جریان بدون نیروی Lift حول یک جسم دوبعدی دل‌خواه

روش عددی صفحه‌بندی چشمه (Source Panel Method)

تاکنون با جریان غیرلزج پیرامون استوانه غیرچرخان و بیضی رانکین آشنا شدیم که در آنها نیروی برآ تولید نمی‌شود. حال اگر یک جسم کاملاً دل‌خواه ولی بدون نیروی برآ داشته باشیم جریان غیرلزج حول آن و توزیع سرعت مماسی و توزیع فشار آن چگونه محاسبه می‌شود؟ درحقیقت روش تحلیلی کلی وجود ندارد و مجبوریم از روش‌های عددی استفاده کنیم. روش صفحه‌بندی چشمه از اواخر دهه ۱۹۶۰ میلادی به همین منظور ایجاد شده است.

به طور کلی دو روش صفحه‌بندی وجود دارد:

۱- روش صفحه‌بندی چشمه برای جریان‌های غیربرآزا کم-سرعت

۲- روش صفحه‌بندی گردابه برای جریان‌های برآزای کم-سرعت.

panel method for Inviscid Incompressible flows
- Source panel method
- Vortex panel Method

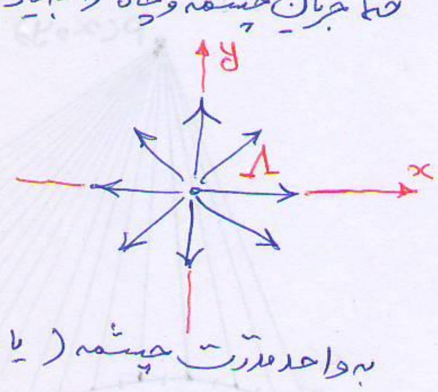
اکنون روش صفحه‌بندی چشمه را تشریح می‌کنیم:

حتماً جریان چشمه و چاه را به یاد دارید:

$$V_r = \frac{\Lambda}{2\pi}\frac{1}{r}$$

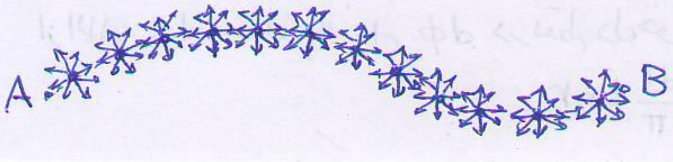
$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi}\ln r$$

$$\underbrace{\Lambda}_{\text{قدرت چشمه}\ (m^2/s)} = \frac{\overbrace{Q}^{\text{دبی حجمی}\ (m^3/s)}}{\underbrace{l}_{\text{طول}\ (m)}} = 2\pi r V_r$$

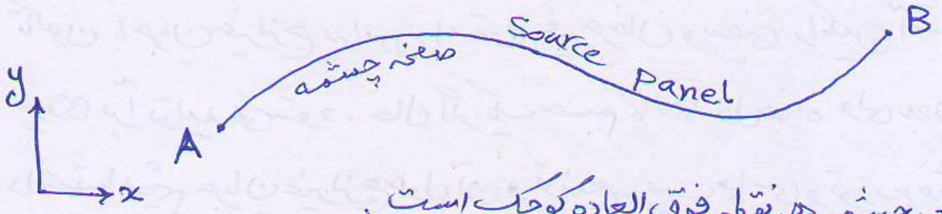


به واحد قدرت چشمه (یا چاه) که به صورت $\frac{m^2}{s}$ است دقت کنید.

اکنون می‌خواهیم مفهوم جدیدی را در نظر بگیریم. فرض کنید یک مجموعه از بی‌نهایت چشمه کوچک در کنار هم قرار گرفته و یک خط ایجاد کرده‌اند که به آن خط چشمه می‌گوییم:



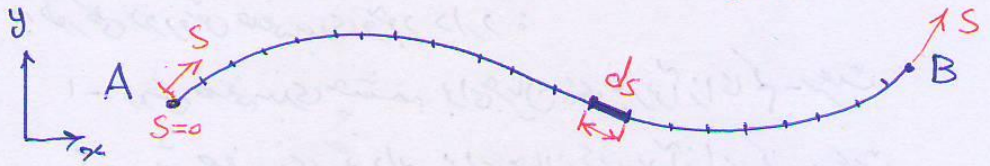
مبادا شکل صفحه قبل شما را به اشتباه بیاندازد چون تعداد چشمه‌ها بی نهایت زیاد است.
شما روی خط زیر چند نقطه می‌بینید؟ بی نهایت! هر نقطه از این خط یک چشمه است.



البته قدرت چشمه هر نقطه فوق العاده کوچک است.

فرض کنید λ قدرت واحد طول باشد که واحد آن $\left(\frac{m}{s}\right)$ باشد.

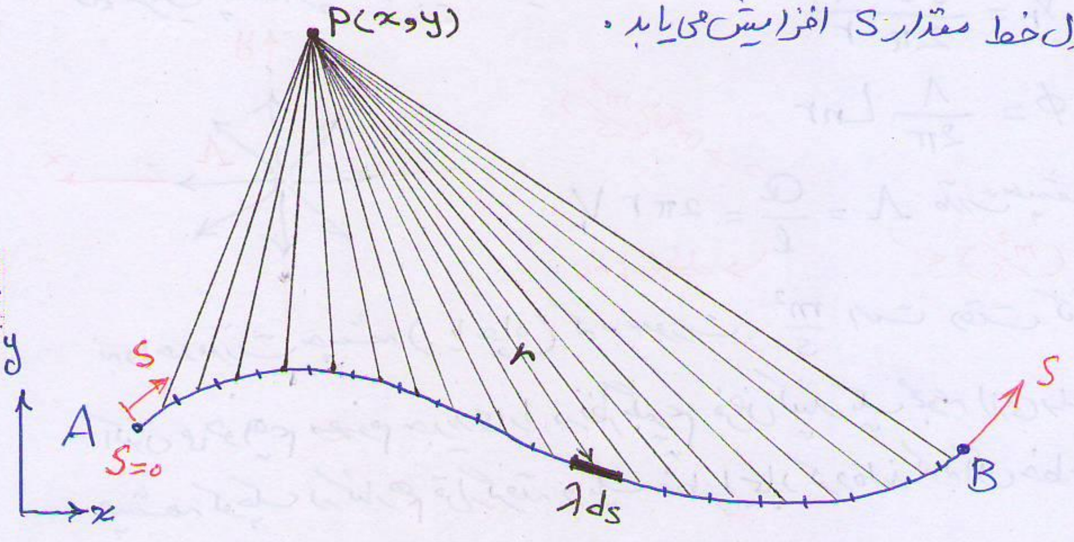
برای درک بهتر بیایید خط بالا را به بی نهایت المان تقسیم بندی کنیم و یک المان را برای نمونه در نظر بگیریم. طول هر المان ds است.



پس قدرت چشمه مربوط به هر المان $d\Lambda = \lambda \cdot ds$ خواهد شد.

البته مقدار λ از هر المان به المان دیگر ممکن است تغییر کند و مقدار آن می‌تواند مثبت (چشمه دیفرانسیلی) یا منفی (چاه دیفرانسیلی) باشد.

در واقع λ تابعی از S است. در نقطه A مقدار S برابر صفر است و در طول خط مقدار S افزایش می‌یابد.



از المان ds مقدار پتانسیل $d\phi$ در نقطه دلخواه $P(x,y)$ القا می‌شود:

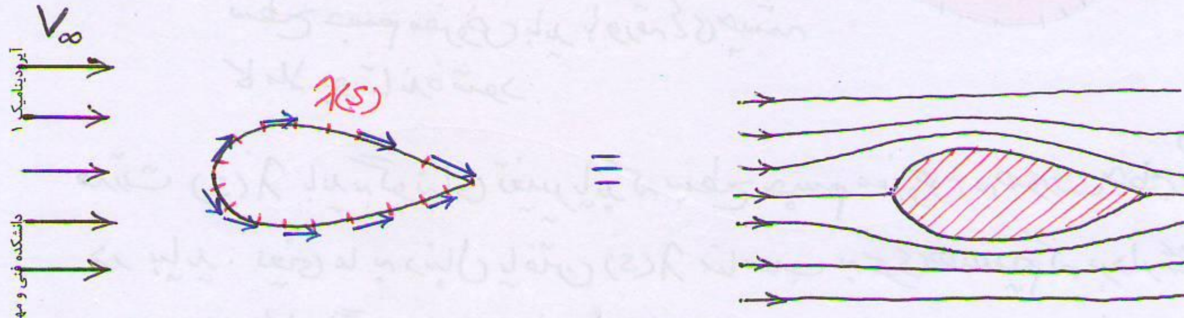
$$d\phi = \frac{d\Lambda}{2\pi} \ln r = \frac{\lambda\, ds}{2\pi} \ln r$$

پس کل پتانسیل القاء شده از همهٔ المان‌ها در نقطه P معادل جمع $d\phi$ ها خواهد شد.

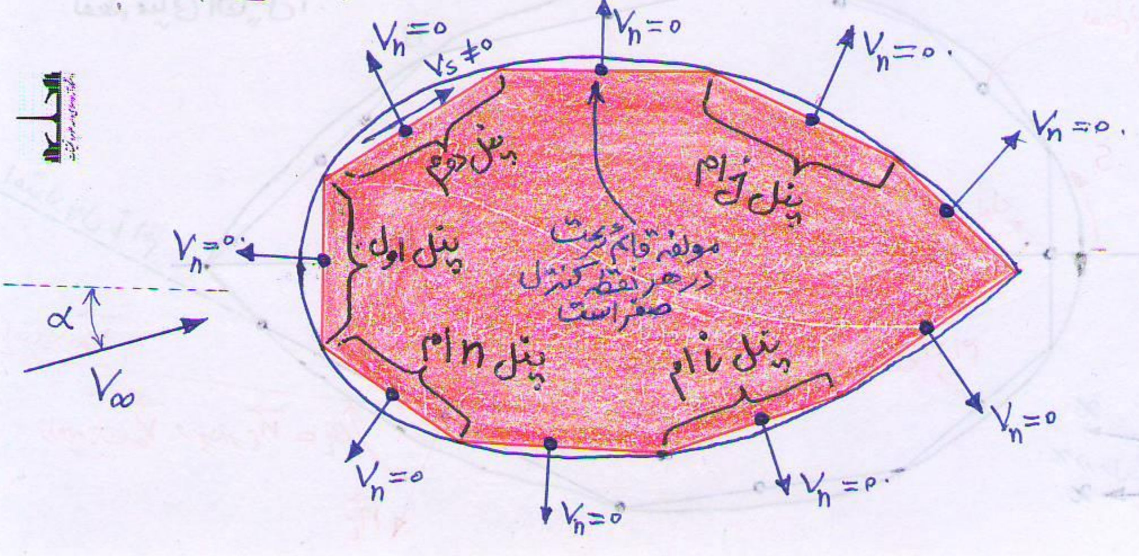
چون جمع پیوسته است از انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\phi(x,y)=\int_{S_A}^{S_B}\frac{\lambda(s)\cdot ds}{2\pi}\,\ln r$$

اکنون قصد داریم برای مطالعه جریان غیر برآزا پیرامون یک جسم دلخواه که در جریانی با سرعت جریان آزاد V_∞ قرار دارد از روش صفحه بندی چشمه استفاده کنیم.



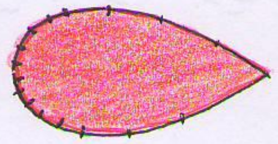
شکل بالا یک ایرفویل متقارن را نشان می‌دهد که می‌دانیم اگر وتر آن موازی V_∞ باشد جریان بالا و پایین آن متقارن بوده نیروی لیفت برابر صفر خواهد شد. ما می‌خواهیم سرعت مماسی روی سطح ایرفویل و توزیع فشار را بدست آوریم. البته روش صفحه بندی چشمه محدودیتی در شکل هندسی ندارد و می‌تواند برای هر هندسه دلخواه به شرط اینکه جریان بدون برآزا باشد ($L'=0$) به کار رود.



در شکل فوق کاملا مشخص است که :

اولا : در جایی که انحناء زیاد است تعداد پنل های بیشتری باید در نظر گرفت تا انحنا به خوبی مدل شود. اما در جاهایی که انحنا کم است با تعداد پنل کم نیز تقریب خوبی به دست می آید.

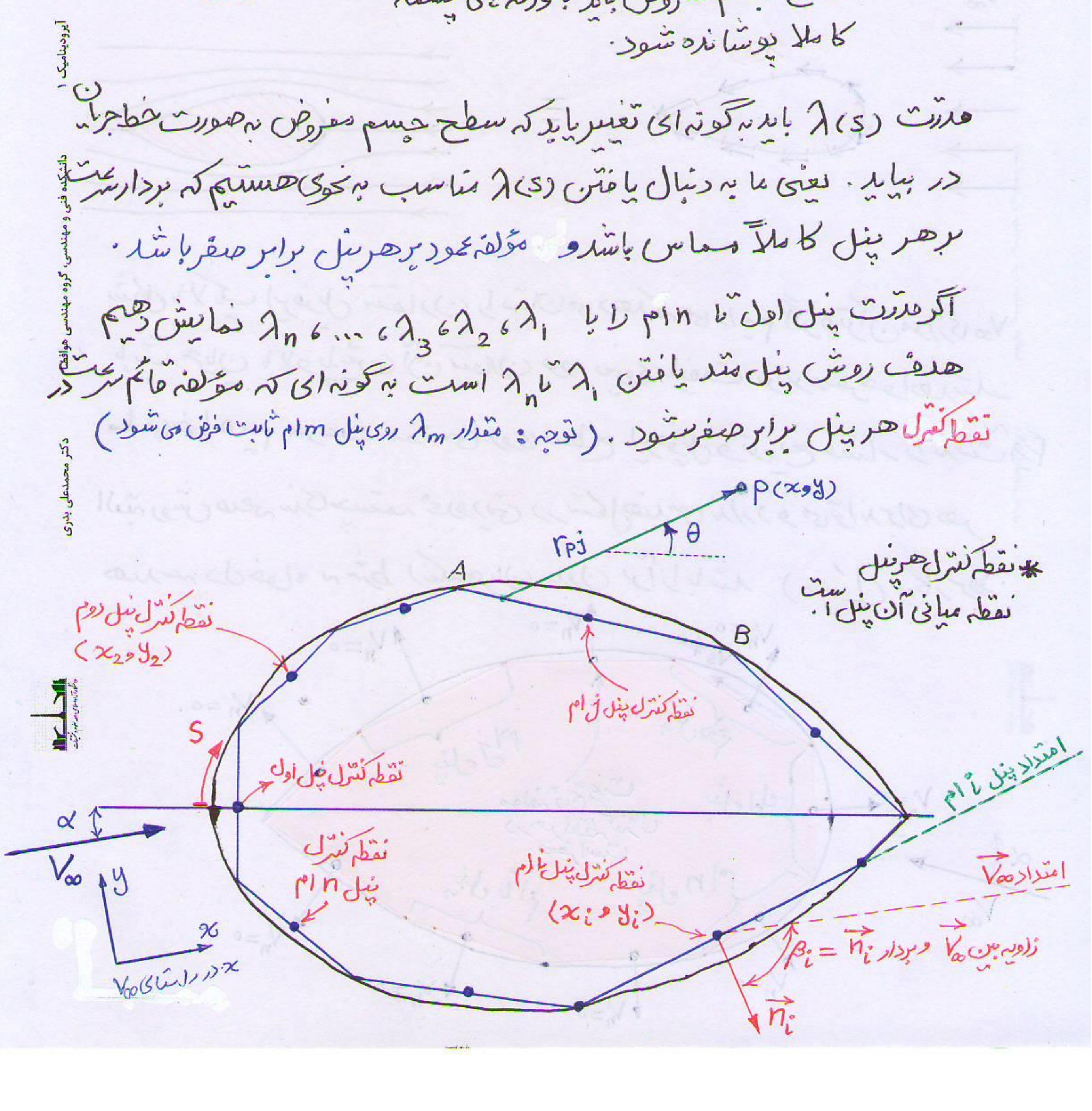
در کل هرچه تعداد المان ها بیشتر باشد تقریب بهتری از سطح جسم ایجاد می شود



دوماً : اندازهٔ صفحات می تواند برابر نباشد ولی سطح جسم مفروض باید با ورقه های چشمه کاملا پوشانده شود.

قدرت $\lambda(s)$ باید به گونه ای تغییر یابد که سطح جسم مفروض به صورت خط جریان در بیاید. یعنی ما به دنبال یافتن $\lambda(s)$ مناسب به نحوی هستیم که بردار سرعت بر هر پنل کاملاً مماس باشد و مؤلفه عمود بر هر پنل برابر صفر باشد.

اگر قدرت پنل اول تا nام را با $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ نمایش دهیم هدف روش پنل متد یافتن λ_1 تا λ_n است به گونه ای که مؤلفه قائم سرعت در نقطه کنترل هر پنل برابر صفر شود. (توجه : مقدار λ_m روی پنل mام ثابت فرض می شود)



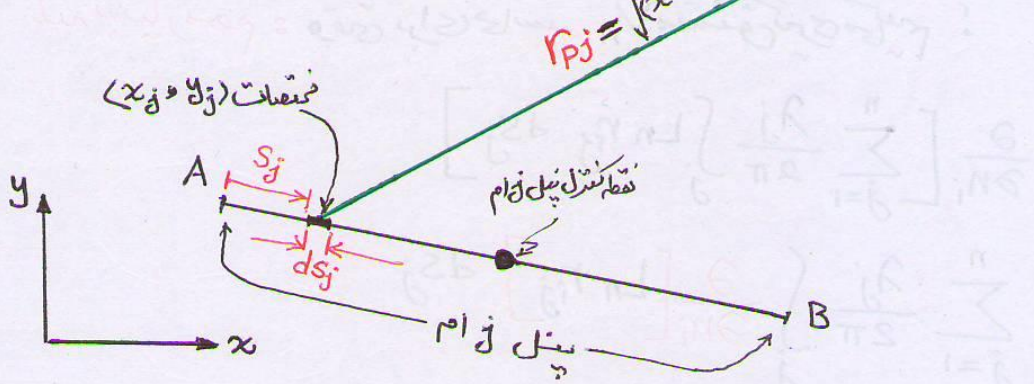
* نقطه کنترل هر پنل نقطه میانی آن پنل است.

آیرودینامیک ۱ - دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی هوافضا - دکتر محمدعلی بدری

مطابق شکل فرض کنید نقطه P با مختصات (x, y) نقطه ای دلخواه در میدان جریان باشد.

مقدار پتانسیل القائی از یک المان ds_j واقع بر پنل دلخواه j ام بر نقطه P :

$$d(\Delta\phi_j) = \frac{\lambda_j \, ds_j}{2\pi} \, Ln \, r_{pj}$$



بنابراین مقدار کل پتانسیل القائی از همه نقاط پنل j ام بر نقطه P به صورت زیر است:

$$\Delta\phi_j = \int_A^B d(\Delta\phi_j) = \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_{S_{jA}=0}^{S_{jB}} Ln \, r_{pj} \, ds_j = \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j Ln \, r_{pj} \, ds_j$$

از آنجا که λ_j بر روی صفحه j ام مقدار ثابتی است و انتگرال فوق فقط روی صفحه j ام انجام می گیرد پس λ_j می تواند از انتگرال خارج شود.

پتانسیل القائی در نقطه P ناشی از مجموعه پنل های اول تا n ام خواهد شد:

$$\phi_p = \sum_{j=1}^{n} \Delta\phi_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j Ln \, r_{pj} \, ds_j$$

از آنجا که به دنبال محاسبه V_n در نقاط کنترلی هر پنل هستیم فرض می کنیم که نقطه دلخواه P دقیقاً در نقطه کنترلی پنل i ام قرار دارد. در این صورت:

$$\phi(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j Ln \, r_{ij} \, ds_j$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

مؤلفه قائم سرعت القائی از همه پنل ها در نقطه کنترلی پنل i ام به صورت زیر خواهد شد:

$$V_n = \frac{\partial}{\partial n_i}\left[\phi(x_i , y_i)\right]$$

اگر V_n در راستای $\vec{n_i}$ رو به بیرون از جسم باشد مقداری مثبت و اگر رو به داخل باشد مقداری منفی خواهد داشت.

نکته بسیار مهم: وقتی برای محاسبه V_n مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$V_n = \frac{\partial}{\partial n_i}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \ln r_{ij}\, ds_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \frac{\partial}{\partial n_i}\left[\ln r_{ij}\right] ds_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \frac{\frac{\partial}{\partial n_i}\left[r_{ij}\right]}{r_{ij}}\, . ds_j$$

مشاهده می‌کنید که r_{ij} در مخرج کسر ظاهر می‌شود. این مساله در یک حالت خاص که $i=j$ باشد یعنی در نقطه کنترلی پنل i ام $r_{ii}=0$ شده و در همین نقطه تکینگی یا Singularity ایجاد می‌شود. بعداً ثابت خواهیم کرد که:

$$\int_i \frac{1}{r_{ii}}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[r_{ii}\right] ds_i = \pi$$

پس مقدار مشتق در پنل i ام برابر $\frac{\lambda_i}{2}$ است. بنابراین:

$$V_n = \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \frac{\partial}{\partial n_i}\left(\ln r_{ij}\right) ds_j$$

در این معادله جمله $\frac{\lambda_i}{2}$ سرعت قائم القائی در نقطه کنترل i ام به سبب خود صفحه i ام است. جمله دوم مجموع سرعتهای قائم القایی در نقطه کنترل i ام در اثر همهٔ پنل‌های دیگر است.

قبلاً توضیح دادیم که می‌خواهیم λ_1 تا λ_n را به‌نحوی بیابیم که مؤلفهٔ قائم سرعت در تک تک نقاط کنترلی برابر صفر باشد به‌نحوی که سطح جسم به خط جریان تبدیل شود. بنابراین مجموع سرعت قائم القائی و سرعت قائم جریان آزاد در هر نقطه کنترلی برابر صفر خواهد بود. این همان شرط مرزی است:

$$V_{\infty,n} + V_n = 0$$ ؛ روی هر نقطه کنترلی

V_n را قبلاً محاسبه کرده‌ایم. اکنون باید $V_{\infty,n}$ را بیابیم. مؤلفهٔ قائم سرعت جریان آزاد در نقطه کنترلی iام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\infty,n} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_i = \underbrace{|\vec{V}_\infty|}_{V_\infty}\,\underbrace{|\vec{n}_i|}_{1}\cos\beta_i = V_\infty \cos\beta_i$$

با اعمال شرط مرزی:

$$V_\infty \cos\beta_i + \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi}\int_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial n_i}(\ln r_{ij})\,ds_j}_{I_{ij}} = 0$$

مقدار I_{ij} به شکل هندسی صفحه‌بندی پنل‌ها بستگی دارد. I_{ij} مقدار انتگرال است وقتی که نقطه کنترل روی پنل iام و انتگرال‌گیری روی صفحه jام صورت می‌پذیرد. پس برای نقطه کنترلی پنل iام:

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} \frac{I_{ij}}{2\pi}\lambda_j = -V_\infty \cos\beta_i \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

اگر معادله جبری خطی فوق را برای پنل $i=1$ تا $i=n$ اعمال کنیم یک دستگاه معادله جبری خطی n معادله‌ای با n مجهول $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ حاصل می‌شود. حل این دستگاه به روش عددی منجر به محاسبه λ_1 تا λ_n می‌شود. بنابراین توزیع قدرت صفحات چشمه به‌نحوی به دست می‌آید که سطح جسم به صورت خط جریان در می‌آید. دقت حل با افزایش تعداد پنل‌ها افزایش می‌یابد.

محاسبهٔ سرعت مماس بر سطح جسم :

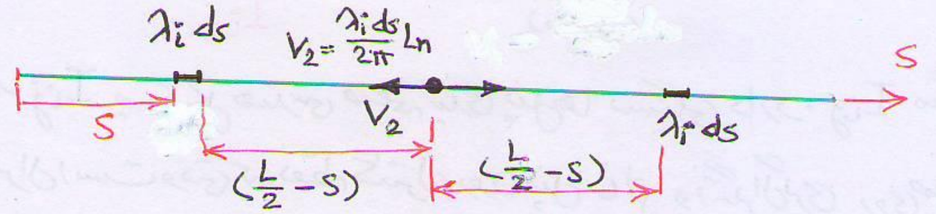
اکنون که مقادیر λ_1، λ_2، ...... ، λ_n معلوم است می‌توان سرعت مماسی بر سطح را در هر یک از نقاط کنترل محاسبه کرد. مؤلفه مماسی سرعت جریان آزاد روی نقطه کنترلی i ام به سادگی قابل محاسبه است :

$$V_{\infty,s} = V_\infty \sin\beta_i$$

همچنین سرعت مماسی V_s در نقطه کنترلی پنل i ام به وسیله همهٔ پنل‌ها القاء می‌شود. کافی است مشتق زیر را محاسبه نمائید :

$$V_s = \frac{\partial}{\partial s_i}\left[\phi(x_i, y_i)\right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s_i}\left[\ln r_{ij}\right] ds_j$$

نکته مهم : سرعت مماسی روی نقطه کنترلی پنل iام که توسط خود پنل iام القا می‌شود برابر صفر است. بنابراین در معادله فوق جمله متناظر با $i=j$ صفر خواهد بود. فرض کنید طول پنل i ام برابر L باشد.



مطابق شکل روی نقطه کنترلی که درست وسط پنل i ام قرار دارد : $S = \frac{L}{2}$

هر دو المان ds با قدرت λ_i با فاصله مساوی از نقطه کنترلی سرعتی معادل با $\frac{\lambda_i\, ds}{2\pi} \ln(\frac{L}{2} - S)$ به سمت بیرون از چشمه المان تولید می‌کنند که برآیند آنها برابر صفر است.

بنابراین سرعت القائی از طرفین نقطه کنترلی در جهت مماسی صفر است.

از طرفی تک المان واقع بر خود نقطه کنترلی نیز نمی‌تواند سرعت مماسی القاء کند. لذا سرعت مماسی القائی از المان i ام روی نقطه کنترلی i ام در کل صفر خواهد شد.

نهایتاً :

$$j = i \quad ; \quad \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_i \frac{\partial}{\partial s_i}\left[\ln r_{ii}\right] ds_i = 0$$

و می‌توان آن را در معادله نهایی حذف کرد.

مطابق مطالب فوق سرعت سطحی کل در نقطه کنترل i ام مجموع اثرهای جریان آزاد و صفحه‌های چشمه خواهد بود:

سرعت سطحی یا سرعت مماسی روی پنل i ام

$$V_i = V_{\infty,s} + V_s$$

$$V_i = V_\infty \sin\beta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s}(\ln r_{ij})\, ds_j$$

در نتیجه ضریب فشار در نقطه کنترلی i ام به سادگی محاسبه می‌شود:

$$C_{p,i} = \frac{P_i - P_\infty}{q_\infty} = 1 - \left(\frac{V_i}{V_\infty}\right)^2$$

به این روش توزیع سرعت سطحی و توزیع فشار سطحی بر روی یک جسم دلخواه بدون برآیی $(C_l = 0)$ به دست می‌آید.

ارزیابی دقت حل عددی:

می‌دانیم که قدرت چشمه پنل j ام به صورت $\lambda_j S_j$ است که در آن S_j طول پنل j ام و λ_j قدرت پنل j ام در واحد طول است. برای مدلسازی جریان پیرامون اجسام با سطح منحنی بسته می‌دانیم جمع قدرت همه چشمه‌ها و چاه‌ها باید برابر صفر باشد:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_j = 0$$

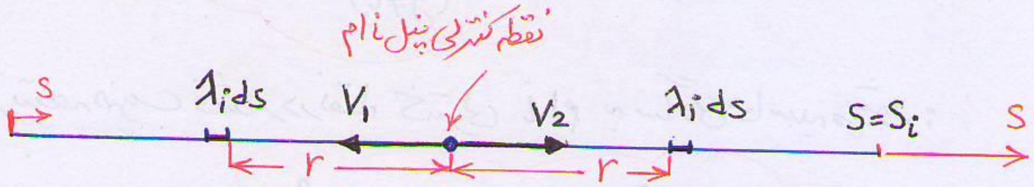
بعضی از آنها را به یاد آورید که قدرت چشمه و چاه آن برابر هستند. اگر اینطور نباشد خود جسم مقداری جرم به جریان اضافه (یا کم) می‌کند که در این صورت سطح آن نمی‌تواند بسته باشد.

پس از انجام حل عددی مقدار $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_j$ را محاسبه کنید. هرچه به صفر نزدیکتر باشد حل شما دقیق‌تر است.

سوال مهم: می‌دانیم که مقدار سرعت عمودی V_n که هر پنل بر نقطه کنترلی خود القاء می‌کند برابر $\frac{\lambda_i}{2}$ است. اما توضیح داده نشد که این مقدار چطور محاسبه می‌شود.

وجود نقطه تکینه یا Singular دقیقاً در نقطه کنترلی باعث دشوار شدن تحلیل ریاضی این مساله می‌شود. برای درک دقیق پیچیدگی مساله باید هم جنبه فیزیکی و هم جنبه ریاضی آن به خوبی بررسی شود:

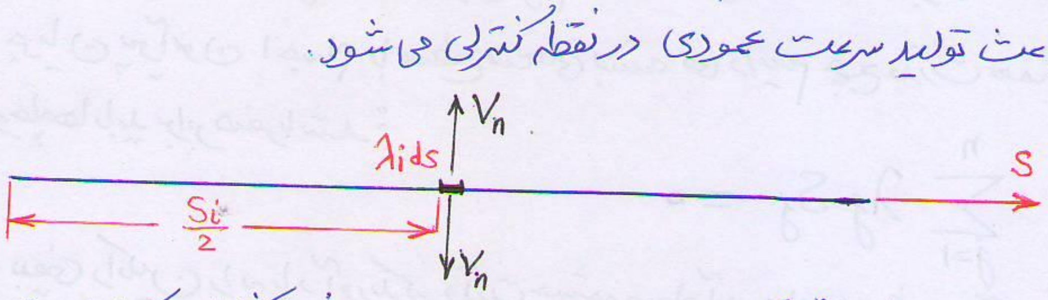
فرض کنید شکل زیر پنل i ام با نقطه کنترلی i ام در وسط آن را نشان می‌دهد:



$$V_1 = V_2 = \frac{\lambda_i\, ds}{2\pi}$$

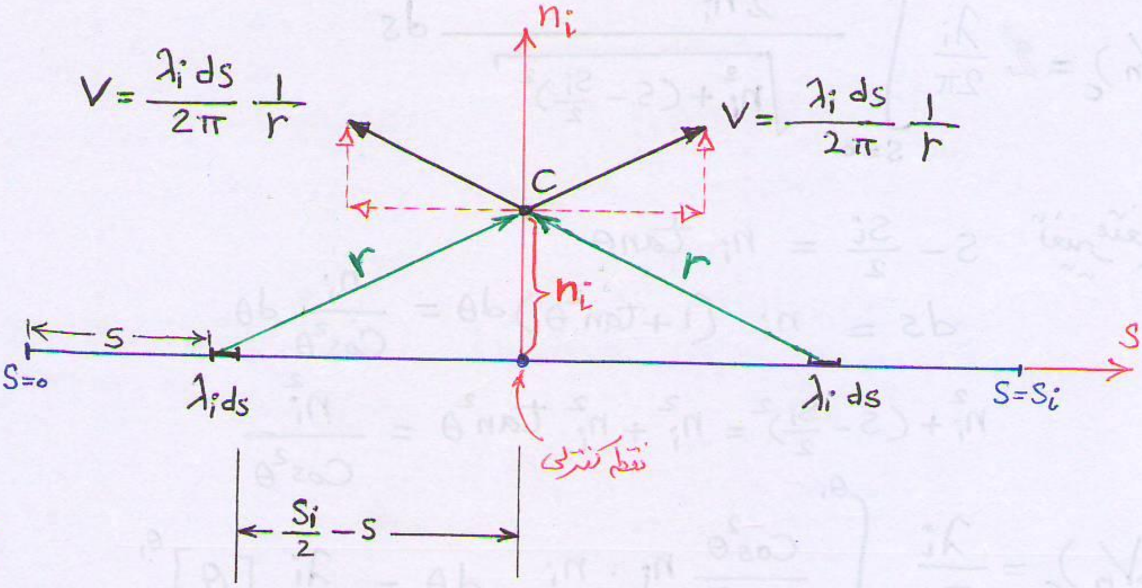
هر دو المان ds با شدت واحد طول λ_i که در فاصله‌های برابر از نقطه کنترلی قرار دارند دو بردار سرعت $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ را مساوی و مخالف جهت هم ایجاد می‌کنند که برآیند سرعت مماسی را برابر صفر می‌کند در حالیکه هیچ مؤلفه سرعت عمودی را در نقطه کنترلی القاء نمی‌کنند!

اما درست روی نقطه کنترلی یک المان با شدت $\lambda_i\, ds$ می‌تواند قرار گیرد که جریانی را به طرفین از جمله به سمت بالا و پائین به طور متقارن القاء می‌کند و باعث تولید سرعت عمودی در نقطه کنترلی می‌شود.



ولی به دلیلی که قبلاً توضیح داده‌ایم ($r_{ii}=0$) نقطه کنترلی تکینه است و برای محاسبه توزیع ϕ و $V_n = \frac{\partial \phi}{\partial n_i}$ نیازمند درک مساله تکینگی و به کار بردن حقه ریاضی مناسب هستیم. چون خود نقطه کنترلی تکینه است مقدار V_n ناشی از دو المان قرینه را در نقطه n کمی دورتر از نقطه تکینه (نقطه کنترلی)

محاسبه می‌کنیم :



همانطور که در شکل فوق نمایش داده شده است از آنجا که نقطه کنترلی تکینه است نقطه ای به فاصله عمودی n_i از نقطه کنترلی را مطالعه می‌کنیم. کاملا مشخص است که در نقطه C مؤلفه های سرعت در راستای s همدیگر را خنثی کرده ولی مؤلفه‌های قائم با هم جمع می‌شوند لذا مؤلفه قائم غیر صفر است. مقدار پتانسیل القاء شده از دو المان ds که به صورت قرینه نسبت به نقطه کنترلی روی پنل i ام قرار دارند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

۲ المان متقارن

$$d\phi_c = 2\,\frac{\lambda_i\,ds}{2\pi}\,Ln(r) \quad و \quad r = \sqrt{n_i^2 + \left[\frac{S_i}{2} - s\right]^2}$$

$$\phi_c = \int_{s=0}^{\frac{S_i}{2}} 2\,\frac{\lambda_i}{2\pi}\,Ln\sqrt{n_i^2 + \left[\frac{S_i}{2} - s\right]^2}\;ds$$

$$(V_n)_c = \frac{\partial \phi_c}{\partial n_i} = \cancel{2}\,\frac{\lambda_i}{\cancel{2}\pi}\int_{s=0}^{\frac{S_i}{2}} \frac{\partial}{\partial n_i}\left[Ln\sqrt{n_i^2 + \left(\frac{S_i}{2} - s\right)^2}\right] ds$$

$$(V_n)_c = \frac{\lambda_i}{\pi}\int_{s=0}^{\frac{S_i}{2}} \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial n_i}\left[Ln\left[n_i^2 + \left(\frac{S_i}{2} - s\right)^2\right]\right] ds = \frac{\lambda_i}{2\pi}\int_{s=0}^{\frac{S_i}{2}} \frac{\frac{\partial}{\partial n_i}\left[n_i^2 + \left(\frac{S_i}{2} - s\right)^2\right]}{n_i^2 + \left(\frac{S_i}{2} - s\right)^2}\,ds$$

$$(V_n)_c = \frac{\lambda_i}{\cancel{2}\pi}\int_{s=0}^{\frac{S_i}{2}} \frac{\cancel{2}\, n_i}{n_i^2+(s-\frac{S_i}{2})^2}\, ds$$

تغییر متغیر

$$s-\frac{S_i}{2} = n_i \tan\theta$$

$$ds = n_i\,(1+\tan^2\theta)\,d\theta = \frac{n_i}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$n_i^2+(s-\frac{S_i}{2})^2 = n_i^2 + n_i^2\tan^2\theta = \frac{n_i^2}{\cos^2\theta}$$

$$(V_n)_c = \frac{\lambda_i}{\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\cos^2\theta}{n_i^2}\, n_i \cdot \frac{n_i}{\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{\lambda_i}{\pi}\left[\theta\right]_{\theta_0}^{\theta_1}$$

$$(V_n)_c = \frac{\lambda_i}{\pi}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{s-\frac{S_i}{2}}{n_i}\right)\right\}_{s=0}^{s=\frac{S_i}{2}}$$

$$= \frac{\lambda_i}{\pi}\left\{\underbrace{\tan^{-1} 0}_{=0} - \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{S_i}{2}}{n_i}\right)\right\} = \frac{\lambda_i}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{S_i}{2n_i}\right)$$

اکنون برای محاسبه سرعت قائم در نقطه کنترلی پنل i ام به علت تکینه بودن نقطه کنترلی n_i را به صفر میل می‌دهیم.

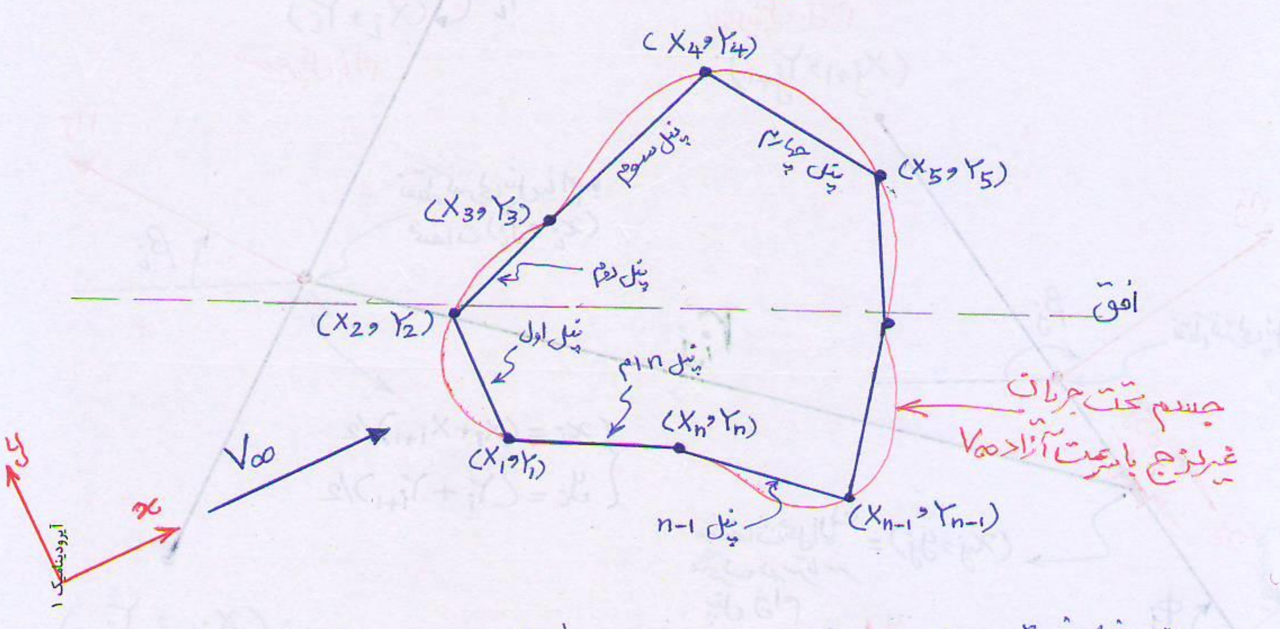
$$(V_n)_{\substack{\text{Control point}\\ \text{of panel } i}} = \lim_{n_i \to 0^+} \frac{\lambda_i}{\pi}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{S_i}{2n_i}\right)\right\}$$

$$= \frac{\lambda_i}{\pi}\left\{+\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\lambda_i}{2}$$

$$(V_n)_{\substack{\text{control Point}\\ \text{of panel } i}} = \frac{\lambda_i}{2}$$

اثبات کردیم که مقدار سرعت قائم القائی از هر پنل بر نقطه کنترلی خود برابر با $\frac{\lambda_i}{2}$ می‌باشد.

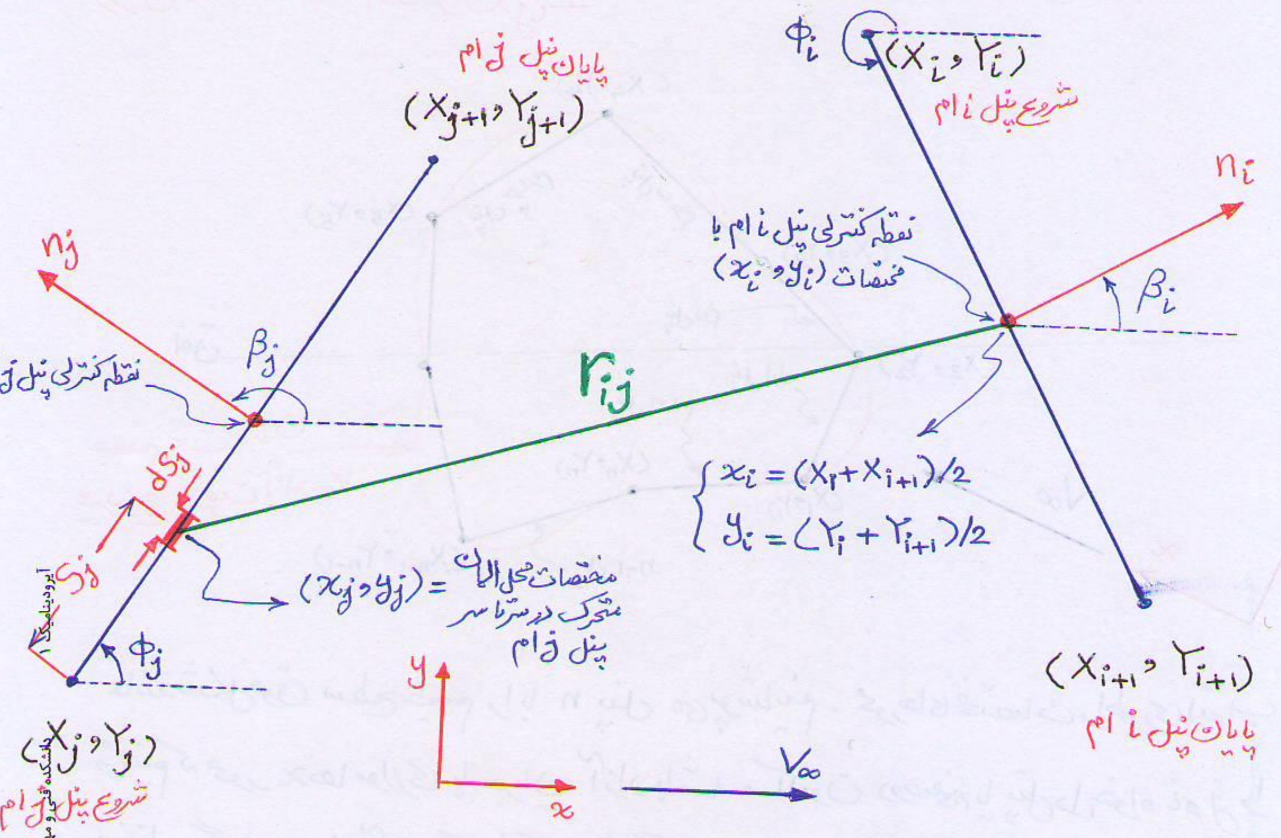
روش محاسبهٔ انتگرال $I_{i,j}$



مانند شکل فوق سطح جسم را با n پنل می‌پوشانیم. محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که محور xها موازی با جریان آزاد باشد. اکنون دو صفحه یا پنل دل‌خواه i و j در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که قبلاً اثر هر پنل روی سطح کنترلی خود را محاسبه کرده‌ایم بنابراین در محاسبات پیش رو نیازی نیست که $i = j$ باشد. به بیان دیگر نیازی محاسبهٔ $I_{i,i}$ نداریم.

مختصات نقطه آغاز و پایان پنل i ام به ترتیب (X_i, Y_i) و (X_{i+1}, Y_{i+1}) می‌باشد.
مختصات نقطه آغاز و پایان پنل j ام به ترتیب (X_j, Y_j) و (X_{j+1}, Y_{j+1}) می‌باشد.
مقادیر این مختصات معلوم هستند. فقط توجه کنید که در آخرین پنل مختصات نقطه شروع پنل (X_n, Y_n) و نقطه آخر آن (X_1, Y_1) می‌باشد. ضمناً توجه شود که نقاط شروع و پایان هر پنل حتماً باید روی سطح جسم قرار داشته باشد.

در این جا ما قصد داریم انتگرال $I_{i,j}$ را محاسبه کنیم. دقت کنید که $I_{ij} \neq I_{ji}$.
وقتی انتگرال I_{ij} را محاسبه می‌کنیم نقطه کنترلی بر روی صفحه i ام بوده و انتگرال‌گیری بر روی صفحه j ام انجام می‌شود.



مطابق شکل زاویه بین امتداد جریان آزاد (یا محور x ها) با بردار واحد $\vec{n}_i$ برابر با β_i و زاویه جریان آزاد با بردار واحد $\vec{n}_j$ برابر با β_j می‌باشند.

جالب است که اگر از شروع هر پنل به سمت پایان آن حرکت کنیم بردار قائم $\vec{n}$ همیشه به طرف چپ قرار می‌گیرد. زوایای ϕ_i و ϕ_j بیانگر زاویه امتداد پنل با امتداد جریان آزاد هستند. زاویه ϕ_i و ϕ_j دقیقاً در شروع پنل i ام و j ام قرار داشته و امتداد بردار $\vec{V}_\infty$ بیانگر زاویه صفر است. در زبان‌های کامپیوتری نوعی از $\tan^{-1}$ وجود دارد که با دو آرگومان ورودی به صورت $\phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ کار می‌کند. مثلاً در زبان فرترن:

$$\phi(i) = ATAN2\,(Y(i+1) - Y(i),\ X(i+1) - X(i))$$
$$\phi(j) = ATAN2\,(Y(j+1) - Y(j),\ X(j+1) - X(j))$$

برای محاسبهٔ انتگرال :

$$I_{ij} = \int_j \frac{\partial}{\partial n_i}(Ln\, r_{ij})\, ds_j$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i}(Ln\, r_{ij}) = \frac{\frac{\partial}{\partial n_i}(r_{ij})}{r_{ij}} = \frac{\frac{\partial}{\partial n_i}\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right]}{2\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right]}$$

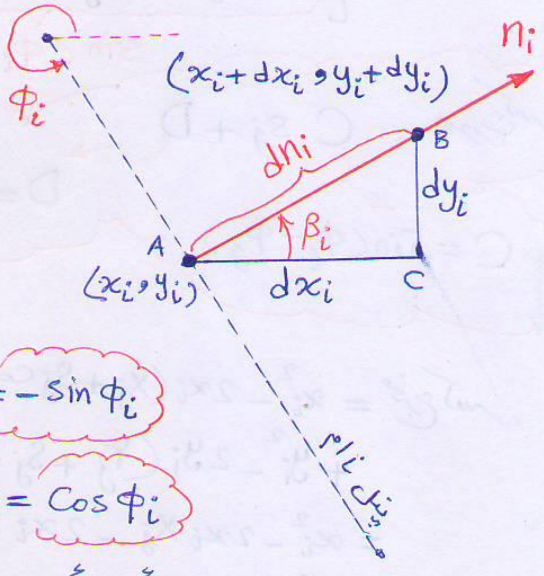
یادآوری : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

می دانیم مشتق $\frac{\partial}{\partial n_i}$ در امتداد بردار $\vec{n_i}$ روی پنل i ام است پس x_j و y_j ثابت شده و حذف می شوند :

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2\right] = 2(x_i-x_j)\frac{dx_i}{dn_i} + 2(y_i-y_j)\frac{dy_i}{dn_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i}(Ln\, r_{ij}) = \frac{(x_i-x_j)\frac{dx_i}{dn_i} + (y_i-y_j)\frac{dy_i}{dn_i}}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$$

برای محاسبهٔ $\frac{dx_i}{dn_i}$ و $\frac{dy_i}{dn_i}$ به شکل ذیل توجه شود. اگر از نقطهٔ کنترلی پنل i ام به اندازهٔ dn_i در راستای $\vec{n_i}$ جلوتر برویم به نقطهٔ B می رسیم.



در واقع به اندازهٔ dx_i در جهت محور x ها و dy_i در جهت محور y ها جابجا شده‌ایم تا به نقطه B برسیم. در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\cos\beta_i = \frac{dx_i}{dn_i} = \cos(\phi_i + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin\phi_i$$

$$\sin\beta_i = \frac{dy_i}{dn_i} = \sin(\phi_i + \tfrac{\pi}{2}) = \cos\phi_i$$

زیرا با توجه به هندسهٔ مسأله : $\beta_i = \phi_i + \frac{\pi}{2}$

از طرفی روی پنل j ام به راحتی داریم :

$$x_j = X_j + s_j \cos\phi_j$$

$$y_j = Y_j + s_j \sin\phi_j$$

حالا یک بار دیگر انتگرال را بازنویسی می‌کنیم :

$$I_{ij} = \int_{s_j=0}^{s_j=S_j} \frac{-(x_i-(X_j+s_j\cos\phi_j))\sin\phi_i + (y_i-(Y_j+s_j\sin\phi_j))\cos\phi_i}{(x_i-(X_j+s_j\cos\phi_j))^2 + (y_i-(Y_j+s_j\sin\phi_j))^2}\, ds_j$$

دقت کنید که طول پنل j ام را برابر S_j در نظر گرفته‌ایم که به راحتی قابل محاسبه است :

$$S_j = \sqrt{(X_{j+1}-X_j)^2 + (Y_{j+1}-Y_j)^2}$$

برای حل انتگرال فوق صورت کسر و مخرج آن را به صورت جداگانه مرتب می‌کنیم :

$$\text{صورت کسر} = -x_i\sin\phi_i + X_j\sin\phi_i + s_j\sin\phi_i\cos\phi_j + y_i\cos\phi_i - Y_j\cos\phi_i - s_j\cos\phi_i\sin\phi_j$$

$$= (y_i-Y_j)\cos\phi_i - (x_i-X_j)\sin\phi_i + \{\underbrace{\sin\phi_i\cos\phi_j - \cos\phi_i\sin\phi_j}_{\sin(\phi_i-\phi_j)}\}\, s_j$$

$$\text{صورت کسر} = C\, s_j + D$$

$$D = (y_i-Y_j)\cos\phi_i - (x_i-X_j)\sin\phi_i$$

$$C = \sin(\phi_i-\phi_j)$$

$$\text{مخرج کسر} = x_i^2 - 2x_i(X_j+s_j\cos\phi_j) + (X_j+s_j\cos\phi_j)^2 + y_i^2 - 2y_i(Y_j+s_j\sin\phi_j) + (Y_j+s_j\sin\phi_j)^2$$

$$= x_i^2 - 2x_iX_j - 2x_i s_j\cos\phi_j + X_j^2 + s_j^2\cos^2\phi_j + 2X_j s_j\cos\phi_j + y_i^2 - 2y_iY_j - 2y_i s_j\sin\phi_j + Y_j^2 + s_j^2\sin^2\phi_j + 2Y_j s_j\sin\phi_j$$

مخرج کسر $= S_j^2(\sin^2\phi_j+\cos^2\phi_j)+\left[2(X_j-x_i)S_j\cos\phi_j+2(Y_j-y_i)S_j\sin\phi_j\right]$

$$+(x_i^2-2x_iX_j+X_j^2)+(y_i^2-2y_iY_j+Y_j^2)$$

$$= S_j^2+2\left[(X_j-x_i)\cos\phi_j+(Y_j-y_i)\sin\phi_j\right]S_j$$

$$+\left[(x_i-X_j)^2+(y_i-Y_j)^2\right]$$

مخرج کسر $= S_j^2+2AS_j+B$

$$B=(x_i-X_j)^2+(y_i-Y_j)^2$$

$$A=(X_j-x_i)\cos\phi_j+(Y_j-y_i)\sin\phi_j$$

انتگرال به صورت زیر در می آید:

$$I_{ij}=\int_0^{S_j}\frac{Cs_j+D}{s_j^2+2As_j+B}\,ds_j$$

$$= \underbrace{C\int_0^{S_j}\frac{s_j\,ds_j}{s_j^2+2As_j+B}}+\underbrace{D\int_0^{S_j}\frac{ds_j}{s_j^2+2As_j+B}}$$

$$D\left[\frac{2}{\sqrt{4B-4A^2}}\tan^{-1}\left(\frac{2s_j+2A}{\sqrt{4B-4A^2}}\right)\right]_0^{S_j}$$

$$C\left[\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|s_j^2+2As_j+B\right|-\frac{2A}{\sqrt{4B-4A^2}}\tan^{-1}\left(\frac{2s_j+2A}{\sqrt{4B-4A^2}}\right)\right]_0^{S_j}$$

$$D\times\frac{1}{E}\tan^{-1}\left(\frac{S_j+A}{E}\right)-D\times\frac{1}{E}\tan^{-1}\left(\frac{A}{E}\right)$$

$$C\times\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{S_j^2+2AS_j+B}{B}\right|-C\frac{A}{E}\tan^{-1}\left(\frac{S_j+A}{E}\right)+C\frac{A}{E}\tan^{-1}\left(\frac{A}{E}\right)$$

توجه: $E=\sqrt{B-A^2}$

$$I_{ij} = \frac{C}{2}\ln\left|\frac{S_j^2+2AS_j+B}{B}\right| + \frac{D-AC}{E}\left[\tan^{-1}\left(\frac{S_j+A}{E}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{A}{E}\right)\right]$$

مقادیر A ، B ، C ، D و E فقط با دانستن مختصات نقاط مرزی (X و Y ها) براساس روابطی که در صفحات قبل به‌طور کامل تشریح شد قابل محاسبه هستند.

نکته پایانی:

دقت روش Source Panel Method به‌طور چشم‌گیری خوب است. برای مثال جریان غیرلزج آزاد پیرامون یک استوانه دایروی را تنها با ۸ پنل و بیشتر ایرفویل‌ها را با ۵۰ الی ۱۰۰ پنل با دقت خوبی می‌توان حل کرد. البته همانطور که قبلاً توضیح دادیم تعداد پنل‌ها در منطقه لبه حمله باید بسیار بیشتر باشد و در این روش و محاسبات ارائه شده نیازی به مساوی بودن طول پنل‌ها نیست.

پروژه ۱: با استفاده از روش صفحه‌بندی چشمه، توزیع فشار پیرامون استوانه دایروی را با انتخاب ۸ پنل محاسبه کنید.

پروژه ۲: با استفاده از روش صفحه‌بندی چشمه، توزیع فشار پیرامون یک ایرفویل دلخواه متقارن با زاویه حمله $\alpha=0$ را با انتخاب n پنل محاسبه کنید.

مقدار n را برابر با ۱۰، ۳۰، ۵۰، ۷۰ و ۱۰۰ قرار داده و توزیع فشار آنها را مقایسه کنید.

پیشنهاد: در معادله حاصل در نقاط کنترلی می‌توان به‌جای $\cos\beta_i$ - مقدار $\sin\phi_i$ جایگذاری کرد. همچنین طرفین رابطه را به 2π نیز ضرب کرد تا در نهایت:

$$\pi\lambda_i + \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} I_{ij}\,\lambda_j = +2\pi V_\infty \sin\phi_i \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

الگوریتم انجام یک پروژهٔ کلی :

۱ـ فرض کنید مختصات نقاط مرزی یک جسم دل‌خواه که با n پنل مدل شده را داریم :

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \ldots, (X_n, Y_n)$ و $(X_{n+1} = X_1, Y_{n+1} = Y_1)$

۲ـ

$$x(i) = (X_i + X_{i+1})/2 \quad , \quad y(i) = (Y_i + Y_{i+1})/2$$

$$\phi(i) = \mathrm{ATAN2}\big(Y(i+1) - Y(i),\ X(i+1) - X(i)\big)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

۳ـ

```
    Do 10 i = 1, n
    Do 11 j = 1, n
    if (i == j) then
      I(i,j) = π
      go to 11
    End IF
    A = (X_j - x_i) cos φ_j + (Y_j - y_i) sin φ_j
    B = (x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2
    C = sin(φ_i - φ_j)
    D = (y_i - Y_j) cos φ_i - (x_i - X_j) sin φ_i
    E = sqrt(B - A^2)
    S_j = sqrt((X_{j+1} - X_j)^2 + (Y_{j+1} - Y_j)^2)
    I(i,j) = فرمول بالای صفحه قبل
    R(i) = 2π V∞ sin φ_i
11  Continue
10  Continue
```

۴ـ در مرحله قبل دستگاه $[I]_{n\times n}[\lambda]_{n\times 1} = [R]_{n\times 1}$ تشکیل شد. در این مرحله با یک روش حل دستگاه معادلات جبری خطی مانند روش حذفی گوس آن را حل کرده و λ_1 تا λ_n را می‌یابیم.

۵ـ اکنون V_i و C_{p_i} قابل محاسبه است. نمودار C_{p_i} برحسب یک متغیر مناسب رسم شود، مثلاً اگر جریان حول استوانه دایروی باشد برحسب θ و اگر جریان حول ایرفویل برحسب $\frac{x}{\text{وتر}}$.