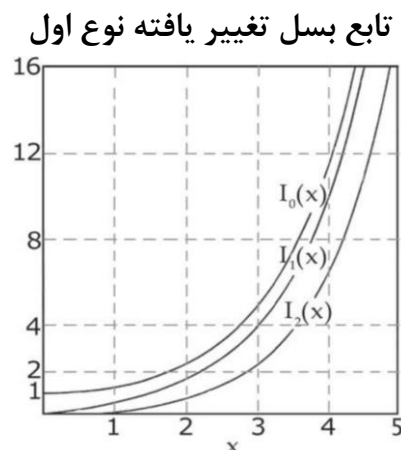
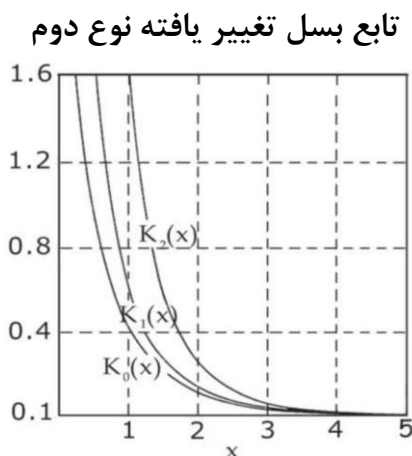
$$K_v(x) = (-1)^{v+1} I_v(x) \ln(x) + \sum_{k=0}^{v-1} (-1)^k \frac{(v-k-1)!}{2^{2k-v} k!} x^{2k-v} + (-1)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\varphi(k) + \varphi(k+v)]}{2^{2k-v} (v+k)!} x^{2k+v}$$

(عدد صحیح) $v = n$ و $\varphi(k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}$ و $\varphi(0) = 0$

بنابراین هنگامی که رتبه (v) صفر یا عدد صحیح باشد، جواب عمومی معادله بسل تغییر یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x)$$

شکل‌های زیر نمودار $I_v(x)$ و $K_v(x)$ دو تابع را برای رتبه‌های صفر، یک و دو نشان می‌دهد. شباهت این دو تابع در این هست که هیچ یک نوسانی نیستند. تفاوت آن‌ها در این است که تابع $I_v(x)$ در نقطه $x=0$ معین ولی $K_v(x)$ تابع در $x=0$ نامعین است.



پس به طور کلی در صورتی که معادله به صورت زیر باشد:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (\lambda^2 x^2 + v^2) y = 0$$

❖ اگر v عدد صحیح یا صفر نباشد:

$$y = C_1 I_v(\lambda x) + C_2 I_{-v}(\lambda x)$$

❖ اگر v عدد صحیح یا صفر باشد:

$$y = C_1 I_v(\lambda x) + C_2 K_v(\lambda x)$$

مثال: در حالت پایدار معادله نفوذ ماده واکنش‌کننده در کاتالیست استوانه‌ای به شعاع r با واکنش درجه اول غیر برگشتی ایزوترمال بصورت زیر است:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dC}{dr} \right) - \frac{K}{D} C = 0$$

$$\frac{dC(\cdot)}{dr} = 0 \text{ یا } C(\cdot) \text{ محدود}$$

$$C(r_s) = C_s$$

که K ، D و C_s به ترتیب تابع سرعت، ضریب نفوذ و غلظت روی سطح می‌باشد. با حل این معادله توزیع غلظت را به دست آورید.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dC}{dr} \right) - \frac{K}{D} r C = 0$$

$$r \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{dC}{dr} - \frac{K}{D} r C = 0$$

$$r^2 \frac{d^2 C}{dr^2} + r \frac{dC}{dr} - \frac{K}{D} r^2 C = 0$$

به ساختار کلی زیر توجه کنید:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (\lambda^2 x^2 + \nu^2) y = 0$$

در نتیجه می‌توان گفت که معادله مورد نظر، یک معادله بسل تغییر یافته با رتبه صفر می‌باشد و جواب آن به صورت زیر می‌باشد:

$$C = c_1 I. \left(\sqrt{\frac{K}{D}} r \right) + c_2 K. \left(\sqrt{\frac{K}{D}} r \right)$$

$$C(\cdot) \rightarrow c_2 = 0 \text{ محدود}$$

$$C = c_1 I. \left(\sqrt{\frac{K}{D}} r \right)$$

$$C(r) = C_s \rightarrow c_1 = \frac{C_s}{I. \left(\sqrt{\frac{K}{D}} r \right)}$$

$$\frac{C}{C_s} = \frac{I. \left(\sqrt{\frac{K}{D}} r \right)}{I. \left(\sqrt{\frac{K}{D}} r \right)}$$

(ب) شکل کلی معادله‌های بسل

در نتیجه فرمول‌بندی سامانه‌های واقعی معمولاً شکل‌های کلی‌تری از معادله‌های دیفرانسیل با ضرایب متغیر حاصل می‌شود که قابل تبدیل به معادله بسل هستند. به عنوان مثال معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{dy}{dx} \right) + \gamma^2 x^\beta y = 0$$

به طوری که α و β اعداد حقیقی بوده و می‌تواند یک عدد حقیقی یا موهومی باشد. می‌توان این معادله را با تغییر متغیر به شکل معادله بسل تبدیل کرد.

ابتدا متغیر مستقل به صورت $x = t^\mu$ تعریف می‌شود که با جایگذاری در معادله بالا به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t[\mu(\alpha - 1) + 1] \frac{dy}{dt} + \gamma^2 \mu^2 t^{\mu(\beta - \alpha + 2)} y = 0$$

حالت اول ($\beta - \alpha + 2 \neq 0$):

در این حالت μ در معادله بالا طوری انتخاب می‌شود که تساوی زیر برقرار باشد:

$$\mu(\beta - \alpha + 2) = 2 \Rightarrow \mu = \frac{2}{\beta - \alpha + 2}$$

بنابراین:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + at \frac{dy}{dt} + b^2 t^2 y = 0$$

به طوری که $a = \mu(\alpha - 1) + 1$ و $b = \gamma\mu$.

با تغییر متغیر $y = t^v z$ در معادله بالا به صورت $y = t^v z$ نتیجه می‌شود:

$$t^v \frac{d^2 z}{dt^2} + (a + 2v)t^{v-1} \frac{dz}{dt} + \{b^2 t^v + [(a-1)v + v^2] t^{v-2}\} z = 0$$

در این معادله v طوری انتخاب می‌شود که:

$$a + 2v = 1 \Rightarrow v = \frac{1-a}{2} \Rightarrow v = \frac{1-\alpha}{\beta - \alpha + 2}$$

سپس با تقسیم طرفین معادله بر t^{v-2} نتیجه می‌شود:

$$t^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + t \frac{dz}{dt} + (b^2 t^2 - v^2) z = 0$$

معادله بالا کاملاً مشابه معادله بسل است. در این صورت یک جواب معادله به صورت زیر است:

$$z(t) = Z_v(bt)$$

Z_v شکلی از انواع توابع بسل است که می‌تواند $(J_v, Y_v, I_v$ یا $K_v)$ باشد و (bt) نیز تغییر متغیر تابع بسل است. در این صورت تابع $y(t)$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$y(t) = t^\nu Z_v(\gamma \mu t)$$

$$t = x^{\frac{1}{\mu}} \text{ از آنجا که:}$$

بنابراین جواب معادله کلی به صورت زیر می‌شود:

$$y(x) = x^{\frac{\nu}{\mu}} Z_v(\gamma \mu x^{\frac{1}{\mu}})$$

لازم به ذکر است که معادله کلی دارای دو جواب خصوصی است، که جواب عمومی تابع $y(x)$ به صورت ترکیب خطی از جواب‌ها ارائه می‌شود. یعنی:

$$y(x) = C_1 x^{\frac{\nu}{\mu}} Z_v(|\gamma| \mu x^{\frac{1}{\mu}}) + C_2 x^{\frac{\nu}{\mu}} Z_{-v}(|\gamma| \mu x^{\frac{1}{\mu}})$$

به طوری که:

$$\nu = \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha+2} \text{ و } \mu = \frac{2}{\beta-\alpha+2}$$

بر حسب اینکه ν ، عدد صحیح یا کسری و γ عدد موهومی یا حقیقی باشد، شکل تابع بسل و جواب دوم معادله، مشخص می‌شود.

حالت دوم ($\beta - \alpha + 2 = 0$):

در این حالت ابتدا در معادله کلی، جمله اول را باز کرده و سپس دو طرف معادله را به $x^{\alpha-2}$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه به معادله کوشی یا اویلر به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \gamma^2 y = 0$$

که قبلاً با این معادله آشنا شده بودیم. در جدول خلاصه‌ای پاسخ‌های معادله کلی در شرایط مختلف ذکر شده است:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha \frac{dy}{dx}) + \gamma^2 x^\beta y = 0 \quad \text{جواب‌های معادله}$$

حالت اول:

$$\beta - \alpha + 2 \neq 0$$

یکی از جواب‌های معادله:

$$y_1(x) = x^{\frac{v}{\mu}} Z_v(|\gamma| \mu x^{\frac{1}{\mu}})$$

$$v = (1 - \alpha)/(\beta - \alpha + 2), \quad \mu = 2/(\beta - \alpha + 2),$$

$$\frac{v}{\mu} = (1 - \alpha)/2$$

برای تابع Z برحسب نوع γ و رتبه معادله (v) دو جواب مطابق زیر انتخاب می‌شود

γ	v	$Z(x)$	
حقیقی	عدد اعشاری	J_v	J_{-v}
	صفر یا صحیح ($v=n$)	J_n	Y_n
موهومی	عدد اعشاری	I_v	I_{-v}
	صفر یا صحیح ($v=n$)	I_n	K_n

حالت دوم:

$$\beta - \alpha + 2 = 0$$

یک جواب معادله :

$$y_1(x) = x^r$$

بر اساس معادله مشخصه زیر دو جواب خصوصی به دست می‌آید :

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \gamma^2 = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه براساس علامت Δ :

$\Delta = (\alpha - 1)^2 - 4\gamma^2$	$y(x)$	
مثبت	x^{r_1}	x^{r_2}
صفر	x^r	$x^r \ln x$
منفی	$x^\delta \sin(\beta \ln x)$	$x^\delta \cos(\beta \ln x)$

$$r_1, r_2 = (1 - \alpha \pm \sqrt{\Delta})/2, \quad \delta = (1 - \alpha)/2, \quad \beta = \sqrt{|\Delta|}/2, \quad r = \frac{(1 - \alpha)}{2}$$

خواص توابع بسل:

الف) روابط مشتق:

$$\frac{d}{dx}[x^v Z_v(mx)] = \begin{cases} mx^v Z_{v-1}(mx) & Z = J, Y, I \\ -mx^v Z_{v-1}(mx) & Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-v} Z_v(mx)] = \begin{cases} -mx^{-v} Z_{v+1}(mx) & Z = J, Y, K \\ mx^{-v} Z_{v+1}(mx) & Z = I \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[Z_v(mx)] = \begin{cases} mZ_{v-1}(mx) - \left(\frac{v}{x}\right)Z_v(mx) & Z = J, Y, I \\ -mZ_{v-1}(mx) - \left(\frac{v}{x}\right)Z_v(mx) & Z = K \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[Z_v(mx)] = \begin{cases} -mZ_{v+1}(mx) + \left(\frac{v}{x}\right)Z_v(mx) & Z = J, Y, K \\ mZ_{v+1}(mx) + \left(\frac{v}{x}\right)Z_v(mx) & Z = I \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}[Z_0(mx)] = \begin{cases} -mZ_1(mx) & Z = J, Y, K \\ mZ_1(mx) & Z = I \end{cases}$$

ب) روابط انتگرال عمومی:

$$\int x J_v^2(mx) dx = \frac{1}{2m^2} \left\{ (m^2 x^2 - v^2) J_v^2(mx) + \left[x \frac{dJ_v(mx)}{dx} \right]^2 \right\}$$

$$\int mx^v Z_{v-1}(mx) dx = \begin{cases} x^v Z_v(mx) & Z = J, Y, I \\ -x^v Z_v(mx) & Z = K \end{cases}$$

$$\int mx^{-v} Z_{v+1}(mx) dx = \begin{cases} -x^{-v} Z_v(mx) & Z = J, Y, K \\ x^{-v} Z_v(mx) & Z = I \end{cases}$$

ج) روابط توابع بسل برای رتبه‌های صحیح (v=n):

$$Z_{-n}(mx) = \begin{cases} (-1)^n Z_n(mx) & Z = J, Y \\ Z_n(mx) & Z = I, K \end{cases}$$

ه) روابط برخی توابع بسل با توابع مثلثاتی و هیپربولیک

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x$$

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh x$$

$$I_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cosh x$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x$$

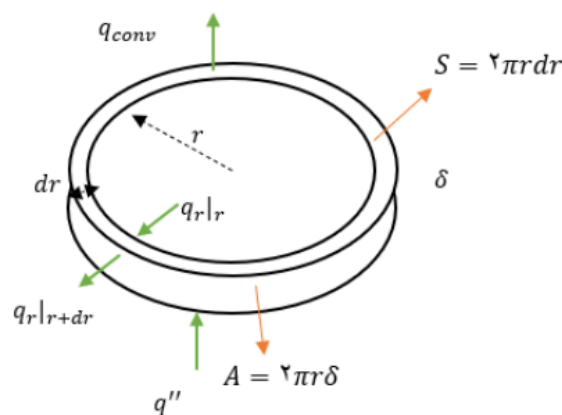
$$Y_{-\frac{1}{2}}(x) = -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x$$

مثال: در دیسک باریک به ضخامت δ و شعاع r که از پایین تحت شار حرارتی ثابت q'' قرار دارد و از بالا انتقال حرارت جابه‌جایی با هوا در دمای T_∞ می‌نماید. معادله انتقال حرارت یک بعدی پایدار را به صورت زیر به دست آورید:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) - m^2 r \left(\theta - \frac{n}{m^2} \right) = 0$$

که $\theta = T - T_\infty$ و $m^2 = \frac{h}{k\delta}$ و $n = \frac{q''}{k\delta}$ می‌باشد. با شرایط مرزی زیر معادله را حل نموده و T را به دست آورید.

$$\theta(r) = \text{محدود} \quad , \quad -k \frac{d\theta(r)}{dr} = h\theta(r)$$



$$S = 2\pi r dr, \quad A = 2\pi r \delta$$

تجمع = مصرف - تولید + خروجی - ورودی

$$q_r - q_{r+dr} - (Sh(T - T_\infty)) + Sq'' = 0$$

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{dq_r}{dr} dr \rightarrow q_r - q_r - \frac{dq_r}{dr} dr - (Sh(T - T_\infty)) + Sq'' = 0$$

$$- \frac{dq_r}{dr} dr - (Sh(T - T_\infty)) + Sq'' = 0$$

$$- \frac{d(q''A)}{dr} dr - (Sh(T - T_\infty)) + Sq'' = 0, \quad S = 2\pi r dr, \quad A = 2\pi r \delta$$

$$- \frac{d(q_r''(\pi r \delta))}{dr} dr - ((\pi r dr) h(T - T_\infty)) + (\pi r dr) q'' = .$$

$$- \delta \frac{d(r q_r'')}{dr} - (r h(T - T_\infty)) + r q'' = ., q_r'' = -k \frac{dT}{dr}, k = cte$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{h}{\delta k} (T - T_\infty) + \frac{q''}{\delta k} = .$$

$$\theta = T - T_\infty$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) - m^* r \left(\theta - \frac{n}{m^*} \right) = .$$

تغيير متغير:

$$\varphi = \theta - \frac{n}{m^*} \rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\theta}{dr}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) - m^* r \varphi = .$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{dy}{dx} \right) - \gamma^\gamma x^\beta y = .$$

$$x = t^\mu$$

$$\mu(\beta - \alpha + \gamma) = \gamma$$

$$t^\gamma \frac{d^\gamma y}{dt^\gamma} + t[\mu(\alpha - 1) + 1] \frac{dy}{dt} - \gamma^\gamma \mu^\gamma t^\gamma y = .$$

$$a = [\mu(\alpha - 1) + 1]$$

$$\lambda = \gamma^\gamma \mu^\gamma$$

$$t^\gamma \frac{d^\gamma y}{dt^\gamma} + t a \frac{dy}{dt} - \lambda t^\gamma y = .$$

$$v = \frac{1 - a}{\gamma}, \lambda = \gamma^\gamma \mu^\gamma$$

جواب کلی:

$$y = t^v z_v(\sqrt{\lambda} t)$$

$$y = c_1 t^v I_v(\gamma \mu t) + c_2 t^v K_v(\gamma \mu t)$$

$$t = x^{\frac{1}{\mu}} \rightarrow y = c_1 x^{\frac{v}{\mu}} I_v \left(\gamma \mu x^{\frac{1}{\mu}} \right) + c_2 x^{\frac{v}{\mu}} K_v \left(\gamma \mu x^{\frac{1}{\mu}} \right)$$

$$\alpha = \imath , \gamma^{\imath} = m^{\imath} , \beta = \imath$$

$$\beta - \alpha + \imath = \imath \neq \cdot$$

$$\mu = \frac{\imath}{\beta - \alpha + \imath} = \imath$$

$$a = \mu \left(\alpha - \imath \right) + \imath = \imath$$

$$v = \frac{\imath - a}{\imath} = \cdot$$

$$\varphi = c_{\imath}I.(m\,r\,)+\,c_{\imath}K.(m\,r\,)$$

$$\varphi = \theta - \frac{n}{m^{\imath}} \rightarrow \theta = \varphi + \frac{n}{m^{\imath}} = c_{\imath}I.(m\,r\,)+\,c_{\imath}K.(m\,r\,)+\frac{n}{m^{\imath}}$$

$$\theta = c_{\imath}I.(m\,r\,)+\,c_{\imath}K.(m\,r\,)+\frac{q''}{h}$$

$$\theta(\cdot) = \mathfrak{d}\mathfrak{g}\mathfrak{d}\mathfrak{m} \rightarrow c_{\imath} = \cdot$$

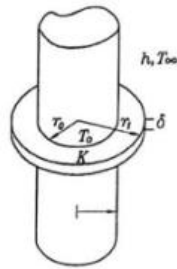
$$\theta = c_{\imath}I.(m\,r\,)+\frac{q''}{h}$$

$$-k\frac{d\theta(r.)}{dr}=h\theta(r.)\rightarrow -kc_{\imath}m\,I_{\imath}(m\,r.\,)=c_{\imath}h\,I.(m\,r.\,)+q''$$

$$c_{\imath}=\frac{-q''}{k\,m\,I_{\imath}(m\,r.\,)+h\,I.(m\,r.\,)}$$

$$\theta=\frac{-q''}{k\,m\,I_{\imath}(m\,r.\,)+h\,I.(m\,r.\,)}I.(m\,r\,)+\frac{q''}{h}$$

مثال: معادله برای پره دایره‌ای به صورت زیر است:



$$x^r \frac{d^r \theta}{dr^r} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - m^r \theta = 0$$

$$\theta(r_1) = \theta_0, \quad \frac{d\theta(r_1)}{dr} = 0$$

الف) معادله توزیع دما در این پره را به دست آورید.

$$x^r \frac{d^r y}{dx^r} + x \frac{dy}{dx} + (-\lambda x^r - m^r)y = 0$$

$$y = c_1 I_m(\sqrt{\lambda} x) + c_2 K_m(\sqrt{\lambda} x)$$

$$x^r \frac{d^r y}{dx^r} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda x^r - m^r)y = 0$$

$$y = c_1 J_m(\sqrt{\lambda} x) + c_2 Y_m(\sqrt{\lambda} x)$$

$$x^r \frac{d^r y}{dx^r} + ax \frac{dy}{dx} - \lambda x^r y = 0$$

اگر $a = 1$ باشد:

$$y = c_1 I_1(\sqrt{\lambda} x) + c_2 K_1(\sqrt{\lambda} x)$$

اگر $a \neq 1$ باشد:

استفاده از تغییر متغیر $y = x^v z$ و انتخاب $a + 2v = 1$:

$$x^r \frac{d^r z}{dx^r} + x \frac{dz}{dx} + (-\lambda x^r - v^r)z = 0$$

$$v = \frac{1-a}{2}$$

$$z = c_1 I_v(\sqrt{\lambda} x) + c_2 K_v(\sqrt{\lambda} x)$$

$$y = c_1 x^v I_v(\sqrt{\lambda} x) + c_2 x^v K_v(\sqrt{\lambda} x)$$

$$r^\gamma \frac{d^\gamma \theta}{dr^\gamma} + r \frac{d\theta}{dr} - m^\gamma r^\gamma \theta = .$$

$$: a = \gamma$$

$$\theta = c_\gamma I_\gamma(m r) + c_\gamma K_\gamma(m r)$$

$$\theta(r_\gamma) = \theta.$$

شرط مرزی اول

$$\theta_\gamma = c_\gamma I_\gamma(m r_\gamma) + c_\gamma K_\gamma(m r_\gamma)$$

$$\frac{d}{dx} [x^\gamma Z_\gamma(mx)] = \begin{cases} mx^\gamma Z_{\gamma-\gamma}(mx) & z = J, Y, I \\ -mx^\gamma Z_{\gamma-\gamma}(mx) & z = K \end{cases}$$

$$Z_{-n}(mx) = \begin{cases} (-\gamma)^n Z_n(mx) & z = J, Y \\ Z_n(mx) & z = I, K \end{cases}$$

$$\frac{d\theta(r_\gamma)}{dr} = .$$

شرط مرزی دوم

$$c_\gamma m I_\gamma(m r_\gamma) - c_\gamma m K_\gamma(m r_\gamma) = .$$

$$c_\gamma m I_\gamma(m r_\gamma) - c_\gamma m K_\gamma(m r_\gamma) = . \rightarrow c_\gamma = \frac{I_\gamma(m r_\gamma)}{K_\gamma(m r_\gamma)} c_\gamma$$

$$c_\gamma I_\gamma(m r_\gamma) + c_\gamma K_\gamma(m r_\gamma) = \theta. \rightarrow \left(I_\gamma(m r_\gamma) + \frac{I_\gamma(m r_\gamma)}{K_\gamma(m r_\gamma)} K_\gamma(m r_\gamma) \right) c_\gamma = \theta.$$

$$c_\gamma = \frac{K_\gamma(m r_\gamma)}{I_\gamma(m r_\gamma) K_\gamma(m r_\gamma) + I_\gamma(m r_\gamma) K_\gamma(m r_\gamma)} \theta.$$

$$c_\gamma = \frac{I_\gamma(m r_\gamma)}{K_\gamma(m r_\gamma)} c_\gamma \rightarrow c_\gamma = \frac{I_\gamma(m r_\gamma)}{I_\gamma(m r_\gamma) K_\gamma(m r_\gamma) + I_\gamma(m r_\gamma) K_\gamma(m r_\gamma)} \theta.$$

$$\theta = c_\gamma I_\gamma(m r) + c_\gamma K_\gamma(m r)$$

$$\frac{\theta}{\theta_\gamma} = \frac{K_\gamma(m r_\gamma) I_\gamma(m r) + I_\gamma(m r_\gamma) K_\gamma(m r)}{I_\gamma(m r_\gamma) K_\gamma(m r_\gamma) + I_\gamma(m r_\gamma) K_\gamma(m r_\gamma)}$$

ب) میزان انتقال حرارت در پره را به دست آورید.

$$\begin{aligned} q &= -kA \frac{dT}{dr} = -kA \frac{d\theta}{dr} \Big|_{r_0} \\ &= -k(\pi r_0 \delta) \theta_0 \frac{m K_1(m r_0) I_1(m r_0) - m I_1(m r_0) K_1(m r_0)}{I_1(m r_0) K_1(m r_0) + I_1(m r_0) K_1(m r_0)} \end{aligned}$$

مسائل مقدار اولیه (IVP)

در مسائل مقدار اولیه، مقدار تابع در نقطه شروع داده می‌شود و با استفاده از یکی از روش‌های موجود مقدار آن را در سایر نقاط به دست می‌آوریم. در این صورت منحنی تغییرات متغیر تابع بر حسب متغیر مستقل قابل رسم خواهد بود. از جمله روش‌های حل مسائل مقدار اولیه می‌توان به روش‌های تیلور، اویلر و رانگ کاتا مرتبه دوم، سوم و چهارم اشاره نمود. در کلیه این روش‌های مختصات هر یک از نکات با استفاده از نقاط مختصات نقاط قبل به دست می‌آید. اساس کلیه این روش‌ها استفاده از بسط تیلور است.

۱) روش تیلور:

پایه و اساس بیشتر روش‌های محاسبات عددی سری تیلور می‌باشد. برای یک متغیر این سری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

سری بالا مقدار تابع را در نقطه x ، به نقاط دیگر تابع و مشتق آن در a ربط می‌دهد. عبارت

$$[f^{n+1}(x, a)]_{\max} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = O(x-a)^{n+1}$$

حداکثر خطا است، که از حذف بقیه جملات سری به دست می‌آید. معمولاً در سری فوق در محاسبات عددی از جملات شامل مشتق دوم یا سوم به بعد صرف نظر می‌شود.

در رابطه با حل معادله مرتبه اول زیر، با شرط اولیه داده شده روش حل بدین ترتیب می‌باشد ($f(x,y)$ نمایشگر رابطه‌ای هست که شامل x و y می‌باشد). معادله (*):

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{شرط اولیه}$$

بسط سری تیلور عبارت است از:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \dots$$

معادله بالا در هر مرحله برای محاسبه مقدار تابع y در نقطه x به کار می‌رود و دقت محاسبات وابسته به تعداد جملات در نظر گرفته شده در معادله می‌باشد. شرط اولیه $(y(x_0)=y_0)$ مقدار مشتق معادله (*) را در هر نقطه می‌دهد و از آن مشتق مرتبه بالاتر محاسبه می‌شود.

بنابراین از نقطه معلوم اولیه شروع کرده و از این نقطه در جهت متغیر x حرکت می‌نماییم. در هر نقطه مقدار مشتقات در نظر گرفته شده در فرمول محاسبه می‌شود تا مقدار جدید تابع $y(x_0 + h)$ محاسبه می‌شود.

مثال معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

$$y(1) = 1$$

گام حل را برابر با 0.1 در نظر بگیرید و مقدار تابع را تا $x=3.5$ محاسبه کنید. (بسط تیلور را تا مشتق چهارم در نظر بگیرید.)

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{1}{6}h^3y'''(x) + \frac{1}{24}h^4y''''(x)$$

لذا مرتبه خطا برابر است با:

$$E = \frac{h^5 y^{(5)}(1)}{120}$$

در ابتدا مشتق‌های مورد نیاز از تابع داده شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = xy^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{9}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + xy^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{9}x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} y(x_* + h) = & y(x_*) + hy'(x_*) + \frac{h^2}{2}y''(x_*) + \frac{1}{6}h^3y'''(x_*) \\ & + \frac{1}{24}h^4y''''(x_*) \end{aligned}$$

لذا مقدار تابع در $x=1.1$ برابر است با:

$$y(1 + 0.1) = 1.0 + 0.1 + \frac{2}{3}(0.1)^2 + \frac{4}{27}(0.1)^3 + \frac{1}{54}(0.1)^4$$

$$y(1.1) = 1.10682$$

$$y(x_1 + h) = y(x_1) + hy'(x_1) + \frac{h^2}{2}y''(x_1) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_1) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_1)$$

با جایگزین نمودن مقدار مشتق‌ها در $x=1.1$ و $y=1.1$ و قرار دادن آن در معادلات بالا مقدار $y(x_2)$ به دست می‌آید.

$$y(1.1 + 0.1) = 1.22788$$

و به همین ترتیب گام به گام ادامه می‌دهیم تا به $x=3.5$ برسیم. خلاصه محاسبه انجام شده و مقایسه آن با روش تحلیلی در جدول زیر ارائه شده است.

$y \backslash x$	جواب عددی	جواب تحلیلی
1.0	1.00000	1.00000
1.5	1.68618	1.68617
2.0	2.82846	2.82843
2.5	4.56042	4.56036
3.0	7.02123	7.02113
3.5	10.35252	10.35238

همانطور که ملاحظه می‌شود مقدار خطای محلی مرحله به مرحله در حال افزایش می‌باشد و همانطور که پیش‌تر اشاره شد محدوده خطا h^5 می‌باشد.

(۲) روش اویلر:

این روش با حذف جملات بعد از مشتق اول در سری تیلور تعریف می‌شود:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i)$$

با توجه به اینکه:

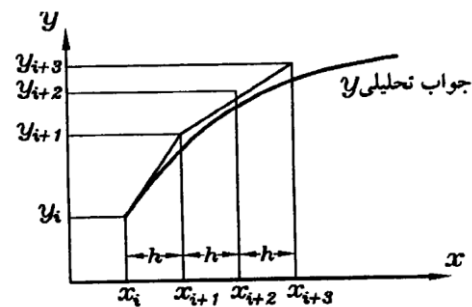
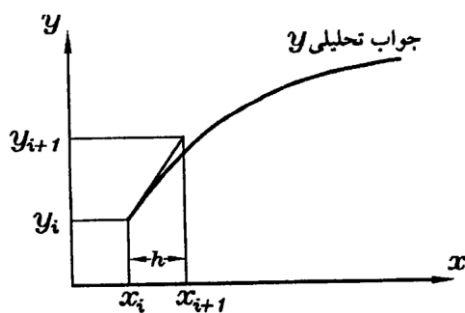
$$y'(x_i) = \frac{dy}{dx} = f(x_i, y_i)$$

می‌توان فرمول اویلر را به صورت زیر نوشت:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

آنچه مسلم است مرتبه خطا $O(h^2)$ می‌باشد. لذا در انتخاب h باید دقت نمود. معادله بالا در هر مرحله برای محاسبه مقدار تابع y در نقطه x به کار می‌رود و دقت محاسبات بستگی به مقدار h دارد. با شروع از شرط اولیه داده شده $(y(x_0)=y_0)$ مقدار تابع در هر نقطه محاسبه می‌شود و در نتیجه مقدار y در هر نقطه از معادله بالا به دست می‌آید.

در صورتی که بخواهیم منحنی را دنبال کنیم باید از نقطه معلوم اولیه شروع کرده و از این نقطه در راستای مماس حرکت نماییم. چنانچه این خط مستقیم تعقیب شود از منحنی جواب واقعی دور می‌شویم، بنابراین بعد از طی فاصله کوچک h در جهت x مختصات جدید $(x_0 + h, y_1)$ محاسبه می‌شود و این نقطه مانند یک نقطه پایه به کار می‌رود. شیب مماس در نقطه جدید محاسبه شده و گام بعدی در راستای این مماس، نقطه $(x_0 + 2h, y_2)$ می‌شود. این روند به روند اویلر معروف است و در شکل زیر نشان داده شده است. این شیوه را می‌توان مرحله به مرحله تا اینکه تمام ناحیه انتگرال‌گیری را در برگیرد ادامه داد. باید توجه داشت که برای سهولت، اندازه گام‌ها مساوی انتخاب شده‌اند، برای این روش همچنین انتخاب طول گام‌ها مختلف نیز امکان‌پذیر می‌باشد.



در شکل بالا مقادیر x به ترتیب ذیل می‌باشد:

$$x_{i+1} = x_0 + h = x_0 + h$$

$$x_{i+2} = x_0 + 2h = x_1 + h$$

$$x_{i+3} = x_0 + 3h = x_2 + h$$

آنچه در رابطه با روش اویلر و نتایج به دست آمده قابل بحث است، مقدار خطای محلی در هر مرحله می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که تقریب بکار رفته در هر گام خطائی ایجاد می‌کند. در نمودار بالا می‌توان دید که با روش اویلر به جواب دقیق نمی‌رسیم، حتی اگر میزان گام h کوچک باشد، چون جواب تقریبی همیشه از روی منحنی گذشته و از خط مماس حاصل می‌شود.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر با روش اویلر برای دو حالت $h=0.1$ و $h=0.5$ حل کنید و نتایج را مقایسه کنید.

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

$$y(1) = 1$$

در حالت کلی داریم:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

برای $h=0.1$:

$$y(1/1) = y(1) + 0/1 f(1, 1)$$

$$y(1/1) = 1/0 + 0/1(1)(1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y(1/1) = 1/1$$

$$y(1/2) = y(1/1) + 0/1 f(1/1, 1/1)$$

$$y(1/2) = 1/1 + 0/1(1/1)(1/1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y(1/2) = 1/21355$$

$$y(1/3) = 1/21355 + 0/1(1/2)(1/21355)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y(1/3) = 1/34155$$

$$y(1/4) = 1/34155 + 0/1(1/3)(1/34155)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y(1/4) = 1/48493$$

$$y(1/5) = 1/48493 + 0/1(1/4)(1/48493)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y(1/5) = 1/64465$$

نتیجه بقیه محاسبات در جدول زیر ارائه شده است.

برای $h=0.5$:

$$y(1/5) = y(1) + 0/5 f(1, 1)$$

$$y(1/5) = 1/0 + 0/5(1)(1)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y(1/5) = 1/5$$

$$y(2) = y(1/5) + 0/5 f(1/5, 1/5)$$

$$y(2) = 1/5 + 0/5(1/5)(1/5)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y(2) = 2/35854$$

$$y(2/5) = 2/35854 + 0/5(2)(2/35854)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y(2/5) = 3/68965$$

نتیجه بقیه محاسبات و مقایسه نتایج با روش تحلیلی در جدول زیر آمده است.

$y \backslash x$	جواب عددی $h = 0/1$	جواب عددی $h = 0/5$	جواب تحلیلی
1/0	1/00000	1/00000	1/00000
1/5	1/64465	1/50000	1/68617
2/0	2/72388	2/35854	2/82843
2/5	4/36810	3/68965	4/56036
3/0	6/71477	5/62119	7/02113
3/5	9/90460	8/28826	10/35238

درصد خطای نسبی برای در برابر با ۴ درصد و برای برابر با ۱۹ درصد است. لذا نتیجه می‌گیریم که در روش اوایلر اندازه گام (h) باید کوچک گرفته شود زیرا خطا از مرتبه دو باشد. بنابراین برای حالت $h=0.1$ مرتبه خطای محلی در محدوده ± 0.01 ولی برای $h=0.5$ محدوده خطا ± 0.25 می‌باشد.

(۳) روش رانگ کاتا:

در ابتدا فرمول عمومی رانگ کاتا برای مرتبه n همراه با مقادیر k_i نوشته شود:

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + \dots + w_n k_n$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1) \\ k_3 = hf(x_i + c_3 h, y_i + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \\ \vdots \\ k_n = hf(x_i + c_n h, y_i + a_{n1} k_1 + a_{n2} k_2 + \dots + a_{n, n-1} k_{n-1}) \end{cases}$$

می‌توان معادلات بالا را به صورت فشرده زیر نوشت:

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^n w_j k_j$$

$$k_j = hf(x_i + c_j h, y_i + \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} k_l)$$

که $c_1=0$ و $a_{j1}=0$ است. مقدار n تعیین کننده دقت و پیچیدگی روش است. این مقدار همچنین تعیین کننده میزان قطع سری تیلور می باشد:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + O(h^3)$$

روش به دست آوردن فرمول های رانگ کاتا شامل ۵ مرحله هست:

مرحله ۱: انتخاب مرتبه رانگ کاتا، مثلاً برای مرتبه دوم ($n=2$) خواهیم داشت:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i$$

مرحله ۲: جایگزین کردن مشتق های y در عبارت سری تیلور با معادل هر کدام در تابع f لازم به یادآوری است که f تابعی از x و $y(x)$ می باشد، بنابراین:

$$y'_i = f(x_i, y_i) = f_i$$

$$y''_i = \frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right)_i = f_{xi} + f_i f_{yi}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در بسط تیلور خواهیم داشت:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f_{xi} + \frac{h^2}{2} f_i f_{yi} + O(h^3)$$

مرحله ۳: فرمول عمومی رانگ کاتا برای مرتبه دوم نوشته می شود:

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1)$$

مرحله ۴: بر اساس بسط تیلور عبارت زیر برای $f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1)$ به دست می آید. داریم:

$$f(x_n + \Delta x, y_n + \Delta y) = f(x_n, y_n) + f_x(x_n, y_n) \Delta x + f_y(x_n, y_n) \Delta y, f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1), \Delta x = c_2 h, \Delta y = a_{21} k_1$$

$$f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1) = f_i + f_{xi} c_2 h + f_{yi} a_{21} k_1, k_1 = h f_i$$

$$f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1) = f_i + f_{xi} c_2 h + f_{yi} a_{21} (h f_i)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1) = f_i + c_2 h f_{xi} + a_{21} h f_{yi} f_i + O(h^3)$$

با جایگذاری عبارت بالا در فرمول عمومی رانگ کاتا و مرتب‌سازی خواهیم داشت:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1 + w_2) h f_i + (w_2 c_2) h^2 f_{xi} + (w_2 a_{21}) h^2 f_i f_{yi} + O(h^3)$$

معادله بالا را معادل با معادله زیر قرار می‌دهیم:

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h^2}{2} f_{xi} + \frac{h^2}{2} f_i f_{yi} + O(h^3)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 c_2 = 0.5 \\ w_2 a_{21} = 0.5 \end{cases}$$

در سه معادله فوق، چهار مجهول وجود دارد، بنابراین نیاز به فرض یکی از مجهولات می‌باشد. c_2 مقداری بین صفر و یک می‌تواند داشته باشد که در ادامه حالت‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شود:

با انتخاب $c_2 = 0$ روش اوایلر به دست می‌آید:

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = 0$$

$$a_{21} = 0$$

$$y_{i+1} = y_i + k_1 = y_i + h f(x_i, y_i)$$

با انتخاب $c_2 = 1$:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

که در معادله فوق داریم:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) \end{cases}$$

روش فوق، رانگ کاتا مرتبه دوم هیون (Heun) می‌باشد.

$$c_2 = \frac{1}{2} \text{ با انتخاب}$$

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = 1$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

این روش به نام پولیگون (Polygon) معروف است.

$$c_2 = \frac{2}{3} \text{ با انتخاب}$$

$$w_1 = \frac{1}{3}$$

$$w_2 = \frac{2}{3}$$

$$a_{21} = \frac{3}{4}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1)$$

روش فوق بنام رالستون (Ralston) موسوم است.

نحوه به دست آوردن فرم‌های رانگ کاتا مرتبه‌های بالاتر نیز به ترتیب فوق می‌باشد. دیده شد که به ازای هر مرتبه، چندین روش می‌توان به دست آورد. خلاصه معروف‌ترین فرمول‌های مرتبه دوم، سوم و چهارم در جدول زیر آمده است:

مرتبه دوم

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1) \end{aligned} \right\} O(h^2)$$

مرتبه سوم

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1) \end{aligned} \right\} O(h^3)$$

مرتبه چهارم

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{24}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3}) \\ k_3 &= hf(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_2}{3}) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \end{aligned} \right\} O(h^4)$$

مثال: با استفاده از روش رانگ کاتا مرتبه دو، سه و چهار مثال زیر را حل کنید:

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{5}}$$

$$y(1) = 1$$

حل:

در این مثال از $h=0.5$ استفاده می‌کنیم.

برای روش رانگ کاتا مرتبه دو:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = xy^{\frac{1}{5}}$$

$$y(1) = 1$$

$$k_1 = 0.5f(1, 1) = 0.5$$

$$k_2 = 0.5f(1 + 0.5, 1 + 0.5) = 0.5f(1.5, 1.5) = 0.8585$$

$$y(1.5) = 1.0 + \frac{1}{2}(0.5 + 0.8585) \Rightarrow y(1.5) = 1.67925$$

برای روش رانگ کاتا مرتبه سه:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1)$$

$$k_1 = 0.5f(1, 1) = 0.5$$

$$k_2 = 0.5f(1 + \frac{0.5}{2}, 1 + \frac{0.5}{2}) = 0.5f(1.25, 1.25)$$

$$k_2 = 0.67326$$

$$k_3 = 0.5f(1 + 0.5, 1 + 2(0.67326) - 0.5) = 0.5f(1.5, 1.84652)$$

$$k_3 = 0,92012$$

$$y(1,5) = 1 + \frac{1}{6}(0,5 + 4(0,67326) + 0,92015)$$

$$y(1,5) = 1,68553$$

برای روش رانگ کاتا مرتبه چهارم:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$k_1 = 0,5f(1, 1) = 0,5$$

بنابراین:

$$k_2 = 0,5f(1 + \frac{0,5}{2}, 1 + \frac{0,5}{2}) = 0,67326$$

$$k_3 = 0,5f(1 + \frac{0,5}{2}, 1 + \frac{0,67326}{2}) = 0,688468$$

$$k_4 = 0,5f(1 + 0,5, 1 + 0,688468) = 0,89308$$

$$y(1,5) = 1,0 + \frac{1}{6}(0,5 + 2(0,67326) + 2(0,688468) + 0,89308)$$

$$y(1,5) = 1,68609$$

نتایج نهایی در جدول زیر آورده شده است:

روش حل	$y(1,5)$	درصد خطای نسبی	مرتبه خطا
رانگ کاتا مرتبه اول	1,50000	11%	$O(h^2)$
رانگ کاتا مرتبه دوم	1,67927	0,4%	$O(h^3)$
رانگ کاتا مرتبه سوم	1,68553	0,04%	$O(h^4)$
رانگ کاتا مرتبه چهارم	1,68609	0,004%	$O(h^5)$
تحلیلی	1,68617	—	—

جدول بالا نشان می‌دهد که بالا رفتن مرتبه روش رانگ کاتا درصد خطا را کاهش می‌دهد.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش رانگ کاتا مرتبه ۲، ۳ و ۴ با گام ۰/۲ تا $x = 0/6$ حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$$

رانگ کاتا مرتبه دوم:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f(x_i + h, y_i + k_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x + y, h = 0/2$$

$$k_1 = 0/2(0 + 1) = 0/2$$

$$k_2 = 0/2(0/2 + (1 + 0/2)) = 0/28$$

$$y(0/2) = y(0) + \frac{1}{2} (0/2 + 0/28) = 1/24$$

x	y
0	1
0/2	1/24
0/4	1/5772
0/6	2/0322

رانگ کاتا مرتبه سوم:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 4 k_2 + k_3)$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x + y, h = 0/2$$

$$k_1 = 0/2(0 + 1) = 0/2$$

$$k_2 = 0/2((0 + 0/1) + (1 + \frac{0/2}{2})) = 0/24$$

$$k_3 = 0/2((0 + 0/2) + (1 + 2 \times 0/24 - 0/2)) = 0/296$$

$$y(0/2) = y(0) + \frac{1}{6}(0/2 + 4 \times 0/24 + 0/296) = 1/2427$$

x	y
0	1
0/2	1/2427
0/4	1/5833
0/6	2/0436

رانگ کاتا مرتبه چهارم:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$k_1 = 0/2(0 + 1) = 0/2$$

$$k_2 = 0/2((0 + 0/1) + (1 + \frac{0/2}{2})) = 0/24$$

$$k_3 = 0/2((0 + 0/1) + (1 + \frac{0/24}{2})) = 0/244$$

$$k_4 = 0/2((0 + 0/2) + (1 + 0/244)) = 0/2888$$

$$y(0/2) = y(0) + \frac{1}{6}(0/2 + 2 \times 0/24 + 2 \times 0/244 + 0/2888) = 1/2428$$

x	y
0	1
0/2	1/2428
0/4	1/5836
0/6	2/0442

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت عددی

از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده نمود. در مجموعه n معادلات دیفرانسیلی معمولی زیر:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

چنانچه روش اویلر برای حل دستگاه معادلات فوق بسط داده شود، خواهیم داشت:

$$y_{i+1,j} = y_{ij} + hf_j(x_i, y_i) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

که n نمایشگر شمارش تابع می‌باشد و چنانچه روش رانگ کاتا درجه دو استفاده شود، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_{i+1,j} = y_{ij} + \frac{1}{4}k_{1j} + \frac{1}{4}k_{2j} \\ k_{1j} = hf_j(x_i, y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}) \\ k_{2j} = hf_j(x_i + h, y_{i1} + k_{11}, y_{i2} + k_{12}, \dots, y_{in} + k_{1n}) \end{cases}$$

و با رانگ کاتا درجه چهارم روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y_{i+1,j} = y_{ij} + \frac{1}{6}(k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}) & j = 1, 2, \dots, n \\ k_{1j} = hf_j(x_i, y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}) & j = 1, 2, \dots, n \\ k_{2j} = hf_j(x_i + \frac{h}{4}, y_{i1} + \frac{k_{11}}{4}, y_{i2} + \frac{k_{12}}{4}, \dots, y_{in} + \frac{k_{1n}}{4}) & j = 1, 2, \dots, n \\ k_{3j} = hf_j(x_i + \frac{h}{2}, y_{i1} + \frac{k_{21}}{2}, y_{i2} + \frac{k_{22}}{2}, \dots, y_{in} + \frac{k_{2n}}{2}) & j = 1, 2, \dots, n \\ k_{4j} = hf_j(x_i + h, y_{i1} + k_{31}, y_{i2} + k_{32}, \dots, y_{in} + k_{3n}) & j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

مثال: در یک راکتور همزن دار که به سامانه خنک کننده مجهز می باشد که یک واکنش از نوع اول در حال انجام است. تغییرات غلظت و دما با زمان مطابق معادلات زیر ارائه می شود:

$$\frac{dC}{dt} = 0.025 - [0.005 + \exp(29.6928 - \frac{11324}{T})]C$$

$$\frac{dT}{dt} = 1.74 - 0.00568T + 0.001C \exp(32 - \frac{11324}{T})$$

غلظت و دمای اولیه به ترتیب برابر با ۵ میلی مول در لیتر و ۳۰۰ درجه کلوین می باشد. با استفاده از روش های اوایلر و رانگ کاتا تغییرات غلظت و دما را با دما به دست آورید. فاصله زمانی برابر با ۲۰ ثانیه در نظر گرفته شود.

حل: دو معادله را می توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$\frac{dC}{dt} = f(t, C, T) = 0.025 - [0.005 + \exp(29.6928 - \frac{11324}{T})]C$$

$$\frac{dT}{dt} = g(t, C, T) = 1.74 - 0.00568T + 0.001C \exp(32 - \frac{11324}{T})$$

روش اوایلر ($h=\Delta t=20$):

$$C_{i+1} = C_i + hf(t_i, C_i, T_i)$$

$$T_{i+1} = T_i + hg(t_i, C_i, T_i)$$

$$C(20) = 5 + 20f(0, 5, 300)$$

$$C(20) = 4.9682$$

$$T(20) = 300 + 20g(0, 5, 300)$$

$$T(20) = 300.72$$

روش رانگ کاتا ($h=\Delta t=20$):

$$C_{i+1} = C_i + \frac{1}{4}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{4}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

$$k_1 = hf(t_i, C_i, T_i)$$

$$L_1 = hg(t_i, C_i, T_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, C_i + \frac{k_1}{2}, T_i + \frac{L_1}{2})$$

$$L_2 = hg(t_i + \frac{h}{2}, C_i + \frac{k_1}{2}, T_i + \frac{L_1}{2})$$

$$k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, C_i + \frac{k_2}{2}, T_i + \frac{L_2}{2})$$

$$L_r = hg(t_i + \frac{h}{r}, C_i + \frac{k_r}{r}, T_i + \frac{L_r}{r})$$

$$k_r = hf(t_i + h, C_i + k_r, T_i + L_r)$$

$$L_r = hg(t_i + h, C_i + k_r, T_i + L_r)$$

$$k_1 = r \circ f(0, 5, 300) = -0.031787$$

$$L_1 = r \circ g(0, 5, 300) = 0.720319$$

$$k_r = r \circ f(10, 4/9841, 300/36106) = -0.031567$$

$$L_r = r \circ g(10, 4/9841, 300/36106) = 0.67932$$

$$k_r = r \circ f(10, 4/9842, 300/3400) = -0.0314899$$

$$L_r = r \circ g(10, 4/9842, 300/3400) = 0.681708$$

$$k_r = r \circ f(20, 4/96851, 300/681708) = -0.03126$$

$$L_r = r \circ g(20, 4/96851, 300/681708) = 0.642904$$

$$C(20) = 5 + \frac{1}{6}(-0.031787 - 2(0.031567) - 2(0.0314899) - 0.031260) = 4/96847$$

$$T(20) = 300 + \frac{1}{6}(0.720319 + 2(0.67932) + 2(0.681708) + 0.642904) = 300/68088$$

حل معادلات دیفرانسیل معمولی با مرتبه n

روش کلی حل اینگونه معادلات، تبدیل معادله مرتبه n به n معادله مرتبه اول با یک توالی جایگزینی می‌باشد. برای نمونه معادله مرتبه چهارم به چهار معادله مرتبه اول تبدیل می‌شود. سپس چهار معادله با استفاده از روش‌های حل دستگاه معادلات مرتبه اول همزمان حل می‌شوند. برای مثال، معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, x\right)$$

با تغییر متغیرهای زیر معادله بالا به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} y &= z_1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{dz_2}{dx} = z_3 \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} &= \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= \frac{dz_n}{dx} \end{aligned}$$

با جایگزین نمودن معادلات بالا در معادله دیفرانسیلی مرتبه n خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} &= z_3 \\ &\vdots \\ \frac{dz_n}{dx} &= f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, x) \end{aligned}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش رانگ کاتا مرتبه چهارم حل کنید:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 64y = 16 \cos 8x$$

با توجه به شرایط اولیه داده شده:

$$y(0) = y'(0) = 0$$

مقدار $y(0.1)$ و $y'(0.1)$ را محاسبه کنید. جهت سهولت گام را 0.1 در نظر بگیرید.

ابتدا معادله را به مرتبه اول تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$\frac{du}{dx} = 16 \cos 8x - 64y$$

بر اساس رانگ کاتا مرتبه چهارم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_{i+1,j} = y_{ij} + \frac{1}{6}(k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}) & j = 1, 2, \dots, n \\ k_{1j} = hf_j(x_i, y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}) & j = 1, 2, \dots, n \\ k_{2j} = hf_j(x_i + \frac{h}{4}, y_{i1} + \frac{k_{11}}{4}, y_{i2} + \frac{k_{12}}{4}, \dots, y_{in} + \frac{k_{1n}}{4}) & j = 1, 2, \dots, n \\ k_{3j} = hf_j(x_i + \frac{h}{2}, y_{i1} + \frac{k_{21}}{2}, y_{i2} + \frac{k_{22}}{2}, \dots, y_{in} + \frac{k_{2n}}{2}) & j = 1, 2, \dots, n \\ k_{4j} = hf_j(x_i + h, y_{i1} + k_{31}, y_{i2} + k_{32}, \dots, y_{in} + k_{3n}) & j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$\frac{du}{dx} = 16 \cos 8x - 64y$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

$$k_1 = (0.1)(0) = 0$$

$$L_1 = 0.1(16) = 1.6$$

$$k_2 = 0.1(u + \frac{L_1}{4})$$

$$L_2 = 0.1[(16 \cos 8(x + \frac{h}{4})) - 64(y + \frac{k_1}{4})] = 1.47$$

$$k_3 = 0.08$$

$$L_3 = 0.1[(16 \cos 8(x + \frac{h}{2})) - 64(y + \frac{k_2}{2})] = 1.22$$

$$k_4 = 0.1(u + L_3)$$

$$L_4 = 0.1[(16 \cos 8(x + h)) - 64(y + k_3)] = 0.644$$

$$K_3 = 0.0735$$

$$L_4 = 0.1[(16 \cos 8(x + h)) - 64(y + k_3)] = 0.644$$

$$k_4 = 0.1(u + L_3)$$

$$L_4 = 0.1[(16 \cos 8(x + h)) - 64(y + k_3)] = 0.644$$

$$k_4 = 0.122$$

$$L_4 = 0.1[(16 \cos 8(x + h)) - 64(y + k_3)] = 0.644$$

$$y(0.1) = y_2 = 0 + \frac{1}{6}[0 + 1.6 + 1.47 + 0.122]$$

$$y(0.1) = 0.0715$$

$$y'(0.1) = u_2 = 0 + \frac{1}{6}[1.6 + 2(1.47) + 2(1.22) + 0.644]$$

$$y'(0.1) = 1.27$$

برازش خطی

برای برازش خطی می‌توان از دو روش زیر استفاده نمود، در روش اول با استفاده از محاسبات ماتریسی این امر صورت می‌پذیرد و در روش دوم از سری‌ها برای این محاسبات استفاده می‌گردد.

الف) برازش خطی بر اساس محاسبات ماتریسی

در این روش بر اساس شکل معادله، ماتریس‌های X و Y ایجاد می‌گردد. به عنوان مثال اگر معادله مورد نظر به صورت $y = A + Bx + cx^2$ باشد و تعداد داده‌ها برابر با ۵ باشد، ماتریس X و Y به صورت زیر تعریف می‌گردد.

x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
x_4	y_4
x_5	y_5

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix}, Y^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس ضرایب $b = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$b = (X'X)^{-1}X'Y^*$$

در روابط بالا، b ماتریس ضرایب، X ماتریس مقادیر مستقل، Y^* ماتریس مقادیر وابسته (جواب‌ها) تجربی می‌باشد. در نتیجه اختلاف بین مقادیر واقعی و مقادیر به دست آمده بر اساس برازش با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\epsilon = Y^* - Y = Y^* - Xb$$

در رابطه بالا Y ماتریس مقادیر وابسته محاسبه شده با برازش می‌باشد. برای محاسبه مجموع مربع خطاها^{۳۷} از رابطه ماتریسی زیر استفاده می‌گردد:

$$\varphi = SSE = \epsilon'\epsilon = Y^{*'}Y^* - b'X'Y^*$$

³⁷ Sum of Squared Errors

در نهایت واریانس^{۳۸} خطاها با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$s^2 = \frac{SSE}{n - k} = \frac{\varphi}{n - k}$$

در رابطه بالا، n تعداد داده‌ها و k تعداد ضرایب می‌باشد. همچنین لازم به ذکر است که انحراف معیار^{۳۹} برابر با S و به عبارت دیگر جذر واریانس می‌باشد. برای محاسبه ضریب تعیین^{۴۰} لازم است دو پارامتر SSR (مجموع مربعات ناشی از رگرسیون^{۴۱}) و SST (مجموع کل مربعات^{۴۲}) تعریف و محاسبه گردد:

$$SSR = b'X'Y^* - n(\bar{y}^2)$$

$$SST = SSE + SSR = Y^{*'}Y^* - n(\bar{y}^2)$$

در رابطه بالا $\bar{y}$ میانگین مقادیر جواب‌ها می‌باشد. در صورتی که معادله انتخاب شده برای برازش، عرض از مبدا نداشته باشد، باید در استفاده از روابط بالا برای محاسبه SSR و SST احتیاط نمود. برای محاسبه ضریب تعیین از رابطه زیر استفاده می‌گردد:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

مثال: داده‌های زیر با استفاده از معادله $y = A + Bx + Cx^3$ برازش می‌شوند. مقدار A ، B و C را تعیین کرده و ضریب تعیین را محاسبه نمایید.

x	y
۱	۱.۲
۲	۱۳.۵
۳	۵۱.۸
۴	۱۲۲.۹
۵	۲۴۰.۵

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 27 \\ 1 & 4 & 64 \\ 1 & 5 & 125 \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{bmatrix}, Y^* = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 13.5 \\ 51.8 \\ 122.9 \\ 240.5 \end{bmatrix}$$

³⁸ Variance

³⁹ Standard deviation

⁴⁰ Coefficient of Determination

⁴¹ Sum of squares due to regression

⁴² Total sum of squares

$$b = (X'X)^{-1}X'Y^* = \begin{bmatrix} -1.3027 \\ 0.1600 \\ 1.9289 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = Y^* - Y = Y^* - Xb = \begin{bmatrix} 0.4137 \\ -0.9489 \\ 0.5410 \\ 0.1099 \\ -0.1157 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = SSE = \epsilon'\epsilon = Y^{*'}Y^* - b'X'Y^* = 1.3899$$

$$s^2 = \frac{SSE}{n-k} = \frac{1.3899}{5-3} = 0.6949$$

$$SSR = b'X'Y^* - n(\bar{y}^2) = 3.8847 \times 10^4$$

$$SST = SSE + SSR = Y^{*'}Y^* - n(\bar{y}^2) = 3.8849 \times 10^4$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = 0.9999$$

ب) برازش خطی بر اساس حداقل مربعات (محاسبات سری ها)

با فرض اینکه معادله مورد نظر برای برازش $y = A + Bx + Cx^2$ باشد، خواهیم داشت:

$$y = A + Bx + Cx^2 \rightarrow d^2 = (y - A - Bx - Cx^2)^2$$

$$\sum d^2 = \min$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \sum d^2 = 0 \rightarrow -2 \sum (y - A - Bx - Cx^2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum d^2 = 0 \rightarrow -2 \sum (y - A - Bx - Cx^2)x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial C} \sum d^2 = 0 \rightarrow -2 \sum (y - A - Bx - Cx^2)x^2 = 0$$

$$\sum y - An - B \sum x - C \sum x^2 = 0 \rightarrow An + B \sum x + C \sum x^2 = \sum y$$

$$\sum yx - A \sum x - B \sum x^2 - C \sum x^3 = 0 \rightarrow A \sum x + B \sum x^2 + C \sum x^3 = \sum yx$$

$$\sum yx^2 - A \sum x^2 - B \sum x^3 - C \sum x^4 = 0 \rightarrow A \sum x^2 + B \sum x^3 + C \sum x^4 = \sum yx^2$$

در این حالت با در نظر گرفتن عبارت $(\hat{y}_i = A + Bx_i + Cx_i^2)$ ، نشان دهنده مقدار محاسبه شده برای

داده i ام بر اساس معادله برازش شده می باشد. در حالی که مقدار واقعی (تجربی) این داده برابر با y_i می باشد.

همچنین n نشان دهنده تعداد داده ها می باشد. در این حالت شاخص ذکر شده در قسمت قبل مجدداً به صورت

زیر محاسبه می گردد:

$\bar{y} = \frac{1}{N} (\sum y_i)$	میانگین مقادیر واقعی
$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$	SSE
$\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	SSR
$\sum (y_i - \bar{y})^2$	SST=SSE+SSR
$S^2 = \frac{SSE}{n-k}$	واریانس
$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$	ضریب تعیین

در رابطه بالا، n تعداد داده‌ها و k تعداد ضرایب می‌باشد. لازم به ذکر است که در صورتی که در معادله مورد نظر برای برازش عرض از مبدا وجود نداشته باشد، باید برای استفاده از SSE و SSR احتیاط نمود.

مثال: داده‌های زیر با استفاده از معادله $y = A + Bx + Cx^3$ برازش می‌شوند. مقدار A ، B و C را تعیین کرده و ضریب تعیین را محاسبه نمایید.

x	y
۱	۱.۲
۲	۱۳.۵
۳	۵۱.۸
۴	۱۲۲.۹
۵	۲۴۰.۵

$$y = A + Bx + Cx^3 \rightarrow d^2 = (y - A - Bx - Cx^3)^2$$

$$\sum d^2 = \min$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \sum d^2 = 0 \rightarrow -2 \sum (y - A - Bx - Cx^3) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum d^2 = 0 \rightarrow -2 \sum (y - A - Bx - Cx^3)x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial C} \sum d^2 = 0 \rightarrow -2 \sum (y - A - Bx - Cx^3)x^3 = 0$$

$$\sum y - nA - B \sum x - C \sum x^3 = 0 \rightarrow An + B \sum x + C \sum x^3 = \sum y$$

$$\sum yx - A \sum x - B \sum x^2 - C \sum x^4 = 0 \rightarrow A \sum x + B \sum x^2 + C \sum x^4 = \sum yx$$

$$\sum yx^3 - A \sum x^3 - B \sum x^4 - C \sum x^6 = 0 \rightarrow A \sum x^3 + B \sum x^4 + C \sum x^6 = \sum yx^3$$

x_i	y_i	x^2	x^3	x^4	x^6	$x \times y$	$x^3 \times y$
1	1.2	1	1	1	1	1.2	1.2
2	13.5	4	8	16	64	27	108
3	51.8	9	27	81	729	155.4	1398.6
4	122.9	16	64	256	4096	491.6	7865.6
5	240.5	25	125	625	15625	1202.5	30062.5
15	429.9	55	225	979	20515	1877.7	39435.9

$$5A + 15B + 225C = 429.9$$

$$15A + 55B + 979C = 1877.7$$

$$225A + 979B + 20515C = 39435.9$$

$$\rightarrow A = -1.3028, B = 0.1601, C = 1.9289$$

x_i	$\hat{y}_i$
1	0.7862
2	14.4486
3	51.2578
4	128.7872
5	240.6102

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \left(\sum y_i \right) = 85.98$$

$$s^2 = \frac{SSE}{n - k} = \frac{1.3899}{5 - 3} = 0.6949$$

$$SSE = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 1.3899$$

$$SSR = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 3.8847 \times 10^4$$

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 3.8849 \times 10^4$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = 0.9999$$

مثال: داده‌های زیر با استفاده از معادله $y = Ax + Bx^3$ برازش می‌شوند. مقدار A و B را تعیین کرده و سپس انحراف معیار ثابت‌های محاسبه‌شده را تعیین کنید.

x	y
۱	۱.۲
۲	۱۳.۵
۳	۵۱.۸
۴	۱۲۲.۹
۵	۲۴۰.۵

محاسبه ضرایب:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \\ 3 & 27 \\ 4 & 64 \\ 5 & 125 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 13.5 \\ 51.8 \\ 122.9 \\ 240.5 \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \\ 3 & 27 \\ 4 & 64 \\ 5 & 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 979 \\ 979 & 20515 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1208 & -0.0058 \\ -0.0058 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

$$b = (X'X)^{-1}X'Y^* = \begin{bmatrix} -0.5105 \\ 1.9467 \end{bmatrix}$$

$$A = -0.5105, B = 1.9467$$

محاسبه واریانس و انحراف معیار:

$$\epsilon = Y^* - Y = Y^* - Xb = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 13.5 \\ 51.8 \\ 122.9 \\ 240.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.4361 \\ 14.5522 \\ 51.0282 \\ 122.5441 \\ 240.7797 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2361 \\ -1.0522 \\ 0.7718 \\ 0.3559 \\ -0.2797 \end{bmatrix}$$

$$\varphi = SSE = \epsilon' \epsilon = 1.9635$$

$$\varphi = SSE = Y^{*'} Y^* - b' X' Y^* = 1.9635$$

$$s^2 = \frac{SSE}{n - k} = \frac{\varphi}{n - k} = \frac{1.9635}{5 - 2} = 0.6545$$

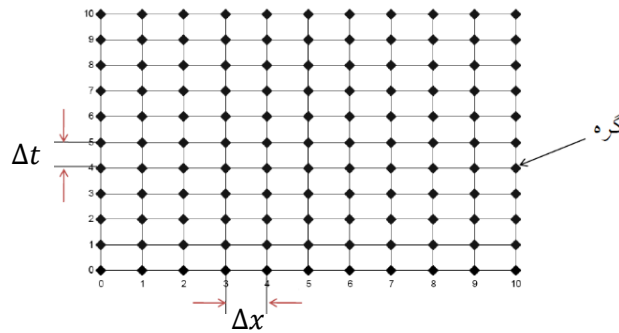
$$s = \sqrt{0.6545} = 0.8090$$

استفاده از تفاضل محدود برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، معادلاتی هستند که بیش از یک متغیر مستقل دارند. یکی از روش‌های حل معادلات پاره‌ای، روش تفاضل محدود می‌باشد. در این بخش نحوه استفاده از تفاضل محدود برای حل این معادلات بررسی می‌گردد. مراحل حل معادلات پاره به روش تفاضل محدود به صورت زیر است:

- ❖ ابتدا محدوده‌ای که قرار هست معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در آن حل شود، تقسیم بندی می‌گردد.
 - ❖ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای توسط روش تفاضل محدود به معادلات تفاضل محدود تبدیل می‌شوند.
 - ❖ دستگاه معادلات تفاضل محدود توسط یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات جبری حل می‌شود.
- به مثال زیر توجه کنید. در این مثال یک معادله یک بعدی ناپایا مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این حالت متغیرهای مستقل x و t می‌باشند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \Delta t = k, \Delta x = h$$



عبارات تفاضل محدود برای شبکه بالا با فرض تفاضل محدود مرکزی برای جهت x و تفاضل پیشرو برای زمان (t) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{t_{j+1} - t_j}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(x_{i+1} - x_i)^2}$$

توسط معادلات فوق، معادله دیفرانسیل پاره‌ای بالا به معادلات تفاضل محدود جبری برای هر یک از گره‌ها تبدیل می‌شود. عبارت‌های تفاضل محدود می‌تواند به صورت مرکزی، پیشرو و پسرو نوشته شود که در گسسته‌سازی مکانی، معمولاً برای گره‌های داخلی از تفاضل مرکزی و برای مرزها از تفاضل‌های پیشرو و پسرو استفاده می‌شود.

تفاضل محدود مرکزی

ساختار کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{a_{i-1}u_{i-1} + a_i u_i + a_{i+1}u_{i+1}}{\Delta x^n} = \frac{a_{i-1}u_{i-1} - 2a_i u_i + a_{i+1}u_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^n}$$

ضرایب مربوط به تفاضل محدود مرکزی برای مشتق‌ها با مراتب مختلف (n) و با استفاده از تعداد نقاط مورد استفاده مختلف که منجر به تغییر دقت تقریب مشتق می‌شود، به صورت زیر است:

مرتبه مشتق (n)	مرتبه دقت	ضریب جمله $i+1$	ضریب جمله i	ضریب جمله $i-1$
۱	۲	۰/۵	۰	-۰/۵
۲	۲	۱	-۲	۱

به طور مثال برای مشتق مرتبه دوم و دقت مرتبه دوم داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x^2)$$

تفاضل محدود پیش‌رو

همانطور که از اسم تفاضل محدود پیش‌رو مشخص است، برای محاسبه مشتق در این روش از مقادیر گره‌های بعدی استفاده می‌گردد. فرض کنید ساختار کلی عبارت تفاضل محدود به صورت زیر باشد:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{a_i u_i + a_{i+1} u_{i+1} + a_{i+2} u_{i+2} + a_{i+3} u_{i+3}}{\Delta x^n} = \frac{a_i u_i + a_{i+1} u_{i+1} + a_{i+2} u_{i+2} + a_{i+3} u_{i+3}}{(x_{i+1} - x_i)^n}$$

در نتیجه ضرایب عبارت بالا به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

مرتبه مشتق (n)	مرتبه دقت	ضریب جمله i	ضریب جمله $i+1$	ضریب جمله $i+2$	ضریب جمله $i+3$
۱	۱	-۱	۱	۰	۰
	۲	-۱/۵	۲	-۰/۵	۰
۲	۱	۱	-۲	۱	۰
	۲	۲	-۵	۴	-۱

به طور مثال برای تفاضل پیش‌رو، بر اساس مشتق مرتبه اول و دقت مرتبه اول خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u_i + u_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{-u_i + u_{i+1}}{\Delta x} + o(\Delta x)$$

تفاضل محدود پسرو

برای ضرایب تفاضل محدود پسرو می توان از ضرایب تفاضل محدود پیشرو استفاده کرد. فقط ضرایب پیشرو را برای مشتق های فرد باید در ۱- ضرب کرد تا ضرایب تفاضل محدود پسرو به دست آید. ساختار کلی زیر را برای تفاضل محدود پسرو در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{a_i u_i + a_{i-1} u_{i-1} + a_{i-2} u_{i-2} + a_{i-3} u_{i-3}}{\Delta x^n} = \frac{a_i u_i + a_{i-1} u_{i-1} + a_{i-2} u_{i-2} + a_{i-3} u_{i-3}}{(x_{i+1} - x_i)^n}$$

ضریب جمله $i-3$	ضریب جمله $i-2$	ضریب جمله $i-1$	ضریب جمله i	مرتبه دقت	مرتبه مشتق (n)
۰	۰	-۱	۱	۱	۱
۰	۰/۵	-۲	۱/۵	۲	
۰	۱	-۲	۱	۱	۲
-۱	۴	-۵	۲	۲	

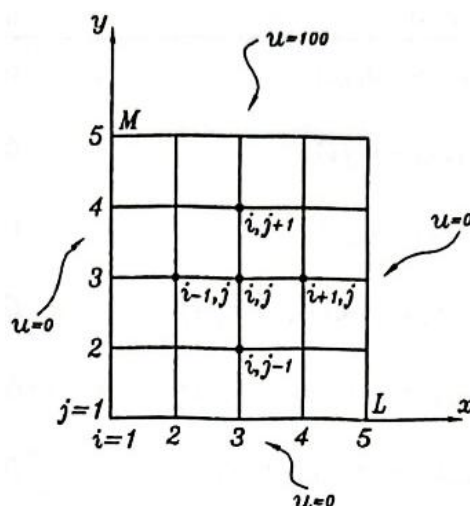
حل معادله لاپلاس

معادله لاپلاس که یک معادله بیضوی می باشد را می توان با استفاده از روش تفاضل محدود حل نمود. به طور مثال معادله لاپلاس زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(0, y) = u(x, 0) = u(L, y) = 0, u(x, M) = 100$$

در این صورت ابتدا محدوده مسئله را مطابق شکل زیر تقسیم بندی کرده و آنگاه معادل تفاضل محدود هر کدام از مشتق ها نوشته می شود:



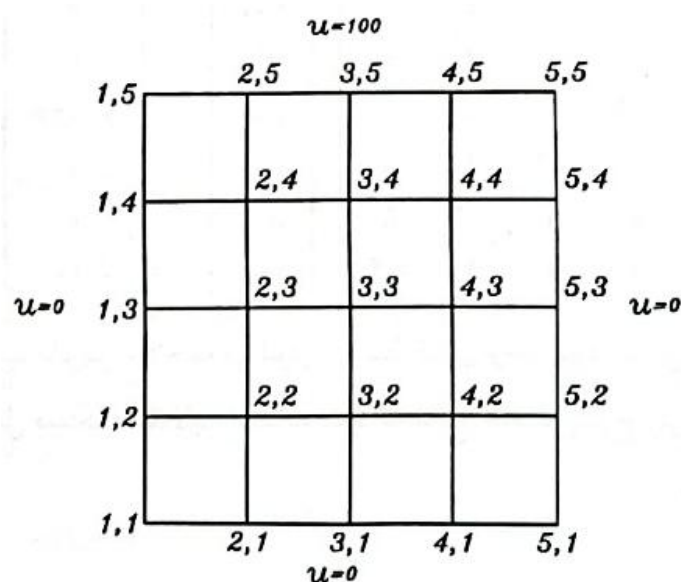
با قرار دادن معادلات بالا، در معادله پاره‌ای و با فرض $\Delta x = \Delta y = h$ معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

این معادله در هر نقطه در محدوده مسئله و مرزها صدق می‌کند اما با توجه اینکه مقادیر تابع در مرزها مشخص شده است لذا برای محدوده داخل مرزها استفاده می‌شود.

$$u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{ij} = 0 \quad i = 2, 3, 4 \quad j = 2, 3, 4$$



با نوشتن معادله بالا به ازای i از ۲ تا ۴ و j از ۲ تا ۴ یک دستگاه معادلات جبری به دست می‌آید که با روش‌های مختلف قابل حل هست. با توجه به شکل بالا دستگاه معادلات نه مجهولی زیر تنظیم می‌شود:

$$i = 2, j = 2 \quad 0 + u_{2,3} + u_{3,2} + 0 - 4u_{2,2} = 0$$

$$j = 3 \quad 0 + u_{2,4} + u_{3,3} + u_{2,2} - 4u_{2,3} = 0$$

$$j = 4 \quad 0 + 100 + u_{3,4} + u_{2,3} - 4u_{2,4} = 0$$

$$i = 3, j = 2 \quad u_{2,2} + u_{3,3} + u_{4,2} + 0 - 4u_{3,2} = 0$$

$$j = 3 \quad u_{2,3} + u_{3,4} + u_{4,3} + u_{3,2} - 4u_{3,3} = 0$$

$$j = 4 \quad u_{2,4} + 100 + u_{4,4} + u_{3,3} - 4u_{3,4} = 0$$

با توجه به تقارن موجود می‌توان نوشت:

$$u_{4,4} = u_{2,4}$$

$$u_{4,3} = u_{2,3}$$

$$u_{4,2} = u_{2,2}$$

لذا معادلات به دست آمده را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} \\ u_{23} \\ u_{24} \\ u_{32} \\ u_{33} \\ u_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

این دستگاه را می‌توان به روش‌های مختلفی از جمله روش ماتریسی حل نمود که نتایج آن به صورت زیر است:

$$u_{2,2} = 7,14$$

$$u_{2,3} = 18,75$$

$$u_{2,4} = 42,85$$

$$u_{3,2} = 9,82$$

$$u_{3,3} = 25$$

$$u_{3,4} = 52,68$$

حل معادلات تفاضل محدود (معادلات ایجاد شده برای گره‌ها) به صورت عددی و با استفاده از الگوریتم‌های تکرارشونده بسیار متداول هست. در مثال زیر از روش‌های تکرارشونده برای حل معادلات تفاضل محدود استفاده می‌شود.

مثال: انتقال حرارت حالت پایدار در یک سطح مستطیلی نازک توسط معادله زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

معادله دیفرانسیلی پاره‌ای بالا را برای شرایط مرزی زیر حل نمایید:

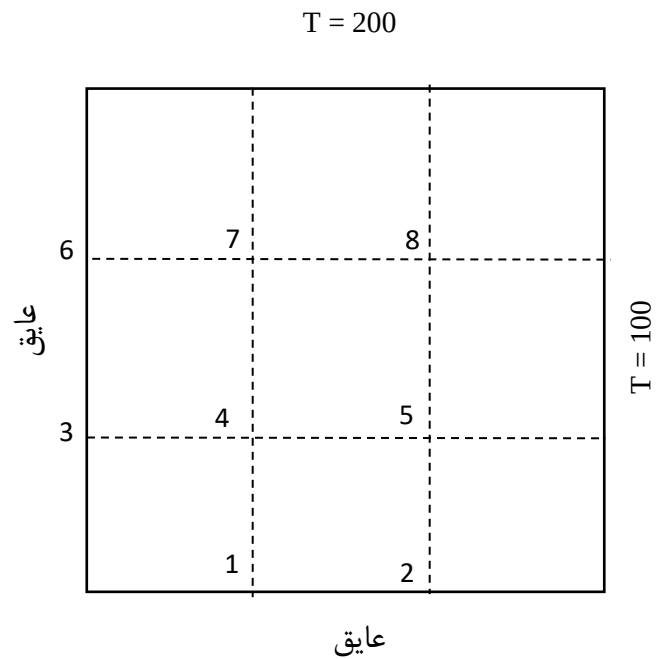
$$x = 0; \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$x = L; T = 100$$

$$y = 0; \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$y = H; T = 200$$

$$L = H = 1, \Delta x = \Delta y = 0.333$$



توجه: برای پیاده‌سازی تفاضل محدود در گره‌های داخلی و مرزی، بهتر هست مرتبه‌ی خطاهای روابط تفاضل محدود یکسان باشد.

گره‌های ۴، ۵، ۷ و ۸:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2} (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1})$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) + \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}) = 0$$

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})$$

$$T_4 = \frac{1}{4}(T_3 + T_7 + T_5 + T_1)$$

$$T_5 = \frac{1}{4}(T_4 + T_2 + 100 + T_8)$$

$$T_7 = \frac{1}{4}(T_6 + T_4 + T_8 + 200)$$

$$T_8 = \frac{1}{4}(T_7 + T_5 + 100 + 200)$$

گره‌های ۱ و ۲ (بر روی سطح عایق):

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta y}(-3T_{i,j} + 4T_{i,j+1} - T_{i,j+2}) = 0 \rightarrow T_{i,j} = \frac{4T_{i,j+1} - T_{i,j+2}}{3}$$

$$T_1 = \frac{4T_4 - T_7}{3}$$

$$T_2 = \frac{4T_5 - T_8}{3}$$

گره‌های ۳ و ۶ (بر روی سطح عایق):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x}(-3T_{i,j} + 4T_{i+1,j} - T_{i+2,j}) \rightarrow T_{i,j} = \frac{4T_{i+1,j} - T_{i+2,j}}{3}$$

$$T_3 = \frac{4T_4 - T_5}{3}$$

$$T_6 = \frac{4T_7 - T_8}{3}$$

$$T_{Initial\ guess} = 150$$

این سوال با یک الگوریتم تکرارشونده حل می‌شود، به طور مثال می‌توان از گره شماره ۱ شروع کرد و مقادیر تمام گره‌ها را به ترتیب محاسبه نمود. لازم به ذکر است که برای محاسبات هر گره، از آخرین مقادیر موجود برای گره‌های دیگر استفاده می‌گردد. با توجه به طبیعت تکرارشونده این روش، نیاز به حدس اولیه است. برای حدس از میانگین دماهای مربوط به شرط‌های دما ثابت استفاده می‌گردد. در این سوال میانگین دما ۱۵۰ است. فرایند محاسبه دما تا زمان همگرایی و ثابت شدن آن‌ها تکرار می‌گردد.

$$T_1 = \frac{4T_4 - T_7}{3} = \frac{4 \times 150 - 150}{3} = 150$$

$$T_2 = \frac{4T_5 - T_8}{3} = \frac{4 \times 150 - 150}{3} = 150$$

$$T_3 = \frac{4T_4 - T_5}{3} = \frac{4 \times 150 - 150}{3} = 150$$

$$T_4 = \frac{1}{4}(T_3 + T_7 + T_5 + T_1) = 150$$

$$T_5 = \frac{1}{4}(T_4 + T_2 + 100 + T_8) = \frac{1}{4}(150 + 150 + 100 + 150) = 137.5$$

$$T_6 = \frac{4T_7 - T_8}{3} = \frac{4 \times 150 - 150}{3} = 150$$

$$T_7 = \frac{1}{4}(T_6 + T_4 + T_8 + 200) = 162.5$$

$$T_8 = \frac{1}{4}(T_7 + T_5 + 100 + 200) = \frac{1}{4}(162.5 + 137.5 + 100 + 200) = 150$$

حل معادلات یک بعدی ناپایا

معادلات دیفرانسیلی یک بعدی ناپایا که دارای دو متغیر مستقل x و t هست را می توان به دو روش صریح و ضمنی حل نمود. لازم به ذکر است که روند گسسته سازی و حل برای مسائل دوبعدی ناپایا نیز به همین شکل می باشد.

الف) روش FTCS^{۴۳}

این یک روش صریح مرتبه اول زمان و مرتبه دوم برای مکان است و معمولاً برای معادلات دیفرانسیل پاره ای سهموی همانند معادله حرارت استفاده می شود. در این روش برای مکان از تفاضل محدود مرکزی و برای زمان از تفاضل پیشرو استفاده می شود. در این روش، نیاز به برقراری شرط همگرایی از نقاط ضعف آن می باشد. با این وجود در این روش می توان مقادیر هر گره را به صورت مجزا (صریح) محاسبه نمود و نیاز به حل همزمان گره ها وجود ندارد. معادله حرارت یک بعدی و ناپایا زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; 0 < x < a, 0 < t \leq t_f$$

در این حالت شرط اولیه به صورت زیر می باشد:

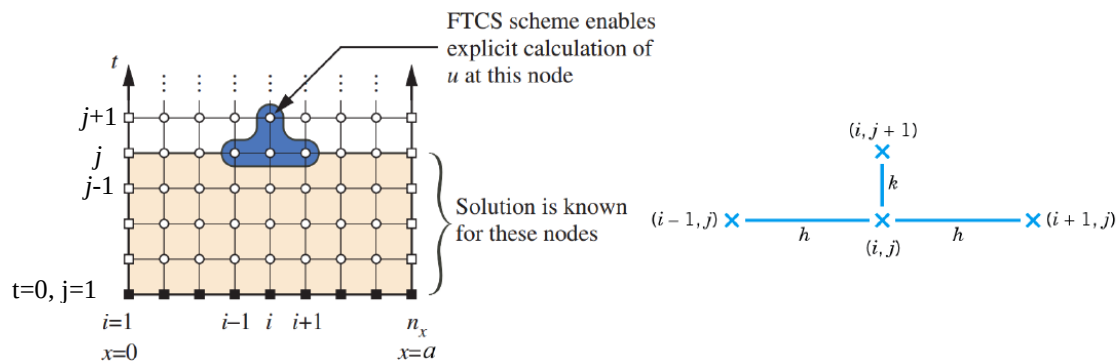
$$T(x, 0) = f(x), 0 < x < a$$

همچنین شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می گردند:

$$T(0, t) = g_1(t), 0 < t \leq t_f$$

$$T(a, t) = g_2(t), 0 < t \leq t_f$$

⁴³ Forward Time Central Space



در شکل بالا، Δt برابر با k و Δx برابر با h در نظر گرفته شده است. در نتیجه تفاضل محدود پیش‌رو برای زمان به صورت زیر است:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{k} (T_{i,j+1} - T_{i,j})$$

لازم به ذکر است که در عبارت بالا i مربوط به گسسته‌سازی مکانی و j مربوط به گسسته‌سازی زمانی می‌باشد. همچنین تفاضل محدود مرکزی برای مکان به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})$$

با جایگذاری تفاضل‌های محدود مکان و زمان در معادله پاره‌ای دما خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{k} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) = \frac{c}{h^2} (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})$$

$$T_{i,j+1} = \lambda T_{i-1,j} + (1 - 2\lambda) T_{i,j} + \lambda T_{i+1,j}, \lambda = \frac{ck}{h^2} = \frac{c\Delta t}{\Delta x^2}$$

شرط لازم و کافی برای همگرایی این روش در حالت یک بعدی $\lambda \leq 0.5$ می‌باشد. پس گام‌های زمانی باید به صورتی تعریف شود که شرط بالا برقرار باشد و در نتیجه از واگرایی روش جلوگیری شود. برای حالت دو بعدی شرط پایداری به صورت $c\Delta t \leq \frac{1}{2[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}]}$ است.

(ب) روش $BTCS^{44}$

این یک روش غیرصریح مرتبه اول زمان و مرتبه دوم برای مکان است و همانند روش FTCS، معمولاً برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی همانند معادله حرارت استفاده می‌شود. در این روش برای مکان از تفاضل محدود مرکزی و برای زمان از تفاضل پس‌رو استفاده می‌شود. مشکل (نیاز به پایداری شرط) همگرایی در این روش مطرح نیست، اما محاسبات پیچیده‌تری نسبت به روش‌های صریح دارد. همانند بخش قبل، معادله حرارت یک بعدی زیر را در نظر بگیرید:

⁴⁴ Forward Time Central Space

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; 0 < x < a, 0 < t \leq t_f$$

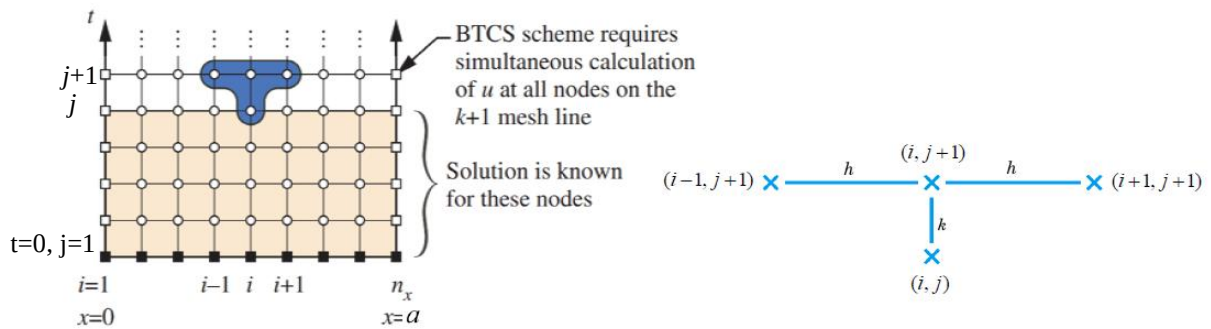
در این حالت شرط اولیه به صورت زیر می باشد:

$$T(x, 0) = f(x), 0 < x < a$$

همچنین شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می گردند:

$$T(0, t) = g_1(t), 0 < t \leq t_f$$

$$T(a, t) = g_2(t), 0 < t \leq t_f$$



در شکل بالا، Δt برابر با k و Δx برابر با h در نظر گرفته شده است. در نتیجه تفاضل محدود پسرو برای زمان به صورت زیر است:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{k} (T_{i,j+1} - T_{i,j})$$

همچنین تفاضل محدود مرکزی برای مکان به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1})$$

با جایگذاری تفاضل های محدود مکان و زمان در معادله پاره ای دما خواهیم داشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{k} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) = \frac{c}{h^2} (T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1})$$

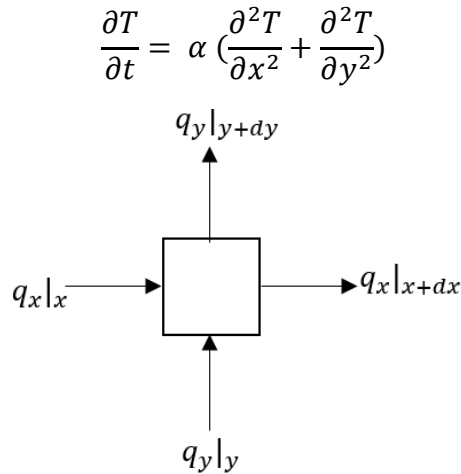
$$-\lambda T_{i-1,j+1} + (1 - \lambda) T_{i,j+1} - \lambda T_{i+1,j+1} = T_{i,j}, \lambda = \frac{ck}{h^2} = \frac{c\Delta t}{\Delta x^2}$$

با نوشتن این معادله برای تمامی گره ها و مرتب کردن معادلات در قالب ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & & & \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & & \\ & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ T_{3,j+1} \\ 0 \\ T_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,j} + \lambda T_{0,j+1} \\ T_{2,j} \\ T_{3,j} \\ 0 \\ T_{n-1,j} + \lambda T_{n,j+1} \end{bmatrix}$$

حل این دستگاه نیاز به شرط همگرایی ندارد.

مثال: الف) نشان دهید که معادله انتقال حرارت برای یک صفحه نازک در شرایط ناپایا به صورت زیر است:



روش اول، موازنه انرژی:

$$q_x'' A_x|_x - q_x'' A_x|_{x+dx} + q_y'' A_y|_y - q_y'' A_y|_{y+dy} = \frac{\partial (m C_p T)}{\partial t}$$

$$q_x'' A_x|_{x+dx} = q_x'' A_x|_x + \frac{\partial q_x'' A_x}{\partial x} dx, \quad q_y'' A_y|_{y+dy} = q_y'' A_y|_y + \frac{\partial q_y'' A_y}{\partial y} dy$$

$$-\frac{\partial q_x'' A_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y'' A_y}{\partial y} dy = \frac{\partial (dm C_p T)}{\partial t}, \quad A_x = w dy, \quad A_y = w dx, \quad m, c_p = \text{cte}$$

$$-\frac{\partial (q_x'' w dy)}{\partial x} dx - \frac{\partial (q_y'' w dx)}{\partial y} dy = dm C_p \frac{dT}{dt}, \quad dm = \rho \cdot dV, \quad dV = dx \cdot dy \cdot w, \quad q_x''$$

$$= -k \frac{dT}{dx}, \quad q_y'' = -k \frac{dT}{dy}$$

$$w \cdot dy \cdot k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx + w dy k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot w \cdot C_p \frac{dT}{dt}, \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

روش دوم، ساده سازی معادله انرژی:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad k_x = k_y = k_z = k, \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

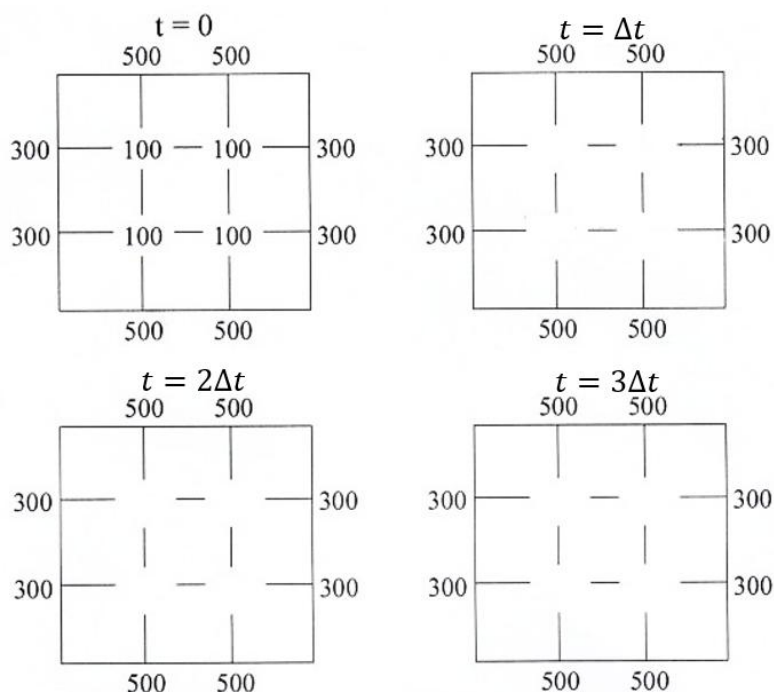
ب) با فرض اینکه $\Delta x = \Delta y = 0.333$ باشد، بیشینه مقدار گام زمانی را برای به دست آوردن حل عددی پایدار به دست آورید.

$$\alpha \Delta t \leq \frac{1}{2 \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right]} \rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4\alpha} \rightarrow \Delta t \leq \frac{0.3333^2}{4 \times 0.1} \rightarrow \Delta t \leq 0.277$$

ج) مقادیر دما را با استفاده از روش تفاضل محدود و به صورت صریح بر اساس شرایط اولیه و مرزی نشان داده شده در شکل زیر به دست آورید. از گام زمانی به دست آمده در قسمت ب استفاده نمایید.

سایر اطلاعات مورد نیاز:

$$L = H = 1, \alpha = 0.1, \Delta x = \Delta y = 0.333$$



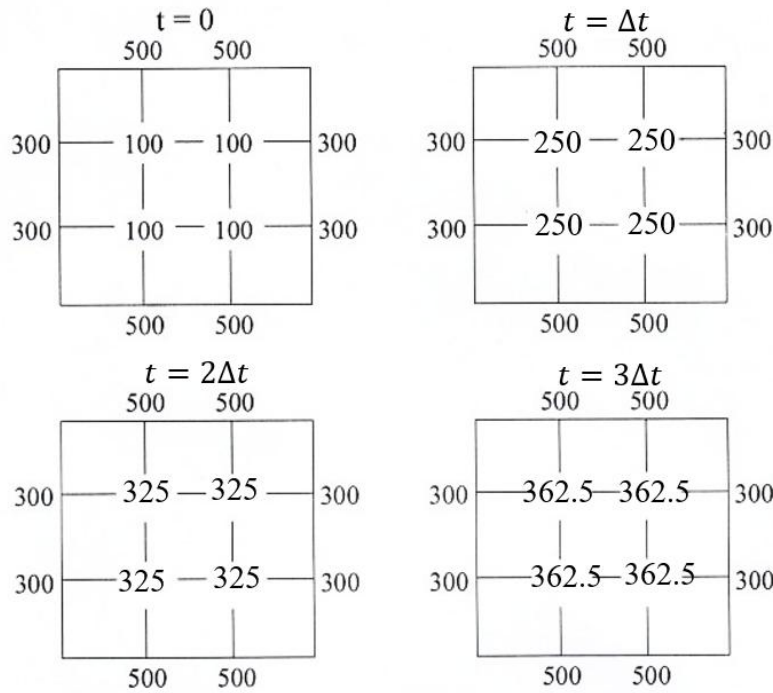
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,j,n} - 2T_{i,j,n} + T_{i-1,j,n})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2} (T_{i,j+1,n} - 2T_{i,j,n} + T_{i,j-1,n})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (T_{i,j,n+1} - T_{i,j,n})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} (T_{i,j,n+1} - T_{i,j,n}) \\
&= \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1,j,n} - 2T_{i,j,n} + T_{i-1,j,n}) + \frac{\alpha}{\Delta y^2} (T_{i,j+1,n} - 2T_{i,j,n} + T_{i,j-1,n}) \\
& (T_{i,j,n+1} - T_{i,j,n}) = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1,j,n} - 2T_{i,j,n} + T_{i-1,j,n}) + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} (T_{i,j+1,n} - 2T_{i,j,n} + T_{i,j-1,n}) \\
& T_{i,j,n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i+1,j,n} - 2T_{i,j,n} + T_{i-1,j,n}) + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} (T_{i,j+1,n} - 2T_{i,j,n} + T_{i,j-1,n}) + T_{i,j,n} \\
& T_{i,j,n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i+1,j,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i-1,j,n} + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\right) T_{i,j,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} T_{i,j-1,n} \\
& \quad + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} T_{i,j+1,n} \\
& T_{i,j,n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i+1,j,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i-1,j,n} + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\right) T_{i,j,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} T_{i,j-1,n} \\
& \quad + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} T_{i,j+1,n} \\
& T_{i,j,n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i+1,j,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i-1,j,n} + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\right) T_{i,j,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} T_{i,j-1,n} \\
& \quad + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} T_{i,j+1,n} \\
& T_{i,j,n+1} = 0.25 T_{i+1,j,n} + 0.25 T_{i-1,j,n} + 0.25 T_{i,j-1,n} + 0.25 T_{i,j+1,n}
\end{aligned}$$



مثال: معادله انتقال حرارت ناپایا در یک میله با تولید انرژی در طول آن به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta T$$

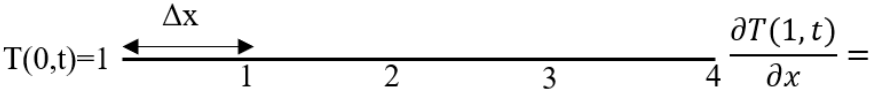
$$T(x, 0) = 0$$

$$T(0, t) = 1$$

$$\frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0$$

با فرض اینکه Δt برابر با ۰/۱ ثانیه می باشد، این معادله را با استفاده از تفاضل محدود و به صورت صریح حل

نمایید. ($\alpha = 0.1, \beta = 1$)



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta T$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,n} - 2T_{i,n} + T_{i-1,n})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (T_{i,n+1} - T_{i,n})$$

$$\frac{1}{\Delta t} (T_{i,n+1} - T_{i,n}) = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i+1,n} - 2T_{i,n} + T_{i-1,n}) + \beta T_{i,n}$$

$$T_{i,n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i+1,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{i-1,n} + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) T_{i,n} + \beta \Delta t T_{i,n}$$

گروه های ۱ تا ۳:

$$T_{1,n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{2,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \beta \Delta t\right) T_{1,n}$$

$$T_{2,n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{3,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{1,n+1} + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \beta \Delta t\right) T_{2,n}$$

$$T_{3,n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{4,n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} T_{2,n+1} + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \beta \Delta t\right) T_{3,n}$$

گروه ۴:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} (3T_{i,n+1} - 4T_{i-1,n+1} + T_{i-2,n+1}) = 0 \rightarrow T_{i,n+1} = \frac{4T_{i-1,n+1} - T_{i-2,n+1}}{3}$$

$$T_{4,n+1} = \frac{4T_{3,n+1} - T_{2,n+1}}{3}$$

با جایگذاری مقادیر برای گروه های ۱ تا ۴ و انجام فرایند تکرار، نتایج حاصل می گردد.

مسائل مقدار مرزی (BVP)

معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی مشخص در بیش از یک نقطه، به عنوان مسائل مقدار مرزی دسته‌بندی می‌شوند. روش‌های مختلفی برای حل این معادلات وجود دارد که می‌توان به روش پرتابی^{۴۵} و روش تفاضل محدود^{۴۶} اشاره نمود. معادلات در این نوع مسائل می‌توانند خطی و یا غیرخطی باشند. فرم استاندارد (متعارف) برای یک مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای با شرایط مرزی خطی، به صورت زیر است:

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad x_0 \leq x \leq x_f; j = 1, 2, \dots, n$$

در رابطه بالا j شماره معادله می‌باشد. شرایط مرزی در نقطه اولیه x_0 و نقطه نهایی x_f هستند. فرض کنید که r معادله اول دارای شرط اولیه و $(n-r)$ معادله بعدی، دارای شرط نهایی هستند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$y_j(x_0) = y_{j,0} \quad j = 1, 2, \dots, r$$

$$y_j(x_f) = y_{j,f} \quad j = r + 1, \dots, n$$

همچنین یک مساله مقدار مرزی می‌تواند به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه n باشد. به عنوان مثال، در اینجا از مرتبه دوم با دو شرط مرزی (در دو نقطه) بوده و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad x_0 \leq x \leq x_f$$

شرایط مرزی می‌توانند با ساختار کلی زیر در نظر گرفته شوند:

$$a_0 y(x_0) + b_0 y'(x_0) = \gamma_0$$

$$a_f y(x_f) + b_f y'(x_f) = \gamma_f$$

که زیروندهای 0 و f به ترتیب نشان دهنده نقطه اول و نقطه نهایی هستند. در ادامه به روش‌های حل این معادلات اشاره می‌گردد.

الف) روش پرتابی

در این روش، مساله، به یک مساله مقدار اولیه (IVP) تبدیل می‌گردد تا بتوان از روش‌های موجود برای IVP، برای حل مسائل مقدار مرزی استفاده نمود. از آنجایی که برخی از شرایط مرزی در نقطه نهایی هستند، لذا باید برای توابعی که شرط مرزی آنها در نقطه انتهایی است، مقدار اولیه را حدس زد. به این شکل، با استفاده از شرایط حدس زده شده، مساله را به صورت یک مساله مقدار اولیه حل نموده تا در نقطه نهایی، جواب توابع حاصل گردد. آنگاه این جواب‌ها را با مقادیر واقعی مقایسه و در صورت نیاز حدس دیگری انتخاب می‌گردد.

⁴⁵ Shooting method

⁴⁶ Finite difference method

در صورتی که جواب حاصل از حدس دوم هم درست نبود، با استفاده از روش قطاع (میان‌یابی)، حدس سوم انتخاب می‌گردد. اگر حدس اول y_1 به جواب y_{f1} و حدس دوم y_2 به جواب y_{f2} برسد، می‌توان بر اساس این مقادیر به یک رابطه خطی بین حدس‌های اولیه و جواب‌ها رسید:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{y_f - y_{f1}}{y_{f2} - y_{f1}}$$

که در آن y_f مقدار تابع در نقطه نهایی (مقدار دقیق بر اساس سوال) و y حدس جدید است. اگر مقدار مورد نظر y_f (مقداری که می‌خواهیم به آن برسیم)، در رابطه بالا قرار داده شود، مقدار جدیدی برای y به عنوان حدس اولیه جدید به دست می‌آید.

توجه: در روش پرتابی، در صورتی که یک معادله مرتبه n وجود داشته باشد، باید با تغییر متغیر، به n معادله مرتبه یک تغییر یابد تا حل آن با استفاده از روش‌هایی از جمله اوایلر و رانگ-کاتا امکان‌پذیر باشد.

مثال: با استفاده از روش پرتابی معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0.01 (T - 20)^{\frac{1}{3}}, T(0) = 200, T(10) = 40, h = 0.25$$

$$\frac{dT}{dx} = \theta$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0.01 (T - 20)^{\frac{1}{3}}$$

با توجه به اینکه با افزایش x مقدار T کاهش می‌یابد، برای حدس اولیه $\theta_{x=0}$ یک مقدار منفی باید در نظر گرفته شود که مقدار $\theta(0) = -15$ فرض می‌شود.

با استفاده از رانگ-کاتا مرتبه ۴:

$$\begin{cases} T_{i+1} = T_i + \frac{1}{6} (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) & f(x, T, \theta) = \theta \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \frac{1}{6} (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) & g(x, T, \theta) = 0.01 (T - 20)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$m_1 = hf(x_i, T_i, \theta_i) = h\theta_i$$

$$m_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{m_1}{2}, \theta_i + \frac{n_1}{2}\right) = h\left(\theta_i + \frac{n_1}{2}\right)$$

$$m_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{m_2}{2}, \theta_i + \frac{n_2}{2}\right) = h\left(\theta_i + \frac{n_2}{2}\right)$$

$$m_4 = hf(x_i + h, T_i + m_3, \theta_i + n_3) = h(\theta_i + n_3)$$

$$n_1 = hg(x_i, T_i, \theta_i) = 0.01 h(T_i - 20)^{\frac{1}{3}}$$

$$n_2 = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{m_1}{2}, \theta_i + \frac{n_1}{2}\right) = 0.01h\left(T_i + \frac{m_1}{2} - 20\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$n_3 = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{m_2}{2}, \theta_i + \frac{n_2}{2}\right) = 0.01h\left(T_i + \frac{m_2}{2} - 20\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$n_4 = hg(x_i + h, T_i + m_3, \theta_i + n_3) = 0.01h(T_i + m_3 - 20)^{\frac{1}{3}}$$

$$m_1 = hf(x_i, T_i, \theta_i) = (0.25)(-15) = -3.75$$

$$n_1 = hg(x_i, T_i, \theta_i) = (0.25)(0.01)(200 - 20)^{\frac{1}{3}} = 0.01412$$

$$m_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{m_1}{2}, \theta_i + \frac{n_1}{2}\right) = (0.25)\left(-15 + \frac{0.01412}{2}\right) = -3.74824$$

$$n_2 = hg(x_i, T_i, \theta_i) = (0.25)(0.01)\left(200 - \frac{3.75}{2} - 20\right)^{\frac{1}{3}} = 0.01407$$

$$m_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{m_2}{2}, \theta_i + \frac{n_2}{2}\right) = (0.25)\left(-15 + \frac{0.01407}{2}\right) = -3.74824$$

$$n_3 = hg\left(x_i + \frac{h}{2}, T_i + \frac{m_2}{2}, \theta_i + \frac{n_2}{2}\right) = (0.25)(0.01)\left(200 + \frac{-3.7482}{2} - 20\right)^{\frac{1}{3}} = 0.01407$$

$$m_4 = hf(x_i + h, T_i + m_3, \theta_i + n_3) = (0.25)(-15 + 0.01407) = -3.74648$$

$$n_4 = hg(x_i + h, T_i + m_3, \theta_i + n_3) = 0.01(0.25)(200 - 3.74824 - 20)^{\frac{1}{3}} = 0.01402$$

$$T(0.25) = 200 + \frac{1}{6}(-3.75 + 2(-3.74824) + 2(-3.74824) - 3.74648) = 196.2518$$

$$\theta(0.25) = -15 + \frac{1}{6}(0.01412 + 2 \times 0.01407 + 2 \times 0.01407 + 0.01402) = -14.9859$$

با ادامه‌ی حل برای حدس $\theta(0) = -15$ ، مقدار T در $x = 10$ برابر با 52.5120 می‌شود.

با تکرار فرایند برای حدس جدید $\theta(0) = -17$ ، مقدار T در $x = 10$ برابر با 32.4560 می‌شود.

با استفاده از میان‌یابی برای تعیین حدس جدید:

$$\frac{52.5120 - 32.4560}{-15 - (-17)} = \frac{40 - 32.4560}{\theta - (-17)} \rightarrow \theta(0) = -16.2477$$

که حدس خوبی می‌باشد و مقدار T در $x = 10$ تقریباً برابر با 40 می‌شود.

مثال: توزیع دمای حالت پایا در یک میله فلزی توسط معادله زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - 2\theta^{1.5} = 0$$

$$x = 0, \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$x = 1, \theta = 20$$

این مسئله را با روش پرتابی حل کنید. برای انتگرال‌گیری رو به جلو از روش اویلر استفاده کرده و گام انتگرال‌گیری را برابر با در نظر بگیرید. ($\Delta x = 0.25$)

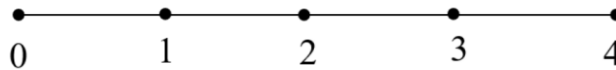
$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - 2\theta^{1.5} = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} = 2\theta^{1.5}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 2y_1^{1.5}$$

روش اویلر:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$



حدس: در $x = 0$ مقدار $y_1 = 5$ در نظر گرفته می‌شود.

گره یک:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 2y_1^{1.5} \end{bmatrix}, y(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(5^{1.5}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22.3606 \end{bmatrix}$$

$$y(0.25) = y(0) + hf = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 0 \\ 22.3606 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5.5902 \end{bmatrix}$$

$$y(0.25) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5.5902 \end{bmatrix}$$

گره دو:

$$f = \begin{bmatrix} 5.5902 \\ 22.3606 \end{bmatrix}$$

$$y(0.5) = y(0.25) + hf = \begin{bmatrix} 6.3975 \\ 11.1803 \end{bmatrix}$$

گره سه:

$$y(0.75) = y(0.5) + hf = \begin{bmatrix} 6.3975 \\ 11.1803 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 11.1803 \\ 32.3601 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.1926 \\ 19.2711 \end{bmatrix}$$

گره چهار:

$$y(1) = y(0.75) + hf = \begin{bmatrix} 9.1926 \\ 19.2711 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} 19.2711 \\ 55.7429 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.0104 \\ 33.2068 \end{bmatrix}$$

با توجه به اختلاف در $y_1(1) = 14.0104$ محاسبه شده بر اساس حدس $y_1(0) = 5$ و مقدار واقعی در صورت مسئله ($y_1(1) = 20$) باید حدس جدیدی برای مقدار y_1 در نقطه $x = 0$ در نظر بگیریم. مقدار حدس جدید را برابر با $y_1(0) = 7$ در نظر می‌گیریم که نتایج در جدول زیر گزارش شده است.

y_1	7	7	9.3150	13.9451	22.1289
y_2	0	9.2601	18.5203	32.7352	58.7729

برای تعیین حدس جدید y_1 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y_{\text{دقیق در مرز انتهایی}} = y_{\text{حدس اول}} + \frac{y_{\text{حدس دوم}} - y_{\text{حدس اول}}}{y_{\text{به دست آمده با حدس دوم در مرز انتهایی}} - y_{\text{به دست آمده با حدس اول در مرز انتهایی}}} (y_{\text{دقیق در مرز انتهایی}} - y_{\text{به دست آمده با حدس اول در مرز انتهایی}})$$

$$y_1(0) = 5 + \frac{7 - 5}{22.1289 - 14.0104} (20 - 14.0104) = 6.4755$$

روش تفاضل محدود

در این روش، به جای مشتق‌های موجود در معادلات دیفرانسیل، مقدار تفاضل محدود آن‌ها قرار داده می‌شود. به این ترتیب دستگاهی از معادلات دیفرانسیل ایجاد می‌گردد که با روش‌های عدد قابل حل هست. برای مثال، به دستگاه دو معادله‌ای زیر توجه نمایید:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)$$

شرایط مرزی به شکل زیر است:

$$y_1(x_0) = y_{1,0}$$

$$y_2(x_f) = y_{2,f}$$

حال مشتق‌ها به کمک فرمول‌های مشتق تفاضل محدود مرکزی باز می‌گردند:

$$\frac{dy_{1,i}}{dx} = \frac{1}{2h}(y_{1,i+1} - y_{1,i-1}) + O(h^2)$$

$$\frac{dy_{2,i}}{dx} = \frac{1}{2h}(y_{1,i+1} - y_{1,i-1}) + O(h^2)$$

اگر معادلات مشتق تفاضل محدود با خطای مرتبه دو، جایگزین مشتقات موجود در معادلات دیفرانسیل دستگاه بالا گردد، خواهیم داشت:

$$y_{1,i+1} - y_{1,i-1} = 2hf_1(x, y_{1,i}, y_{2,i})$$

$$y_{2,i+1} - y_{2,i-1} = 2hf_2(x, y_{1,i}, y_{2,i})$$

در این مرحله، بازه انتگرال‌گیری (یا همان بازه حل مساله) به n قسمت مساوی تقسیم می‌شود که برای هر نقطه در اینجا دو معادله بر اساس تفاضل محدود وجود دارد (با توجه به اینکه در این مثال دو معادله داریم). لازم به ذکر است که این تقسیم‌بندی با توجه به گام مورد نظر برای حل مساله تعیین می‌گردد. در نهایت باید دستگاه ایجاد شده را بر اساس روش‌های عددی حل نمود.

نکته: اگر در مرزها ابتدایی و انتهایی شرط مشتق وجود داشته باشد، باید از تفاضل محدود پیش‌رو و پس‌رو با مرتبه خطای یکسان با تفاضل مرکزی (استفاده شده برای گره‌های داخلی) استفاده نمود. به طور مثال برای مرز ابتدایی بر اساس تفاضل پیش‌رو نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2h}(-y_{i+2} + 4y_{i+1} - 3y_i)$$

برای مرز پایانی نیز به صورت مشابه از تفاضل پس‌رو استفاده می‌گردد.

نکته: در روش تفاضل محدود در صورتی که مرتبه مشتق بیشتر از یک باشد، نیازی به تغییر متغیر، کاهش مرتبه و تبدیل معادله به دستگاه معادلات نیست. می‌توان مستقیماً تفاضل محدود را برای معادلات با مرتبه بالاتر نوشت. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر با استفاده از روش اختلاف مرکزی حل کنید:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2$$

$$y(0) = 0, y(1) = -0.4, \Delta x = 0.2$$

$x = 0$	0.2	0.4	0.6	0.8	$x = 1$
---------	-----	-----	-----	-----	---------

$y = 0$	y_1	y_2	y_3	y_4	$y = -0.4$
---------	-------	-------	-------	-------	------------

با استفاده از روش تفاضل مرکزی معادله داده شده به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + y_i = x_i^2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

با توجه به اینکه $\Delta x = 0.2$:

$$25 y_{i+1} - 49y_i + 25 y_{i-1} = x_i^2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

بنابراین به ازای هر نقطه معادله آن نوشته می‌شود:

$$i = 1 \quad 25 y_2 - 49y_1 + 25 y_0 = 0.04$$

$$i = 2 \quad 25 y_3 - 49y_2 + 25 y_1 = 0.16$$

$$i = 3 \quad 25 y_4 - 49y_3 + 25 y_2 = 0.36$$

$$i = 4 \quad 25 y_5 - 49y_4 + 25 y_3 = 0.64$$

در نتیجه:

$$i = 1 \quad 25 y_2 - 49y_1 + 25(0) = 0.04$$

$$i = 2 \quad 25 y_3 - 49y_2 + 25 y_1 = 0.16$$

$$i = 3 \quad 25 y_4 - 49y_3 + 25 y_2 = 0.36$$

$$i = 4 \quad 25 (-0.4) - 49y_4 + 25 y_3 = 0.64$$

$$\begin{bmatrix} -49 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & -49 & 25 & 0 \\ 0 & 25 & -49 & 25 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.16 \\ 0.36 \\ 10.64 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه معادلات بالا بر اساس روش‌های عددی خواهیم داشت:

$$y_1 = -0.113, y_2 = -0.22, y_3 = -0.311, y_4 = -0.376$$