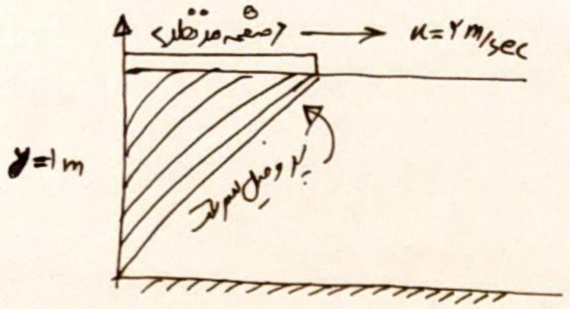
هیدرولیک محاسباتی (۱۴۰۰/۰۲/۱۶) - جلسه هفتم

>> مثال: برای حرکت یک صفحه بر روی آبی به عمق ۱متر و لزجت 10^{-6} پروفیل سرعت را با کمک حل معادله بصورت با تفاضل غیرضمنی زیر به دست آورید:

>> بصورت صریح انجام شود

در محیط متلب >>



هدف: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\boxed{\frac{\mu}{\rho} = \frac{10^{-3}}{1000} = \nu = 10^{-6}\ m^2/sec}$$

$$\boxed{I.C \longrightarrow u(y,0)=0}$$

$$\boxed{B.C \longrightarrow u(0,t)=0}$$

$$\boxed{u(1,t)=2\ m/sec}$$

Ex-1

>> این معادله را به روش صریح، FTCS، BTCS و C-N حل نمائید.

روش صریح در حل معادله دیفیوژن یا تفاضل غیرضمنی ←

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} = \alpha\,\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\boxed{u_i^{n+1} = r\,u_{i+1}^n + (1-2r)\,u_i^n + r\,u_{i-1}^n}$$

$$\boxed{\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = r}$$

شرط در روش → $r \le 1/2$

که روش صریح دارای محدودیت پایداری می باشد $\dfrac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \le 1/2$ (شرط پایداری)

>> برای حل مسأله فوق ←

تعداد گره ها $N_y = 41$

$\Delta y = \dfrac{1}{40} \longrightarrow r = 0.2,\ 0.4,\ 0.6$

$\alpha = \nu$

>> نتیجه ناپایداری بررسی شود >>

روش ضمنی **BTCS** ②

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n}}{\Delta t}=\alpha\,\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

«در این روش برای پیدا نمودن مقادیر n نیاز به حل دستگاه معادلات ۳ قطری می باشد»

$$\boxed{-r\,u_{i+1}^{n+1}+(1+2r)\,u_i^{n+1}-r\,u_{i-1}^{n+1}=u_i^{n}}$$

جزو دانسته ها

ماتریس ضرایب $[A][u]=[R]$ → ماتریس پاسخ

قطر اصلی — بالای قطر اصلی — پایین قطر اصلی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2r) & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & (1+2r) & -r & & & \\ & -r & (1+2r) & -r & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -r & (1+2r) \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_i^{n+1} \\ \vdots \\ u_m^{n+1} \end{bmatrix}}_{u\ (\text{مجهولات})} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ u_3^{n} \\ \vdots \\ u_i^{n} \\ \vdots \\ u_m^{n} \end{bmatrix}}_{R\ \text{بردار}}$$

صفر — صفر — ماتریس پاسخ

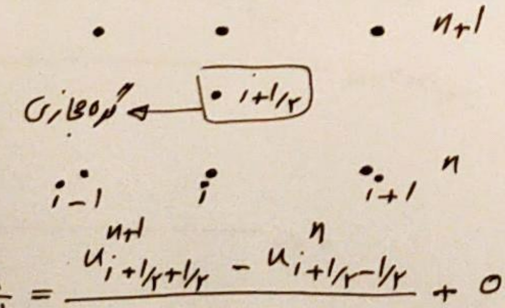
(جلسه قبل گفته شد)

«برای حل دستگاه معادلات از روش حذفی گاوس استفاده می کنیم و به هیچ عنوان به سراغ حل مستقیم دستگاه معادلات $[A][u]=[R]$ نمی رویم و برای تعریف ماتریس ضرایب نیز از تعریف سه بردار قطر اصلی و بالا و پایین قطر اصلی استفاده می کنیم.

* روش کرانک نیکلسون:

در این گسسته سازی در گره مجازی $n+1/2$ انجام می شود:

روش ۶



$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_{i+1/2+1/2}^{n+1}-u_{i+1/2-1/2}^{n}}{2\Delta t/2}+O(\Delta t^2)$$

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\alpha\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_n+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{n+1}\right)=$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i+1}^{n}-2u_i^{n}+u_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}\right)=$$

$$\boxed{\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = r}$$

$$\boxed{-r u_{i+1}^{n+1} + (2+2r) u_i^{n+1} - r u_{i-1}^{n+1} = r u_{i+1}^{n} + (2-2r) u_i^{n} + r u_{i-1}^{n}}$$

(در گسسته سازی مجدداً حل بشود)

$$\begin{bmatrix} (2+2r) & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & (2+2r) & -r & & \text{صفر} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \text{صفر} & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -r & (2+2r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ R_M \end{bmatrix}$$

$$R_i = r u_{i+1}^{n} + (2-2r) u_i^{n} + r u_{i-1}^{n}$$

<< مزیت روش C-N نسبت به روش قبلی BTCS دقت بالا اتر آن در حل عددی معادلات دیفرانسیل یک بعدی می باشد. پیر اصطلاح برتری این روش ⟵ (در واقع روش دقیق در حل دستگاه معادلات است)

$$\boxed{T.E = O(\Delta x^2, \Delta t^2)}$$

* چند نکته در برنامه نویسی :

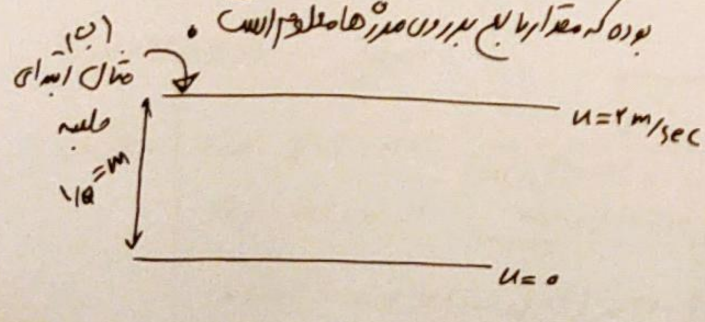
<< نحوه و روش اعمال شرایط مرزی در حل عددی :

$\boxed{3}$ نوع شرط مرزی می تواند در مساله تعریف گردد :

① شرط مرزی دیریکلت یا دیریشله (direchlet) بوده که مقدار تابع بر روی مرزها معلوم است.

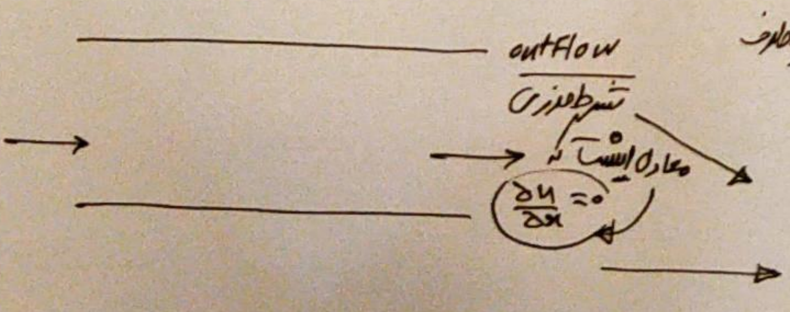
(مانند مساله پیپای تر) (هد آب بر روی مرز مشخص بود)

(الف)



۲. شرط مرزی نیومن (Newman) یا شرط مرزی مشتق می باشد که مقدار مشتق تابع بر روی مرزها معلوم است.

عنوان: در یک کانال که جریان از یک طرف وارد و از یک طرف خارج می شود



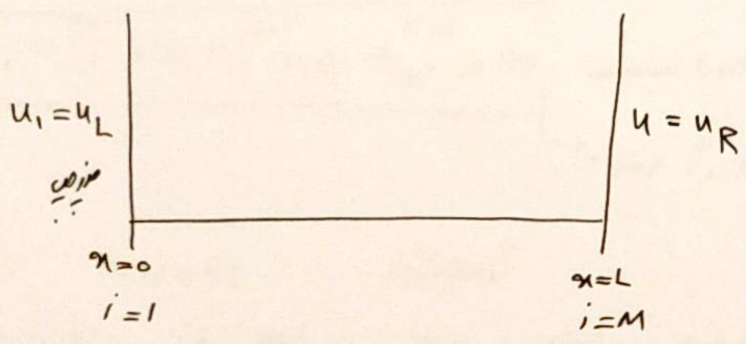
۳- شرط مرزی ترکیبی mixed که ترکیب مقدار تابع و مشتق آن بر روی مرزها معلوم است.

$$\boxed{u + \frac{\partial u}{\partial n} = \beta} \rightarrow \text{مقدار مشخص}$$

«حال می‌خواهیم ببینیم اعمال شرایط مرزی در روش های صریح و ضمنی چگونه است؟»

در روش های صریح اعمال شرایط مرزی کار مشکلی نیست و عمده مشکل مربوط به اعمال شرایط مرزی در روش های ضمنی می باشد:

«شرط مرزی دیریکله» (روش صریح)



$$u_i^{n+1} = A_i u_{i-1}^n + B_i u_i^n + C_i u_{i+1}^n \quad (1)$$ ← فرم عمومی روش صریح

(گره های میانی)

معادله (۱) بایستی برای گره های $i=2$ تا $i=M-1$ حل گردد:

$$u_2^{n+1} = A_2 u_1^n + B_2 u_2^n + C_2 u_3^n$$

u_L (بجای u_1^n، u_L قرار می‌دهیم)

$$u_{M-1}^{n+1} = A_{M-1} u_{M-2}^n + B_{M-1} u_{M-1}^n + C_{M-1} u_M^n$$

u_R — بجای u_M^n، u_R قرار می‌دهیم (گره آخر)

«MATLAB» صریح

* دقت کنید: حتما قبل از حلقه ها مقادیر داده شود

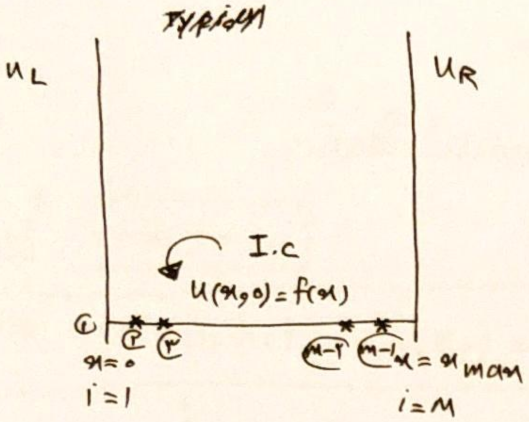
$$\boxed{u(1,j) = uL, \quad u(M,j) = uR}$$

$$\boxed{u_i^{n+1} = r u_{i+1}^n + (1-2r) u_i^n + r u_{i-1}^n}$$ ← معادله

(حلقه زمانی)

```
For j=2, nt
For i=2, M-1
u(i,j) = r u(i-1,j-1) + (1-2r) u(i,j-1) + r u(i+1,j-1)
end
```

اعمال شرایط مرزی دیریکله در روش ضمنی :



$$\boxed{A_i u_{i-1}^{n+1} + B_i u_i^{n+1} + C_i u_{i+1}^{n+1} = R_i} \quad ** \longleftarrow$$ فرم عمومی گسسته سازی معادله دیفرانسیل به روش ضمنی است

$\rightarrow$ For $i=3, M-2$

برای گره اول $\quad i=1 \quad u(1)=u_L \quad$ شرایط مرزی

For $i=2$, $A_2 u_1^{n+1} + B_2 u_2^{n+1} + C_2 u_3^{n+1} = R_2 \xrightarrow{\text{ساده می‌شود}}$ ($u_1 = u_L$)

$$\longrightarrow B_2 u_2^{n+1} + C_2 u_3^{n+1} = \underbrace{R_2 - A_2 u_L}_{\hat{R}_2}$$

* در بردار پاسخ R بایستی آرایه‌ی اول اصلاح گردد.

برای گره‌ی آخر $\quad$ For $i=M \quad u(M)=u_R$

For $i=M-1$

$$A_{M-1} u_{M-2}^{n+1} + B_{M-1} u_{M-1}^{n+1} + C_{M-1} u_M^{n+1} = R_{M-1} \longrightarrow$$ ($u_M^{n+1} = u_R$)

$$\longrightarrow A_{M-1} u_{M-2}^{n+1} + B_{M-1} u_{M-1} = \underbrace{R_{M-1} - C_{M-1} u_R}_{\hat{R}_{M-1}}$$

ماتریس ضرایب

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & & & & \\ 0 & 0 & A_i & B_i & C_i & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & A_{M-1} & B_{M-1} \end{bmatrix}}_{(M-2)(M-2)} \begin{bmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_i^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ \hat{R}_{M-1} \end{bmatrix}$$

«گره‌ی اول و آخر را از مجهولات خارج کردیم و به جایش سطر اول و آخر مقدار R را اصلاح کردیم»

پس ملاحظه می گردد ماتریس ضرایب در این حالت $(M-2 \times M-2)$ می باشد.

<< روش ساده تر برای اعمال شرایط مرزی آن است که تمام گره ها در دستگاه معادلات ظاهر شود

گره اول $\longrightarrow$ $\boxed{1 \times u(1) = u_L}$

گره دوم $\longrightarrow$ $\boxed{A_2\, u(1) + B_2 u(2) + C_3(u_3) = R_2}$ **

$\vdots$

گره آخر $\longrightarrow$ $\boxed{1 \times u(M) = u_R}$

<< دستگاه معادلات به شکل زیر می شود

<< معادله اول همیشه جوابش برابر با u_L است >>

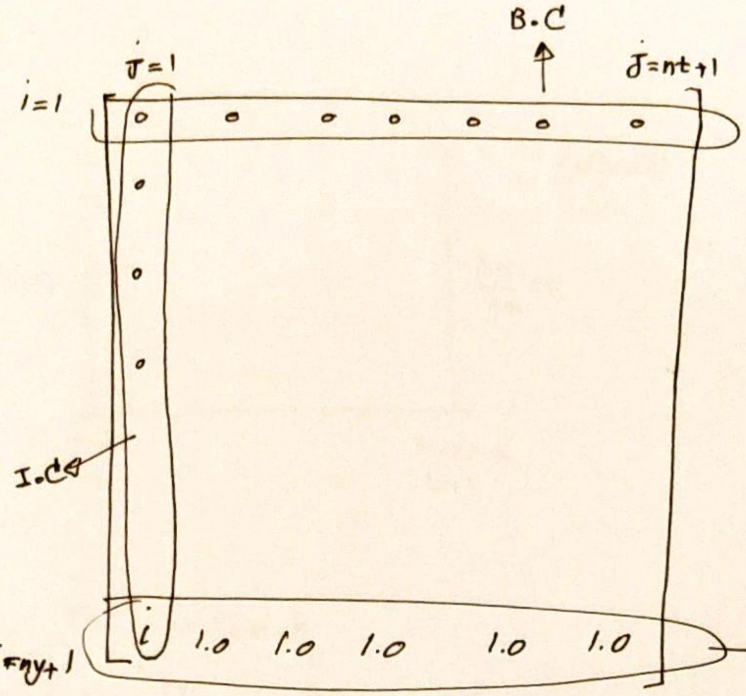
$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
A_2 & B_2 & C_2 & & & & & \\
0 & A_3 & B_3 & C_3 & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & A_i & B_i & C_i & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & A_{M-1} & B_{M-1} & C_{M-1} \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{M-1} \\ u_M
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
u_L \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_i \\ \\ \\ u_R
\end{bmatrix}
$$

در معادله آخر همیشه جوابش برابر با u_R است

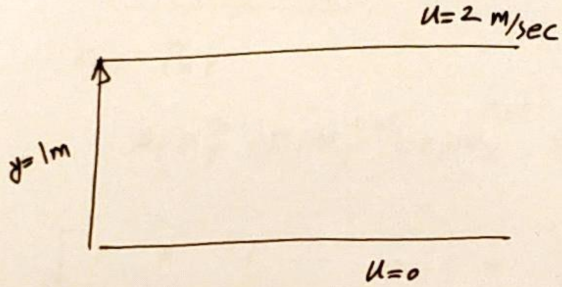
$\boxed{M \times M}$ $\longrightarrow$ << تعداد مجهولات >>

<< این روش برای برنامه نویسی راحتتر است. >>

<< در رابطه با برنامه نویسی مثال مطرح شده در اول جلسه >>

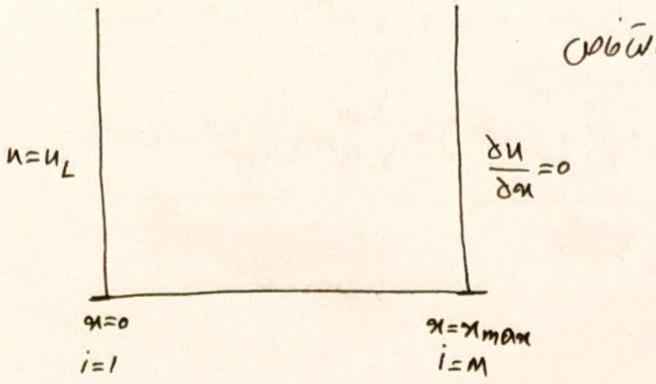


<< برای مثال ما 2.0 می باشد >>



(۸)

* نحوه‌ی اعمال شرط مرزی نیومن (شرط مرزی مشتق) :



For $i=3, M-2$

فرم عمومی $\longrightarrow$ $A_i u_{i-1}^{n+1} + B_i u_i^{n+1} + C_i u_{i+1}^{n+1} = R_i$

For $i=1$

$$\boxed{1 \times u_1^{n+1} = u_L}$$

For $i=2$

$$A_2 u_1^{n+1} + B_2 u_2^{n+1} + C_2 u_3^{n+1} = R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & & & \\ & & & & \hat{A}_{M-1} & \hat{B}_{M-1} \end{bmatrix}$$

«برای حل این نیاز به یک معادله اضافه داریم»

معادله اضافه از شرط مرزی مشتق »

برای سطر آخر $\longrightarrow$ For $i=M-1 \longrightarrow A_{M-1} u_{M-2}^{n+1} + B_{M-1} u_{M-1}^{n+1} + C_{M-1} u_M^{n+1} = R_{M-1}$ (۳)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i=M} = 0$$

فرم گسسته شده دو نقطه‌ای (دقت مرتبه اول) $\longrightarrow$ $\dfrac{u_M - u_{M-1}}{\Delta y} = 0$ یا $u_M = u_{M-1}$ (۱)

فرم گسسته شده سه نقطه‌ای (دقت مرتبه دوم) $\longrightarrow$ $\dfrac{3u_M - 4u_{M-1} + u_{M-2}}{2\Delta x} = 0$ یا $\boxed{u_M = \dfrac{4u_{M-1} - u_{M-2}}{3}}$ (۲)

معمولا در اعمال شرایط مرزی نیومن سعی می‌گردد دقت گسسته سازی در مرزها افزایش یابد زیرا ناپایداری از مرزها می‌تواند وارد میدان حل گردد. هم فرم ۱ درست است هم فرم ۲ و اما فرم ۲ دقیق‌تر است.

با جایگزینی معادله ۲ در معادله ۳ خواهیم داشت:

$$A_{M-1}u^{n+1}_{M-2} + B_{M-1}u^{n+1}_{M-1} + C_{M-1}\underbrace{\left(\frac{4u^{n+1}_{M-1} - u^{n+1}_{M-2}}{3}\right)}_{\text{به جای } u^{n+1}_{M}} = R_{M-1}$$

$$\underbrace{\left(A_{M-1} - \frac{C_{M-1}}{3}\right)}_{A^{*}_{M-1}\ \text{در ماتریس ضرایب}}u^{n+1}_{M-2} + \underbrace{\left(B_{M-1} + \tfrac{4}{3}C_{M-1}\right)}_{B^{*}_{M-1}\ \text{در ماتریس ضرایب}}u^{n+1}_{M-1} = R_{M-1}$$

«برای آخرین سطر مقادیر A و B را طبق این روند بایستی اصلاح کنیم»

بطورکلی برای ارزیابی دقت مدل‌های پیش‌بینی یا مدل‌های عددی از

* ارزیابی حل عددی در مقایسه با حل تحلیلی:

بطورکلی برای ارزیابی دقت مدل‌های پیش‌بینی یا مدل‌های عددی از پاسخ و تعریف خطا استفاده می‌کنیم. خطا می‌تواند برای یک کمیت اسکالر (بعنوان مثال: β تقریبی از α است)

خطای مطلق