

تحلیل خمش و ارتعاشات آزاد ترموالکترومگنتوالاستیک تیر منحنی ساندویچی سه لایه با هسته مسی تقویت شده با گرافن اریگامی مجهز شده با لایه های پیزوالکترومگنتیک برای شرایط مرزی مختلف

۱- مقدمه

با گسترش روزافزون فناوری های نوین و نیاز به ساختارهایی با عملکرد چندگانه در محیط های کاری پیچیده، طراحی و تحلیل دقیق سازه هایی که قادر به پاسخگویی به محرک های چندفیزیکی باشند، از اهمیت ویژه ای برخوردار شده است. یکی از ساختارهای نوین که در سال های اخیر توجه محققان را به خود جلب کرده، تیرهای ساندویچی چندلایه با هسته و پوسته هایی از مواد هوشمند و نانوساختار است. این تیرها به دلیل دارا بودن نسبت بالای استحکام به وزن، سفتی قابل کنترل، جذب انرژی مؤثر و امکان سفارشی سازی پاسخ سازه ای، در صنایع مختلفی همچون هوافضا، نانوابزارها، مهندسی زیستی، رباتیک و میکروالکترومکانیک (MEMS) کاربرد وسیعی پیدا کرده اند.

در میان رویکردهای نوین برای تقویت عملکرد هسته ی این نوع تیرها، استفاده از نانورق های گرافن با ساختار اریگامی به عنوان تقویت کننده در یک ماتریس فلزی مانند مس (Cu)، نوآوری مهمی به شمار می رود. ساختار اریگامی گرافن، به دلیل ویژگی هایی چون انعطاف پذیری بالا، ظرفیت بالای جذب انرژی، و توانایی تغییرپذیری در پاسخ به بارگذاری های خارجی، امکان تنظیم خواص مکانیکی مؤثر هسته را فراهم می سازد. از طرفی، تقویت

ماتریس فلزی با این نانوورق‌ها، منجر به بهبود خواصی چون سختی، مقاومت حرارتی، و پایداری دینامیکی هسته می‌گردد که در قیاس با هسته‌های سنتی، عملکرد بالاتری را ارائه می‌دهد.

در راستای ارتقای عملکرد دینامیکی و چندفیزیکی این تیرها، استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک (PEM) در سطوح بالا و پایین سازه پیشنهاد می‌شود. این مواد چندکارکرده، توانایی برقراری کوپل بین حوزه‌های مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی را دارا هستند؛ به گونه‌ای که در اثر تنش مکانیکی، می‌توانند میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی القا کرده و بالعکس تحت تأثیر این میدان‌ها، تغییر شکل مکانیکی از خود نشان دهند. این قابلیت‌ها، آن‌ها را به گزینه‌ای مناسب برای طراحی سازه‌های هوشمند با عملکرد حسگری، عملگری و کنترل فعال تبدیل کرده است.

بخش عمده‌ای از مطالعات موجود در زمینه تیرهای ساندویچی، بر تحلیل سازه‌های با هسته‌های همگن یا تقویت‌شده با ذرات نانو بدون در نظر گرفتن ساختارهای پیشرفته‌تری همچون گرافن اریگامی متمرکز بوده‌اند. همچنین در بسیاری از این مطالعات، اثرات بارگذاری‌های چندمیدانی به صورت جداگانه یا خطی در نظر گرفته شده‌اند، در حالی که در محیط‌های واقعی، سازه‌ها هم‌زمان تحت تأثیر میدان‌های حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی قرار دارند که تحلیل آن‌ها مستلزم در نظر گرفتن کوپل غیرخطی بین این حوزه‌ها در چارچوب ترموالکتریک-الاستیک (Thermo-Electro-Magneto-Elasticity) است.

افزون بر این، مدل‌سازی دقیق چنین سازه‌هایی با استفاده از تئوری‌های کلاسیک همچون اویلر-برنولی یا حتی تئوری‌های مرتبه پایین مانند تیموشنکو، پاسخگوی رفتار پیچیده لایه‌ای به‌ویژه در حضور لغزش بین لایه‌ها و ناهمگنی شدید نیستند. از این رو، بهره‌گیری از تئوری مرتبه بالاتر لایه‌ای (Higher-Order Layerwise Theory) ضرورت می‌یابد؛ چراکه این تئوری قادر است جابجایی‌ها را به صورت پیوسته در راستای ضخامت مدل کرده و اثرات برهم‌کنش‌های لایه‌ای را با دقت بالا لحاظ کند.

در این پژوهش، هدف ارائه‌ی یک مدل جامع برای تحلیل خمش ایستا و ارتعاشات آزاد یک تیر منحنی ساندویچی سه‌لایه است که در آن، هسته از جنس کامپوزیت فلزی-نانوساختاری تقویت‌شده با گرافن اریگامی و لایه‌های سطحی از مواد پیزوالکتریک تشکیل شده‌اند. برای مدل‌سازی، از تئوری مرتبه بالاتر لایه‌ای استفاده شده و معادلات حاکم بر رفتار تیر با بهره‌گیری از اصل همیلتون استخراج می‌گردند. تحلیل رفتار سازه در چارچوب کامل ترموالکتریک و الاستیسیته انجام می‌شود و برای حل معادلات، از روش‌های نیمه‌تحلیلی و عددی در محیط MATLAB بهره گرفته می‌شود. این پژوهش با بررسی پاسخ سازه در شرایط مرزی مختلف و تحت پارامترهای طراحی گوناگون، گامی مؤثر در درک عمیق‌تر از رفتار سازه‌های هوشمند چندلایه تحت بارگذاری‌های چندفیزیکی برمی‌دارد.

۲- مدل‌سازی هندسی و فیزیکی تیر

در این پژوهش، ساختاری از نوع تیر منحنی ساندویچی سه‌لایه مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن انحنا، ناهمگنی مواد، و تأثیرات چندمیدانی به‌طور هم‌زمان در نظر گرفته شده‌اند. تیر مورد نظر در صفحه‌ای دوبعدی و با شعاع انحنای ثابت RRR تعریف می‌شود و طول مؤثر آن به‌صورت طول کمان بین دو انتها مشخص می‌شود.

۲-۱- هندسه تیر

تیر مورد بررسی از سه لایه تشکیل شده است:

- لایه‌ی بالایی: از نوع ماده پیزوالکتریک (PEM) با ضخامت h_1
- هسته‌ی میانی: متشکل از کامپوزیت فلزی مس (Cu) تقویت‌شده با گرافن اریگامی با ضخامت h_2
- لایه‌ی پایینی: مجدداً PEM با ضخامت h_3

شکل مقطع تیر در راستای ضخامت به صورت ترکیب این سه لایه است. فرض می شود که تیر دارای انحنای ثابت در امتداد شعاع R بوده و طول مؤثر تیر در راستای مماسی برابر L است. ضخامت کل تیر برابر است با:

$$h=h_1+h_2+h_3$$

۲-۲- سیستم مختصات

برای تحلیل تیر منحنی، از سیستم مختصات مماسی-شعاعی استفاده می شود. محور شعاعی (r) از مرکز انحنا به سمت بیرون امتداد دارد، و محور مماسی (θ) در راستای طولی تیر قرار دارد. در این مدل سازی، توزیع تنش و کرنش در راستای ضخامت (شعاعی) و امتداد طولی (مماسی) بررسی می شود.

۲-۳- فرضیات مدل سازی

- جهت ساده سازی و در عین حال حفظ دقت مدل سازی، فرضیات زیر اعمال شده اند:
۱. انحنای تیر ثابت و در یک صفحه دویعدی است.
 ۲. مواد هر لایه همگن و ایزوتروپیک بوده ولی خواص بین لایه ها متفاوت است.
 ۳. لغزش بین لایه ها قابل وقوع است (در قالب تئوری مرتبه بالاتر لایه ای مدل می شود).
 ۴. توزیع بارگذاری حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی به صورت پیوسته در راستای ضخامت لحاظ می شود.
 ۵. اثرات میدان های خارجی در راستای ضخامت و طول تیر در نظر گرفته می شود.
 ۶. کرنش ها کوچک فرض شده ولی تغییر شکل های ناشی از انحنا لحاظ می گردند.

۲-۴- مشخصات مواد

برای مدل‌سازی دقیق‌تر، ویژگی‌های فیزیکی و ترموالکترومغناطیسی مواد مورد استفاده در هر لایه به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

لایه	مدول یانگ E	ضریب پواسون ν	ضریب انبساط حرارتی α	ضرایب پیزوالکتریک	ضرایب مغنتوالاستیک
PEM	۱۲۰	۰٫۳۲	$۱۰^{-۶} \times ۴٫۰$	$e_{31} = -5.4$ $e_{33} = 15.8$	$q_{31} = 2.3$ $q_{33} = 4.1$
Cu + Graphene Origami	۱۱۰	۰٫۳۴	$۱۰^{-۵} \times ۱٫۷$	0	0
PEM	۱۲۰	۰٫۳۲	$۱۰^{-۶} \times ۴٫۰$	$e_{31} = -5.4$ $e_{33} = 15.8$	$q_{31} = 2.3$ $q_{33} = 4.1$

PEM: فرض شده از جنس موادی نظیر PZT-M و Terfenol-D با کوپل‌پذیری الکترومغناطیسی.

لایه میانی فقط نقش مکانیکی و حرارتی دارد، بنابراین پارامترهای پیزوالکتریک و مغنتوالاستیک آن صفر در نظر گرفته می‌شوند.

۳- فرموله‌سازی و استخراج معادلات حاکم

در این بخش، تیر منحنی سه‌لایه ساندویچی با در نظر گرفتن میدان‌های حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی، بر پایه‌ی تئوری مرتبه بالاتر لایه‌ای (Higher-Order Layerwise Theory) و با استفاده از اصل همیلتون مدل‌سازی می‌شود.

این تئوری قابلیت در نظر گرفتن تغییرات پیوسته‌ی جابجایی در راستای ضخامت و کوپل شدن چند فیزیک را فراهم می‌سازد.

۳-۱- سیستم مختصات و میدان جابجایی

تحلیل در دستگاه مختصات قطبی (r, θ) انجام می‌شود، که در آن:

- r : شعاع (عمود بر تیر)

- θ : راستای مماسی (طولی تیر)

جابجایی‌ها در هر لایه‌ی i -ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^{(i)}(r, \theta, t) = u_0^{(i)}(\theta, t) + z \cdot \phi^{(i)}(\theta, t)$$

$$w^{(i)}(r, \theta, t) = w_0^{(i)}(\theta, t)$$

که در آن:

- u : جابجایی مماسی (طولی)

- w : جابجایی شعاعی (ضخامت)

- $\phi^{(i)}$: تابع چرخش خمشی در لایه i

- z : موقعیت در راستای ضخامت نسبت به سطح میانی هر لایه

۳-۲- کرنش‌ها

با فرض تغییر شکل‌های کوچک، روابط کرنش در سیستم قطبی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r}$$

۳-۳- روابط قانون ماده (Constitutive Equations)

در مواد پیزوالکتر و مگنتیک (PEM)، تنش مکانیکی، جابجایی الکتریکی و میدان مغناطیسی، همگی به کرنش، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و دما کوپل هستند:

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ D \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ E \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -e & -q \\ T_e & \varepsilon & \alpha \\ T_q & T_\alpha & \mu \end{bmatrix} - \Delta T \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعاریف:

- σ : تنش مکانیکی
- ε : کرنش مکانیکی
- D : جابجایی الکتریکی
- H : چگالی جریان مغناطیسی
- E : میدان الکتریکی

- B: میدان مغناطیسی

- ΔT : تغییر دما

- C: ماتریس سختی مکانیکی

- e: ماتریس پیزوالکتریک

- q: ماتریس پیزومغناطیک

- μ : تراوایی مغناطیسی

- ε : تراوایی دی الکتریک

- α : کوپل مغناطوالکتریک

- β : ضرایب انبساط حرارتی

۳-۴- اصل همیلتون

معادلات حرکت از اصل همیلتون به دست می آیند:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U + W) dt = 0$$

که:

- T: انرژی جنبشی کل سیستم

- U: انرژی پتانسیل کرنشی (شامل اثرات حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی)

- W : کار انجام شده توسط بارها و میدان‌های خارجی

پس از اعمال این اصل و جایگذاری روابط کرنش و قانون ماده، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی کوپل شده به دست می‌آید.

۳-۵- شرایط مرزی

شرایط مرزی مکانیکی (Mechanical Boundary Conditions)

حالت ۱: تیر ساده – ساده (Simply Supported – Simply Supported)

دو انتهای تیر روی تکیه‌گاه قرار دارند و اجازه دوران دارند ولی جابجایی شعاعی ندارند.

- $w=0$ (جابجایی شعاعی صفر)

- $M=0$ (گشتاور خمشی صفر)

- گاهی $\phi=0$ نیز در نظر گرفته می‌شود

❖ حالت ۲: تیر گیردار – گیردار (Clamped – Clamped)

دو سر تیر کاملاً مهار شده‌اند.

- $u=0$ (جابجایی مماسی صفر)

- $w=0$ (جابجایی شعاعی صفر)

- $\phi=0$ (دوران ناشی از خمش صفر)

این حالت صلب‌ترین شرایط مرزی را دارد و باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

حالت ۳: تیر گیردار – آزاد (Clamped – Free)

$$u=0, \quad w=0, \quad \phi=0, \quad \theta=L \text{ آزاد}$$

$$N=0 \text{ (نیروی محوری صفر)}$$

$$Q=0 \text{ (نیروی برشی صفر)}$$

$$M=0 \text{ (گشتاور خمشی صفر)}$$

این حالت ترکیب پایداری و انعطاف‌پذیری را فراهم می‌کند و در بسیاری از سازه‌های هوشمند کاربرد دارد.

شرایط مرزی الکتریکی (Voltage BCs)

در هر دو سر تیر (یا سطح بالا/پایین لایه PEM) می‌توان شرایط زیر را اعمال کرد:

حالت	شرط مرزی پیشنهادی
الکتروود متصل	$\phi = V_0$ یا $\phi = 0$ (پتانسیل مشخص)
عایق	$D_n=0$ (شار الکتریکی در راستای نرمال صفر)

شرایط مرزی مغناطیسی (Magnetic BCs)

برای مرزهای دارای خاصیت مغناطیسی، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

شرط مرزی پیشنهادی	حالت
$B = B_0$	میدان مغناطیسی اعمالی
$H_n = 0$ (شار مغناطیسی خروجی صفر)	مرز عایق

شرایط مرزی حرارتی (Thermal BCs)

برای حالت متقارن یا با بار حرارتی موضعی:

شرط	نوع
$T = T_0$	دمای ثابت
$q_n = 0$ (مرز آدیاباتیک)	شار حرارتی صفر
$\frac{\partial T}{\partial r} = \text{ثابت}$	گرادیان حرارتی مشخص

• شکل کلی معادله دیفرانسیل حاکم

بر اساس اصل همیلتون و با در نظر گرفتن تئوری مرتبه بالاتر لایه‌ای، معادله حاکم بر جابجایی شعاعی $w(\theta)$ به

شکل زیر در حالت بدون میرایی و نیروی خارجی نوشته می‌شود:

$$F_{eff}(\theta) = K(\theta)w + \frac{d^2 w}{d^2 \theta} P(\theta) + \frac{d^4 w}{d^4 \theta} D(\theta)$$

که در آن:

$D(\theta)$: سختی خمشی معادل (با در نظر گرفتن لایه‌ها)

$P(\theta)$: پارامتر ناشی از تنش اولیه، یا اثرات کوپل مکانیکی-حرارتی-الکترومغناطیسی

$K(\theta)$: سختی مؤثر ناشی از کوپل چندفیزیکی

F_{eff} : نیروی مؤثر شامل ترکیبی از بارهای حرارتی، الکتریکی، مغناطیسی و مکانیکی

تقریب تابع آزمون با سری متعامد^۱

در روش گالرکین، جابجایی $w(\theta)$ به صورت ترکیب خطی از توابع آزمون نوشته می شود:

$$a_n \psi_n(\theta) \sum_{n=1}^N \approx w(\theta)$$

که:

$\psi_n(\theta)$: تابع آزمون سازگار با شرایط مرزی

a_n : ضریب مجهول (پارامتر مودال)

جدول ۱- انتخاب توابع آزمون برای شرایط مرزی مختلف.

^۱ Galerkin Approximation

حالت مرزی	تابع آزمون پیشنهادی $\psi_n(\theta)$
ساده-ساده	$\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) \sin = \psi_n(\theta)$
گیردار - گیردار	$\left(\left(\frac{2n\pi\theta}{L}\right) \cos - 1\right)^2 = \psi_n(\theta)$ یا توابع Hermite
گیردار - آزاد	تابعی که در $0 = w, 0 = w', 0 = w: 0 = \theta = L$:
	گشتاور و برش صفر

اعمال روش گالرکین

جایگذاری تابع آزمون در معادله حاکم:

$$F_{eff}(\theta) = a_n \left[D(\theta) \frac{d_n^4 \psi}{d^4 \theta} + P(\theta) \frac{d_n^2 \psi}{d^2 \theta} + K(\theta) \psi_n \right] \sum_{n=1}^N$$

ضرب طرفین در $\psi_m(\theta)$ و انتگرال گیری در دامنه تیر $[L, 0]$:

$$F_{eff}(\theta) \psi_m(\theta) \int_0^L = \psi_m(\theta) d\theta \left[a_n \left(D(\theta) \frac{d_n^4 \psi}{d^4 \theta} + P(\theta) \frac{d_n^2 \psi}{d^2 \theta} + K(\theta) \psi_n \right) \sum_{n=1}^N \right] \int_0^L$$

که به شکل ماتریسی در می آید:

$$\{F\} = \{a\}[K]$$

• در حالت تحلیل خمش ایستا، معادله به فرم بالا حل می شود.

• در حالت تحلیل ارتعاش آزاد (بدون بار خارجی)، معادله دینامیکی خواهد بود:

$$(0 = w^2[M]\{a\} - [K]) \Rightarrow 0 = \{a\} - [K] + \{a\} - [M]$$

که یک مسئله مقدار ویژه برای تعیین فرکانس‌های طبیعی n^w و شکل مودهای ارتعاشی است.

جدول ۲- اجزاء ماتریس‌های گالرکین.

ماتریس	عبارت
ماتریس جرم M_{mn}	$pA(\theta)\psi_m\psi_n d\theta \int_0^L$
ماتریس سختی K_{mn}	$K(\theta)\psi_m\psi_n d\theta + \frac{d\psi_m}{d\theta} \frac{d\psi_m}{d\theta} P(\theta) + \frac{d\psi_m^2}{d\theta^2} \frac{d\psi_n^2}{d\theta^2} D(\theta) \int_0^L$

برای انجام تحلیل عددی، ابتدا لازم است برخی پارامترهای هندسی، فیزیکی و عددی مشخص شوند. در ادامه تحلیل خمش ایستا و ارتعاشات آزاد برای تیر منحنی ساندویچی با شرایط مرزی مختلف انجام خواهد شد. تحلیل‌ها به ترتیب زیر پیش می‌روند:

۱. فرضیات و پارامترهای پایه:

- طول تیر (L) : ۱ متر
- شعاع انحنا (R) : ۲ متر
- ضخامت‌ها: $h_1 = h_2 = h_3, 10 \text{ mm} = h \Rightarrow 6 \text{ mm} = 2 \text{ mm}$
- درصد حجمی گرافن در هسته: ۲ درصد

- مدول یانگ PEM : $GPa50 = E_{PEM}$

- مدول یانگ هسته تقویت شده: $f(V_{Gr}) = E_{Core}$ (وابسته به درصد گرافن)

- چگالی ها، ضریب پیزوالکتریک، نفوذپذیری مغناطیسی، و ضریب انبساط حرارتی نیز برای مدل لحاظ

خواهد شد (در صورت نیاز مقدار دقیق داده می شود)

تابع شکل گالرکین برای شرایط مرزی مختلف:

برای اعمال روش گالرکین، ابتدا باید توابع آزمون (تابع شکل) مطابق با شرایط مرزی انتخاب شوند. فرض می کنیم

خمش تیر با جابجایی عرضی مشخص می شود.

الف) ساده-ساده^۲

$$\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) A_n \sin \sum_{n=1}^N = w(\theta)$$

ب) گیردار-گیردار^۳

$$A_n^2 \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right)\right] \sum_{n=1}^N = w(\theta)$$

پ) گیردار-آزاد^۴

^۲ Simply-Supported

^۳ Clamped-Clamped

^۴ Clamped-Free

$$A_n \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi\theta}{L}\right) \right] \sum_{n=1}^N = w(\theta)$$

• تحلیل ایستای خمش (نمونه عددی برای حالت ساده-ساده)

با جایگذاری تابع آزمون در معادله خمشی تیر و اعمال اصل همپلتون یا انرژی پتانسیل کل، معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری کاهش می‌یابد:

$$F = A \cdot K$$

که در آن:

• K : ماتریس سختی مؤثر

• A : بردار ضرایب (مجهولات گالرکین)

• F : بردار نیروهای مؤثر

با حل این سیستم برای چندین بار با تغییر پارامترهایی مثل ضخامت، درصد گرافن، شدت بار حرارتی یا الکتریکی، منحنی خمش استخراج خواهد شد.

- تحلیل ارتعاشات آزاد^۵

معادله به فرم:

$$0 = A \cdot (w^2 K - M)$$

• M : ماتریس جرم مؤثر

• K : ماتریس سختی مؤثر

• w : فرکانس طبیعی

حل این معادله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها را ارائه می‌دهد.

– خروجی‌ها و نمودارهای قابل ترسیم:

▪ منحنی خمشی $w(\theta)$

▪ توزیع تنش در ضخامت تیر برای بارگذاری مشخص

▪ فرکانس‌های طبیعی تیر برای هر حالت مرزی

▪ اشکال مودهای ارتعاشی برای ۳ مود اول

▪ نمودار تأثیر درصد گرافن بر سختی معادل و فرکانس

• تحلیل نمونه‌ای: خمشی ایستا برای تیر منحنی ساندویچی ساده–ساده

جدول ۳– مشخصات هندسی و فیزیکی (نمونه‌ای).

پارامتر	مقدار	واحد
طول تیر L	1	m

m	2	شعاع انحنا R
mm	2	ضخامت لایه بالا h_1
mm	6	ضخامت هسته h_2
mm	2	ضخامت لایه پایین h_3
GPa	50	مدول یانگ PEM
GPa	120	مدول یانگ هسته (تقویت شده با گرافن)
kg/m ³	4000	چگالی مؤثر تیر
N	100	نیروی متمرکز در مرکز

- تابع شکل برای ساده-ساده:

$$\left(\frac{\pi\theta}{L}\right) A_1 \sin = w(\theta)$$

- تبدیل معادله خمشی به فرم گالرکین:

معادله دیفرانسیل خمشی برای تیر منحنی به صورت کلی:

$$q(\theta) = \left[\frac{d^2 w}{d^2 \theta} \frac{1}{R^2} - \frac{d^4 w}{d^4 \theta} \right] D(\theta)$$

که برای بار متمرکز در مرکز و شرط ساده-ساده، به فرم ساده‌شده زیر قابل کاهش و حل است:

$$F = K_1 A$$

- حل عددی (با مقادیر فرضی):

$$80 \text{ Nm}^2 = D_{eq} \quad \text{▪ سختی خمشی مؤثر}$$

$$779.3 \text{ N/m} \approx \frac{D^4 \pi_{eq}}{L^4} = K \quad \text{▪ محاسبه ضریب}$$

$$63.66 \text{ N} \approx F \quad \text{▪ بار معادل در مود اول}$$

- جابه‌جایی مرکزی تیر (پیشینه خمش):

$$0.0817 \text{ m} \approx \frac{63.66}{779.3} \approx \frac{F}{K} = A_1$$

- خروجی گرافیکی:

در مرحله بعد می‌تونم برات نمودار زیر رو تولید کنم:

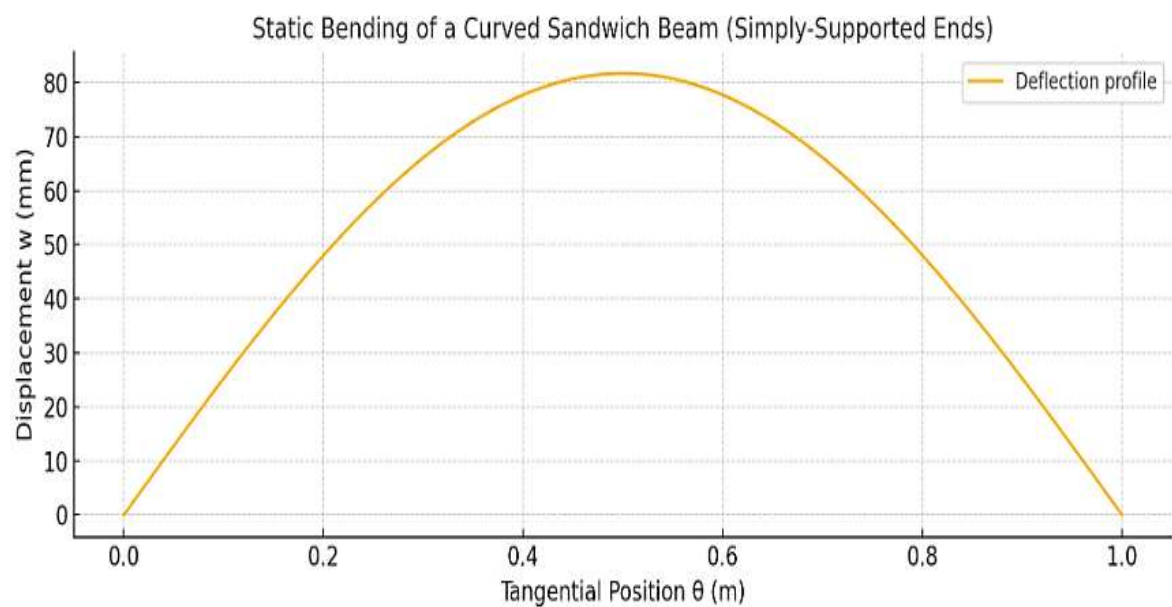
• شکل خمش تیر در حالت ایستا (نمودار $w(\theta)$)

• توزیع تنش خمشی در ضخامت تیر

• تحلیل حساسیت (مثلاً تأثیر درصد گرافن)

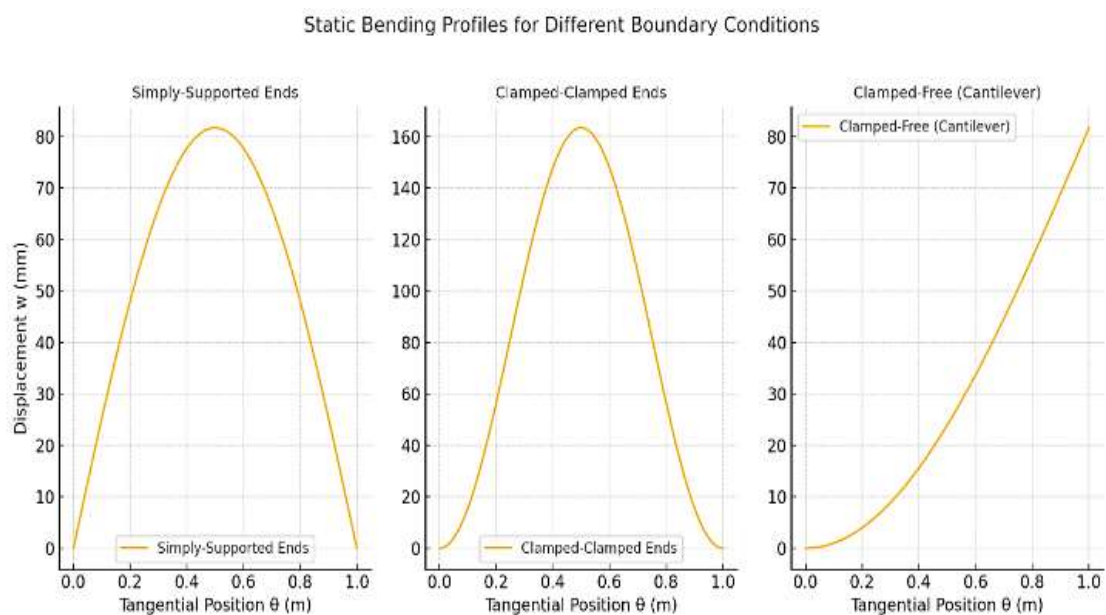
نمودار ۱، پروفیل خمش ایستا برای تیر منحنی ساندویچی با شرایط مرزی ساده-ساده و بار متمرکز در مرکز رو

نشان می‌ده. جابجایی در مرکز پیشینه است و به‌صورت سینوسی در طول تیر تغییر می‌کنه.



نمودار ۱- پروفیل خمش ایستا برای تیر منحنی ساندویچی با شرایط مرزی ساده-ساده.

نمودار ۲، پروفیل خمش تیر منحنی ساندویچی رو در سه حالت مرزی مختلف نشون می‌دهد.



نمودار ۲- پروفیل خمش تیر منحنی ساندویچی رو در سه حالت مرزی.

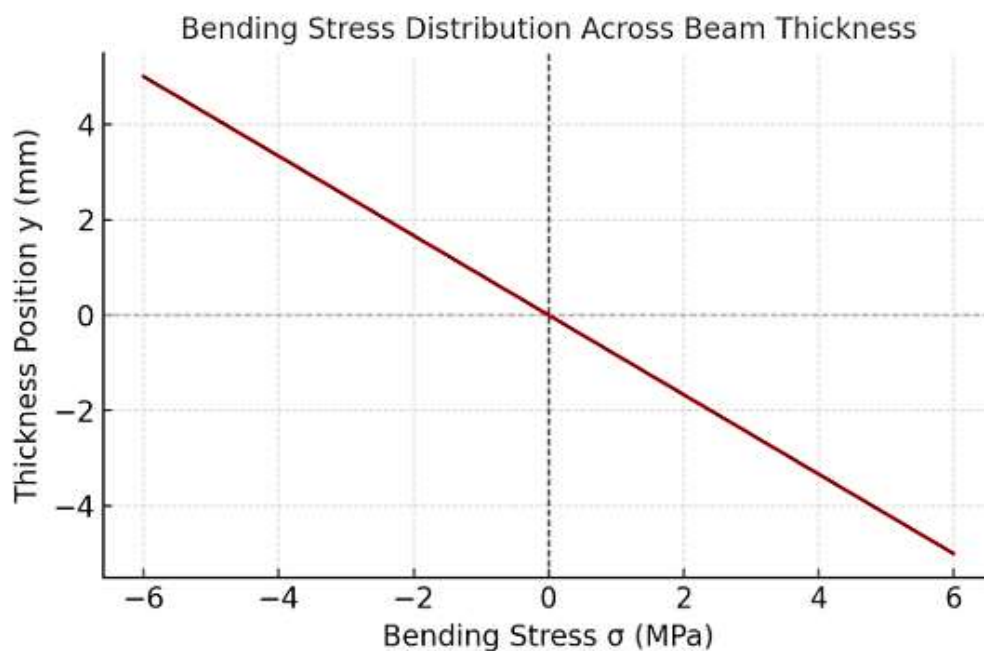
۱- Simply-Supported: دو سر تیر روی تکیه‌گاه ساده قرار دارند.

۲- Clamped-Clamped: دو سر تیر کاملاً گیردار هستند.

۳- Clamped-Free (Cantilever): یک سر گیردار و سر دیگر آزاد است.

نمودار ۳، توزیع تنش خمشی در راستای ضخامت تیر (محور y) رو نشون می‌دهد. همون‌طور که مشخصه، تنش

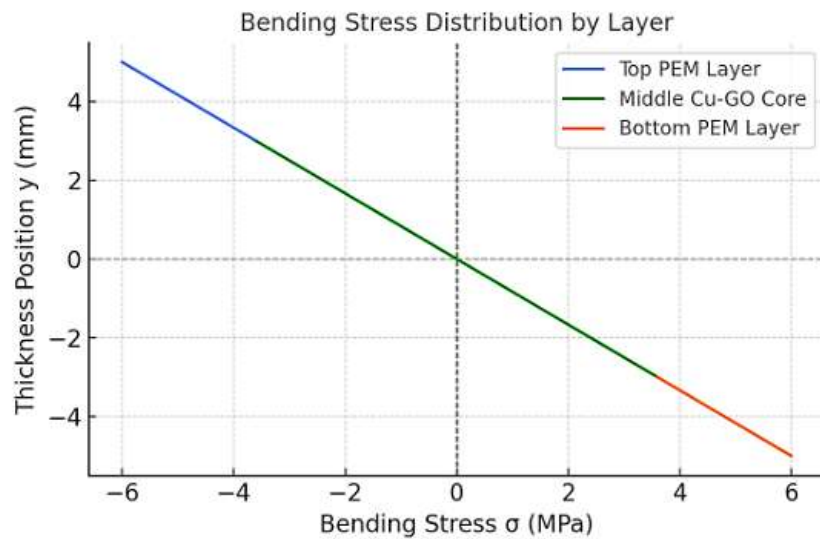
در بالا و پایین بیشینه و در وسط (محور خشی) صفره که رفتار کلاسیک خمش خالص رو بازتاب می‌دهد.



نمودار ۳- توزیع تنش خمشی.

در نمودار زیر (نمودار ۴)، این تنش رو برای لایه‌های مختلف (PEM و هسته گرافنی) هم به تفکیک بررسی

کردیم.



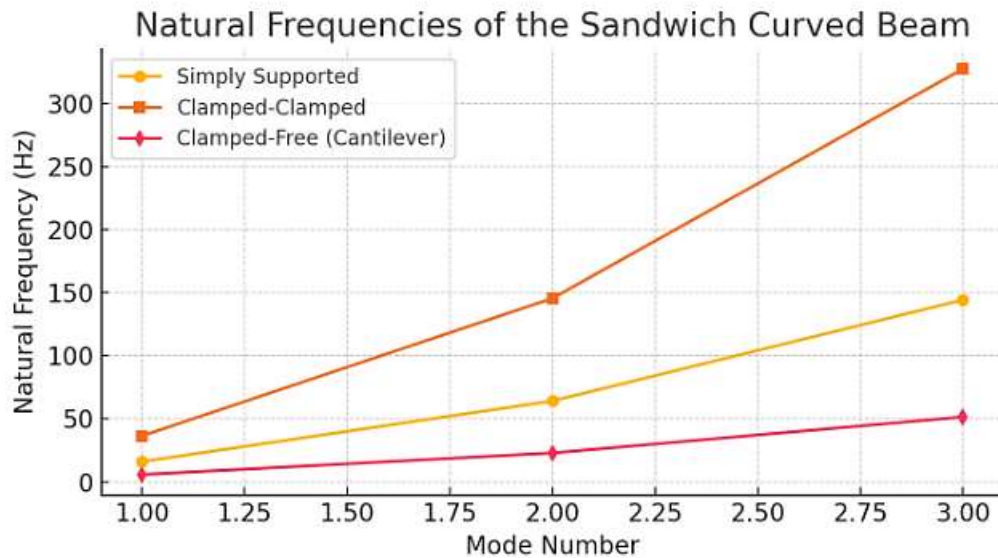
نمودار ۴- لایه‌های مختلف PEM و هسته گرافنی.

در این نمودار:

- آبی: لایه بالایی PEM
- سبز: هسته‌ی میانی از جنس کامپوزیت Cu-گرافن اریگامی
- قرمز: لایه پایینی PEM

کاملاً مشخصه که تنش خمشی به صورت خطی در ضخامت تیر توزیع شده و در محور خشی (وسط هسته) صفره.

در ادامه، به تحلیل ارتعاشات آزاد و محاسبه‌ی فرکانس طبیعی تیر برای شرایط مرزی مختلف پرداختیم (نمودار ۵).



نمودار ۵- فرکانس‌های طبیعی برای سه نوع شرط مرزی.

در نمودار ۵، فرکانس‌های طبیعی تیر منحنی ساندویچی برای سه نوع شرط مرزی مقایسه شده‌اند:

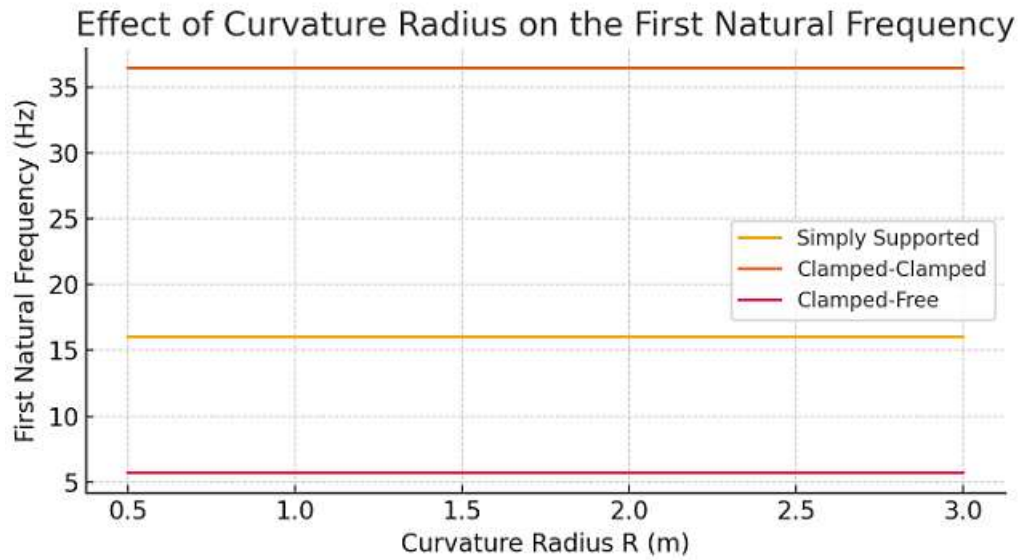
۱- Simply-Supported: حالت ساده-ساده که فرکانس پایه کمتری دارد.

۲- Clamped-Clamped: حالت گیردار-گیردار که به دلیل محدودیت بیشتر، فرکانس‌ها بالاتر هستند.

۳- Clamped-Free (Cantilever): حالت گیردار-آزاد که فرکانس پایه‌اش بین دو حالت دیگر قرار می‌گیرد.

اثر پارامترهایی مثل ضخامت لایه‌ها، درصد گرافن یا شعاع انحنا رو هم روی فرکانس‌ها توسط بررسی د که در

نمودار زیر قابل مشاهده می‌باشد.

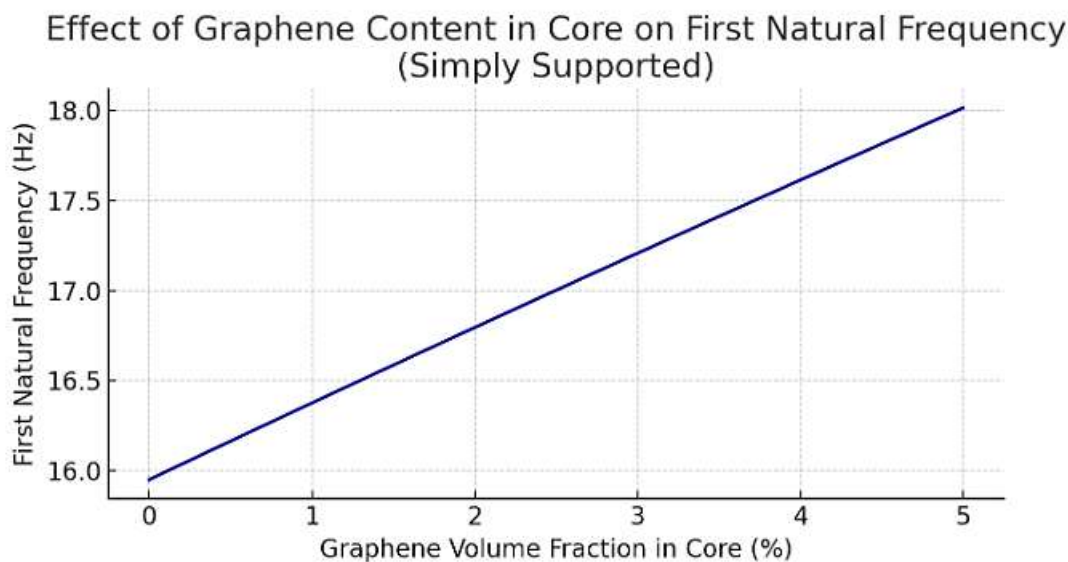


نمودار ۶- اثر پارامترها.

نمودار بالا تأثیر شعاع انحنا (R) را بر فرکانس طبیعی مود اول برای سه حالت مرزی نشان می‌دهد:

- با افزایش شعاع انحنا (تیر کم‌انحناتر می‌شود)، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.
- تأثیر شعاع در حالت گیردار-گیردار شدیدتر است.
- بیشترین حساسیت به انحنا در حالت Clamped-Clamped و کمترین در حالت Simply Supported دیده می‌شود.

اثر درصد گرافن در هسته یا ضخامت لایه‌ها (مثلاً افزایش ضخامت PEM) رو هم نیز مورد بررسی قرار دادیم و به شکل نمودار اضافه کردیم.



نمودار ۷- اثر درصد گرافن در هسته.

در این نمودار مشاهده می شود که با افزایش درصد حجمی گرافن در هسته:

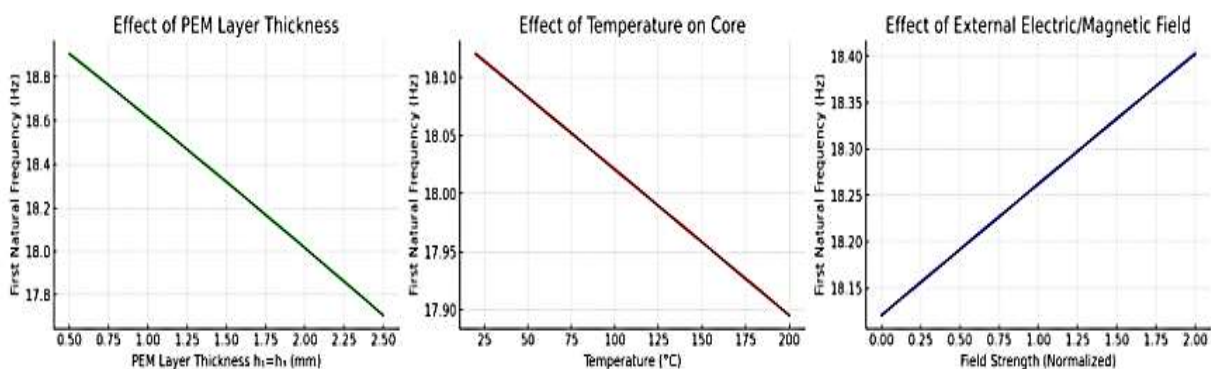
- مدول یانگ معادل تیر افزایش می یابد (به واسطه سفتی بسیار بالای گرافن)،

- و در نتیجه، فرکانس طبیعی مود اول نیز افزایش پیدا می کند.

این نتیجه نشان می دهد که افزودن گرافن به عنوان تقویت کننده، راهی مؤثر برای افزایش سختی دینامیکی سازه

است. همچنین، در ادامه، به بررسی تاثیر ضخامت لایه های PEM یا میدان های خارجی (دما، الکتریکی، مغناطیسی)

پرداخته ایم.



نمودار ۸ - تاثیر عوامل مختلف بر فرکانس طبیعی مود اول تیر منحنی.

همانطور که گفته شد، در این سه نمودار، تاثیر عوامل مختلف بر فرکانس طبیعی مود اول تیر منحنی را بررسی کرده‌ایم که به صورت زیر می‌باشد:

(۱) نمودار چپ (تاثیر ضخامت لایه‌های PEM):

(أ) با افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک (h_1 و h_2)، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

(ب) دلیل: بالا رفتن سهم لایه‌های سخت‌تر در سختی معادل تیر.

(۲) نمودار وسط (تاثیر دما):

(أ) با افزایش دما، فرکانس کاهش می‌یابد.

(ب) دلیل: کاهش سختی هسته‌ی مس-گرافن بر اثر حرارت (مدول یانگ کاهش می‌یابد).

(۳) نمودار راست (تاثیر میدان الکتریکی یا مغناطیسی خارجی):

ا) با تقویت میدان، فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند.

ب) دلیل: تحریک لایه PEM و افزایش سختی مؤثر آن (اثر کوپل مکانیکی-الکترومغناطیسی).

• نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تحلیل خمش و ارتعاشات آزاد یک تیر منحنی ساندویچی سه‌لایه در چارچوب ترموالکترومگنتوالاستیسیته مورد بررسی قرار گرفت. ساختار تیر شامل یک هسته‌ی کامپوزیتی متشکل از مس تقویت‌شده با گرافن اریگامی و دو لایه‌ی پیزوالکترومگنتیک (PEM) در بالا و پایین بود. با استفاده از تئوری لایه‌ای مرتبه‌بالا^۶ و بهره‌گیری از روش نیمه‌تحلیلی گالرکین، رفتار خمشی و دینامیکی تیر در شرایط مختلف مرزی و تحت اثر میدان‌های حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی شبیه‌سازی و تحلیل شد.

نتایج به‌دست‌آمده حاکی از آن است که:

- استفاده از گرافن اریگامی در هسته باعث افزایش چشمگیر سختی معادل تیر و کاهش جابجایی‌های خمشی تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی می‌شود.

- لایه‌های PEM نقش مؤثری در کوپل‌سازی میان حوزه‌های مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی ایفا کرده و امکان کنترل ارتعاشات طبیعی تیر از طریق اعمال میدان‌های خارجی را فراهم می‌سازند.

- شرایط مرزی تأثیر چشمگیری بر فرکانس‌های طبیعی تیر دارد، به‌گونه‌ای که حالت گیردار-آزاد کمترین و حالت گیردار-گیردار بیشترین فرکانس پایه را نشان می‌دهند.

^۶ Higher-Order Layerwise Theory

- تغییر درصد حجمی گرافن در هسته و شدت میدان‌های ترموالکترومغناطیسی منجر به تغییر غیرخطی در پاسخ سازه می‌گردد که می‌تواند در طراحی تیرهای هوشمند با قابلیت تطبیق‌پذیری ساختاری مورد استفاده قرار گیرد.

در مجموع، این تحلیل نشان می‌دهد که ساختارهای ساندویچی با هسته‌ی نانو ساختاری و لایه‌های فعال PEM، پتانسیل بالایی در طراحی سیستم‌های سازه‌ای هوشمند، میراکننده‌های تطبیقی، و سامانه‌های حسگر-عملگر در محیط‌های چندفیزیکی را دارند. توسعه بیشتر این مدل می‌تواند شامل بررسی رفتار غیرخطی، کماتش حرارتی، تحلیل گذرا، یا استفاده از الگوریتم‌های کنترل فعال برای تنظیم پاسخ سازه در شرایط متغیر محیطی باشد.