مسایل میدانی (Field Problems)

در مسایل میدانی یک تابع مجهول در فضای 1، 2 یا 3 بعدی مطرح است. بعبارتی در هر نقطه یک درجه آزادی مجهول است. در این نوع مسایل، معادله دیفرانسیل مشخص است. همانطور که قبلاً اشاره شد، اجزای محدود بعنوان روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کاربرد دارد. بعنوان مثال معادله لاپلاس را در فضای دو بعدی در نظر می‌گیریم. از روش باقیمانده وزن دار به مسئله برخورد می‌کنیم.

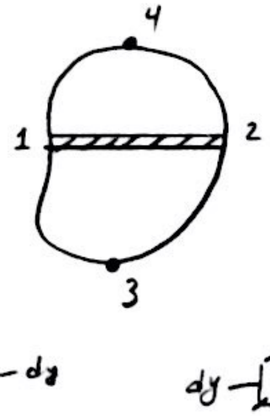
$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (a-1)$$

$$\int_A w \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dA = 0 \qquad (a-2)$$

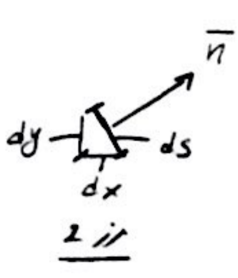
$$\int w \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dA + \int w \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dA = 0 \qquad (a-3)$$

ابتدا متمرکز می‌شویم روی ترم اول این رابطه:

$$\int w \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dA = ?$$



$$\int_3^4 \Big[\int_1^2 \underbrace{w}_{\frac{\partial w}{\partial x} dx} \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx}_{\frac{\partial \phi}{\partial x}} \Big] dy = ?$$



$$? = \int_3^4 \Big[w \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \Big] dy$$

$$? = \int_3^4 \left(w \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_2 \underbrace{dy}_{n_x ds} - \int_3^4 \left(w \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_1 \underbrace{dy}_{-n_x ds} - \int_3^4 \int_1^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx\, dy$$

$$? = \oint_3^4 \left(w\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) n_x \, ds + \oint_3^4 \left(w\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) n_x \, ds - \int_A \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}\, dA$$

یا اینکه

$$\text{ترم اول} = \int_A w \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\, dA = \oint_S w \frac{\partial\phi}{\partial x} n_x \, ds - \int_A \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}\, dA \qquad (b-1)$$

این رابطه با توجه به تفضیه گرین (Green) هم بدست می آید. بطور مشابه برای ترم دوم رابطه (a-3) می توان نوشت :

$$\text{ترم دوم} = \int_A w \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\, dA = \oint_S w \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y \, ds - \int \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\, dA \qquad (b-2)$$

با استفاده از روابط (b-1) و (b-2)، معادله (a-3) بصورت زیر تبدیل می شود.

$$\oint_S w \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} n_y\right) ds - \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dA = 0 \qquad (c-1)$$

یا اینکه :

$$\int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dA = \oint_S w \underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\overset{n_x}{\overbrace{\frac{\partial x}{\partial n}}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\overset{n_y}{\overbrace{\frac{\partial y}{\partial n}}}\right)}_{\frac{\partial\phi}{\partial n} = q_n} ds \qquad (c-2)$$

بنابراین در مجموع برای حالت دو بعدی خواهیم داشت :

$$\int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) dA = \oint_S w\, q_n \, ds \; ; \; \underline{\underline{2D}} \qquad (d-1)$$

بطور مشابه رابطه برای حالت سه بعدی بدست می آید :

$$\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) dv = \oint_A w\, q_n \, dA \; ; \; \underline{\underline{3D}} \qquad (d-2)$$

حال اگر بر روی حالت 2D متمرکز شویم ، در مرحله بعد تابع Φ و w باید انترپوله شود .

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{NNODE} f_i \, \Phi_i = \underset{1*NNODE}{\underset{\sim}{N}^T} \; \underset{NNODE*1}{\underset{\sim}{\Phi}^e} \qquad (e-1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \underset{\sim}{N_x}^T \underset{\sim}{\Phi}^e \quad ; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \underset{\sim}{N_y}^T \underset{\sim}{\Phi}^e \qquad (e-2)$$

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{NNODE} f_i \, w_i = \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{W}^e = (\underset{\sim}{W}^e)^T \underset{\sim}{N} \qquad (e-3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (\underset{\sim}{W}^e)^T \underset{\sim}{N_x} \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = (\underset{\sim}{W}^e)^T \underset{\sim}{N_y} \qquad (e-4)$$

رابطه (d-1) به کمک روابط (e-1) الی (e-4) بصورت زیر تبدیل می شود .

$$\underbrace{(\underset{\sim}{W}^e)^T}_{\text{اختیاری}} \int_A (\underset{\sim}{N_x}\underset{\sim}{N_x}^T + \underset{\sim}{N_y}\underset{\sim}{N_y}^T) \, dA \; \underset{\sim}{\Phi}^e = (\underset{\sim}{W}^e)^T \oint_S \underset{\sim}{N} \, q_n \, ds \qquad (f-1)$$

با توجه به اختیاری بودن بردار $(\underset{\sim}{W}^e)^T$ خواهیم داشت :

$$\underset{\sim}{A}^e \, \underset{\sim}{\Phi}^e = \underset{\sim}{R}^e \qquad (g-1)$$

<u>2D</u>

$$\underset{\sim}{A}^e = \int_A (\underset{\sim}{N_x}\underset{\sim}{N_x}^T + \underset{\sim}{N_y}\underset{\sim}{N_y}^T) \, dA \qquad (g-2)$$

$$\underset{\sim}{R}^e = \oint_S \underset{\sim}{N} \, q_n \, ds \qquad (g-3)$$

برای حالت 3D ، ماتریسهای $\underset{\sim}{A}^e$ و $\underset{\sim}{R}^e$ روابط بصورت زیر خواهند داشت .

<u>3D</u>

$$\underset{\sim}{A}^e = \int_V (\underset{\sim}{N_x}\underset{\sim}{N_x}^T + \underset{\sim}{N_y}\underset{\sim}{N_y}^T + \underset{\sim}{N_z}\underset{\sim}{N_z}^T) \, dV \qquad (h-1)$$

$$\underset{\sim}{R}^e = \int_A \underset{\sim}{N} \, q_n \, ds \qquad (h-2)$$

بعنوان مثال برای حالت المان ۴ گرهی ایزوپارامتریک ، ماتریس A^e بصورت زیر بدست می آید:

$$\underset{\sim}{A}^e = \int_A \left(\underset{\sim}{N}_x \underset{\sim}{N}_x^T + \underset{\sim}{N}_y \underset{\sim}{N}_y^T \right) dA \qquad (i-1)$$

$$\underset{\sim}{A}^e = \sum_{j=1}^{NINT} \sum_{i=1}^{NINT} \left[\left(\underset{\sim}{N}_x \underset{\sim}{N}_x^T + \underset{\sim}{N}_y \underset{\sim}{N}_y^T \right) |DJ| \right]_{\xi_i, \eta_j} * (W_i * W_j) \qquad (i-2)$$

سابروتین مربوطه هم بصورت زیر تنظیم می شود.

```
      ⋮
      S = 0.0
      NINT = 2

      DO 1000 LJ = 1, NINT
         WJ = WINT (LJ, NINT)
         X2 = XINT (LJ, NINT)
      DO 1000 LI = 1, NINT
         WI = WINT(LI, NINT)
         X1 = XINT(LI, NINT)
         WSTAR = WI * WJ
         CALL SHAPE4 (X1, X2, FN, DFXI)
         CALL MULT (XT, DFXI, DJ, 2, NNODE, 2)
         DETJ = DJ(1,1) * DJ(2,2) - DJ(1,2) * DJ(2,1)
         IF (DETJ. LE. 0.0) THEN
           WRITE(*,*) 'STOP: DETJ. LE. 0.0'
           STOP
         ENDIF
         DJI(1,1) = DJ(2,2)/DETJ  ;  DJI(1,2) = - DJ(1,2)/DETJ
         DJI(2,1) = - DJ(2,1)/DETJ  ;  DJI(2,2) = DJ(1,1)/DETJ
         CALL MULT (DFXI, DJI, DFX, NNODE, 2, 2)
         FAC = WSTAR * DETJ
         DO I = 1, NNODE
           DO J = 1, NNODE
             S(I,J) = S(I,J) + (DFX(I,1)*DFX(J,1) + DFX(I,2)*DFX(J,2)) * FAC
           ENDDO
         ENDDO
 1000 CONTINUE
```

روند محاسبه بردار $\underset{\sim}{R}$

بردار $\underset{\sim}{R}^e$ از رابطه (g-3) تبعیت می‌کند.

$$\underset{\sim}{R}^e = \oint_s \underset{\sim}{N}\, q_n\, ds \qquad \text{(g-3) تکرار شده}$$

ضمن اینکه برای هر ترم این بردار داریم.

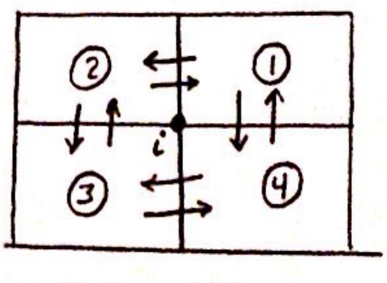
$$R_i^e = \oint_s f_i\, q_n\, ds \qquad (j)$$

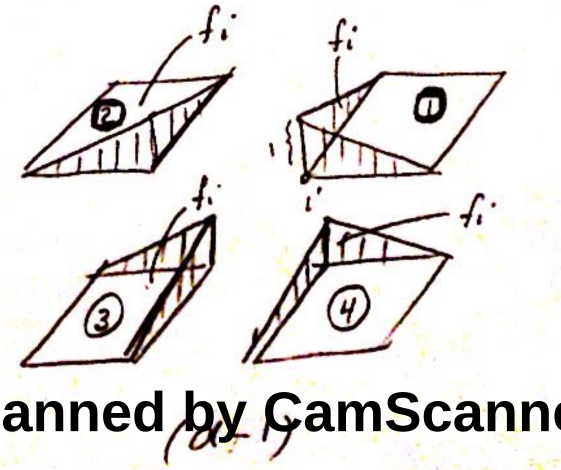
دقت کنید که تابع f_i روی اضلاع متصل به گره i مقدار غیر صفر و بر روی دو ضلع دیگر از المان ۴ گرهی مقدارش صفر است. از طرفی اگر R_i^e برای المانهای متصل به یک گره داخلی اسمبل شود، خواهیم داشت:

$$R_i = \sum_{e=1}^{M} R_i^e \quad ; \quad M = \text{تعداد المانهای متصل به } i \qquad (k\text{-}1)$$

$$R_i = R_i^1 + R_i^2 + R_i^3 + R_i^4 \quad ; \quad \text{برای حالت } M=4 \qquad (k\text{-}2)$$

دقت کنید که مشابه شکل، مقدار f_i روی اضلاع مشابه یکسان است. برای $q_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ روی اضلاع یکسان فقط یک علامت منفی اختلاف است. زیرا که جهت n همیشه بطرف بیرون المان است. بنابراین سهم متناظر با اضلاع مشترک المانها دو به دو همدیگر را خنثی می‌کنند و در مجموع R_i برای گره داخلی صفر خواهد بود.



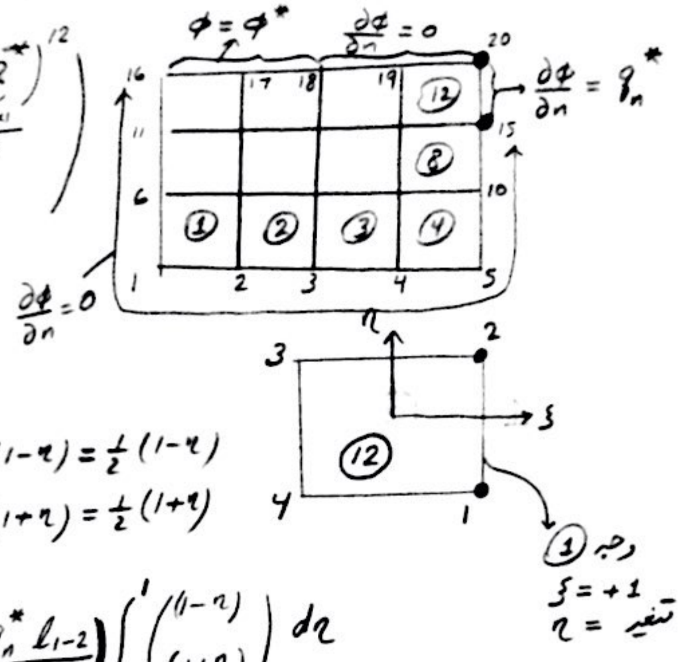


(a-2) سهم گره داخلی i

(b-2)

برای گره های روی مرز خارجی، اگر مقدار $\Phi = \Phi^*$ مشخص باشد، این شرط به کمک روش پنالتی (مشابه جابجایی یا چرخش مشخص) اعمال می شود. درصورتیکه مقدار $\frac{\partial \phi}{\partial n} = q_n^*$ مشخص باشد، باید از آن بصورت زیر انتگرال گرفت. دقت کنید درصورتیکه $\frac{\partial \phi}{\partial n} = q_n^* = 0$ باشد، هیچ اقدامی انجام نمی شود، چراکه انتگرال آن صفر خواهد بود و تاثیری در بردار $\underset{\sim}{R}$ نخواهد گذاشت.

$$\underset{\substack{\sim \\ 4\times1}}{R}^{12} = \int_{l_{1-2}} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} q_n^* \, ds = \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\underset{\substack{\sim \\ 2\times1}}{R^*}\right)^{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\left(\underset{\substack{\sim \\ 2\times1}}{R^*}\right)^{12} = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} q_n^* \, |J|_{line} \, d\eta$$

$$f_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad ; \quad f_1 = \frac{1}{4}(1+1)(1-\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta)$$

$$f_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad ; \quad f_2 = \frac{1}{4}(1+1)(1+\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta)$$

$$\left(\underset{\substack{\sim \\ 2\times1}}{R^*}\right)^{12} = \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) \\ \frac{1}{2}(1+\eta) \end{pmatrix} q_n^* \left(\frac{l_{1-2}}{2}\right) d\eta = \left(\frac{q_n^* \, l_{1-2}}{4}\right) \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} (1-\eta) \\ (1+\eta) \end{pmatrix} d\eta$$

$$\left(\underset{\substack{\sim \\ 2\times1}}{R^*}\right)^{12} = \left(\frac{q_n^* \, l_{1-2}}{4}\right) \begin{pmatrix} \left(\eta - \eta^2/2\right)_{-1}^{1} \\ \left(\eta + \eta^2/2\right)_{-1}^{1} \end{pmatrix} = \left(\frac{q_n^* \, l_{1-2}}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

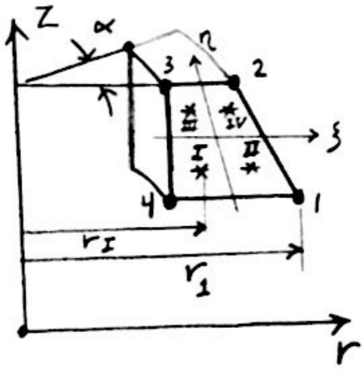
$$\underset{\sim}{A} \; \underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{R}$$

$$\begin{bmatrix} & & & & & & \\ & \times & & & & & \\ & & \times+Q & & & & \\ & & & \times+Q & & & \\ & & & & \times+Q & & \\ & & & & & \times & \\ & & & & & & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \phi_{15} \\ \phi_{16} \\ \phi_{17} \\ \phi_{18} \\ \phi_{19} \\ \phi_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{q_n^* \, l_{1-2}}{2}\right) \\ Q * \phi_{16}^* \\ Q * \phi_{17}^* \\ Q * \phi_{18}^* \\ 0. \\ \left(\frac{q_n^* \, l_{1-2}}{2}\right) \end{bmatrix}$$

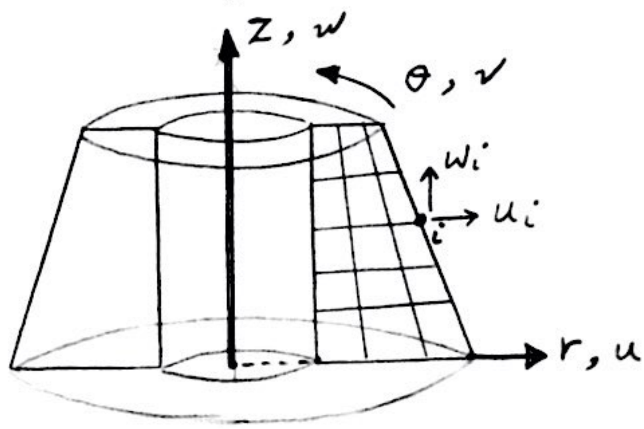
مسئله تقارن محوری الاستیسیته

در صورتیکه مسئله حالت تقارن محوری داشته باشد، می توان به جای المان سه بعدی از المان دو بعدی تقارن محوری استفاده نمود. لازم به ذکر است که شرایط تقارن محوری شامل هندسه، مشخصات مصالح، شرایط مرزی و بارگذاری می باشد که همه باید نسبت به محوری مانند Z از شرایط متقارنی برخوردار باشند.

حال اگر جابجائیها در جهت r، θ و Z را با u، v و w نمایش بدهیم، در این حالت جابجائیهای u و w مستقل از θ و v برابر صفر خواهد بود.



(b-2)



(b-1)

دقت کنید که هرچند جابجایی در جهت θ $(v=0)$ برابر صفر است. لکن کرنش در آن جهت مطرح است.

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \qquad (a)$$

بنابراین بردار کرنش چهار مولفه خواهد داشت:

$$\underset{4\times1}{\underset{\sim}{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{NNODE} f_{ir}\, u_i \\ \frac{1}{r} \sum f_i\, u_i \\ \sum f_{iz}\, w_i \\ \sum (f_{iz}\, u_i + f_{ir}\, w_i) \end{pmatrix} \qquad (b)$$

Note: $\left(r = \sum_{i=1}^{NNODE} f_i\, r_i\right)$

بنابراین، رابطه ماتریس $\underset{\sim}{B}$ مشخص می‌شود.

$$\underset{4*1}{\underset{\sim}{\epsilon}} = \sum_{i=1}^{NNODE} \underset{4*2}{\underset{\sim}{B_i}}\ \underset{2*1}{\underset{\sim}{U_i}} = \underset{4*NEDEL}{\underset{\sim}{B}}\ \underset{NEDEL*1}{\underset{\sim}{U^e}} \qquad (C-1)$$

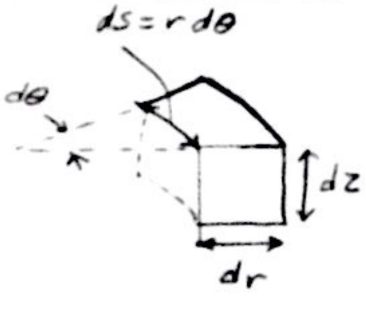
$$\underset{4*2}{\underset{\sim}{B_i}} = \begin{pmatrix} f_{ir} & 0 \\ \frac{1}{r} f_i & 0 \\ 0 & f_{iz} \\ f_{iz} & f_{ir} \end{pmatrix} \quad ; \quad \underset{2*1}{\underset{\sim}{U_i}} = \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} \quad ; \quad r = \sum_{i=1}^{NNODE} f_i r_i \qquad (C-2)$$

رابطه بردار تنش و کرنش هم بصورت زیر خواهد بود:

$$\underset{4*1}{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{4*4}{\underset{\sim}{D}}\ \underset{4*1}{\underset{\sim}{\epsilon}} \quad ; \quad \underset{4*1}{\underset{\sim}{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} \qquad (d-1)$$

$$\underset{4*4}{\underset{\sim}{D}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \qquad (d-2)$$

نحوه محاسبه ماتریس سختی المان



$$\underset{\sim}{K}^e = \int_V \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{B}\ dV$$

$$\underset{\sim}{K}^e = \int_A \int_0^{\alpha} \left(\underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{B} \right) r\, d\theta\, \underbrace{dr\, dz}_{dA}$$

$$\underset{\sim}{K}^e = \int_A \left(\underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{B} \right) \underbrace{(r\alpha)}_{\text{شبیه ضخامت است}}\ dr\, dz$$

$$\underset{\sim}{K}^e = \alpha \sum_{j=1}^{NINT} \sum_{i=1}^{NINT} \left[\left(\underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\ \underset{\sim}{B} \right) \left(r\, |DJ| \right) \right]_{\xi_i, \eta_j} * \left(W_i * W_j \right)$$

نحوه محاسبه بردار نیروی گرهی معادل با بار حجمی

$$\underset{\sim}{P}_B^e = \int_V \underset{\sim}{H} \begin{pmatrix} b_r \\ b_z \end{pmatrix} dV$$

$$\underset{\sim}{P}_B^e = \int_A \int_0^{\alpha} \begin{pmatrix} \vdots \\ f_\ell b_r \\ f_\ell b_z \\ \vdots \end{pmatrix} r \, d\theta \, \underbrace{dr \, dz}_{dA}$$

$$\underset{\sim}{P}_B^e = \int_A \begin{pmatrix} \vdots \\ f_\ell b_r \\ f_\ell b_z \\ \vdots \end{pmatrix} (r \alpha) \, dr \, dz$$

$$\underset{\sim}{P}_B^e = \alpha \sum_{j=1}^{NINT} \sum_{i=1}^{NINT} \left[\begin{pmatrix} \vdots \\ f_\ell b_r \\ f_\ell b_z \\ \vdots \end{pmatrix} \left(r \, |DJ|_{surf} \right) \right]_{\xi_i, \eta_j} * (W_i * W_j)$$

دقت کنید که زاویه α در روابط $\underset{\sim}{P}_B^e$ و $\underset{\sim}{K}^e$ می‌تواند برابر 1 رادیان یا هر زاویه دیگری مانند 2π در نظر گرفته شود. به هر حال می‌توان آن را از طرفین رابطه ساده نمود.

$$\underset{\sim}{K}^e \underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{P}^e + \underset{\sim}{P}_B^e + \cdots$$

موعد پروژه انتهایی : 4 هفته بعد از تاریخ امتحان