



Mass Transfer_Lecture_06

ضرایب انتقال جرم

مدرس: علیرضا همّتی

Alireza_hemmati@iust.ac.ir

1



ضرایب انتقال جرم

همانطور که در فصل قبل اشاره گردید، برای محاسبه شار انتقال جرم نیاز به ضرایب انتقال جرم داریم.

روش هایی برای بدست آوردن ضرایب انتقال جرم وجود دارند که عبارتند از:

- روش اول: استفاده از معادلات اساسی جرم، مومنتوم و پیوستگی
- روش دوم: استفاده از تشابه انتقال جرم با دیگر پدیده های انتقال
- روش سوم: محاسبه ضرایب انتقال جرم به کمک تئوری های انتقال جرم

2



ضرایب انتقال جرم

➤ روش اول: حل معادلات اساسی جرم، مومنتوم و پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = 0 \quad (\text{if } \rho = \text{cte} \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{V} = 0)$$

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \nu \nabla^2 \vec{V} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g}$$

معادله اساسی مومنتوم

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C_A = D_{AB} \nabla^2 C_A + R_A$$

معادله اساسی جرم

3



ضرایب انتقال جرم

در بررسی هر مسئله ی جا به جایی باید به سوالات زیر پاسخ داد:

- ۱- جریان آزاد (Natural) یا اجباری (Forced)
- ۲- شکل هندسی مسئله

داخلی ←

خارجی ←

}

لوله

صفحه
- ۳- رژیم جریان

}

آرام

آشفته
- ۴- شرایط مرزی

}

دمای دیواره ثابت

شار ثابت

در ادامه به بررسی مسائل مختلف می پردازیم و اولین کار جواب دادن به سوالات فوق است.

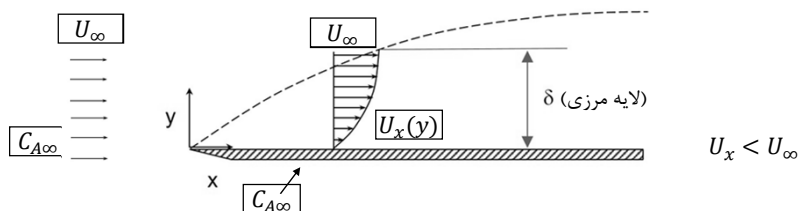
4



ضرایب انتقال جرم

یکی از مثال هایی که می توان با استفاده از معادلات بقاء ضریب انتقال جرم را تعیین کرد، حرکت سیال بر روی صفحه افقی است.

Forced Convection



➤ از لحاظ سیالاتی:

سیال وقتی به صفحه برخورد میکند، سرعتش به صفر رسیده و باعث تغییرات سرعتی در لایه های بعدی نیز می شود. در نتیجه روی صفحه یک لایه مرزی تشکیل شده که فقط سرعت در داخل این لایه متغییر است.

5



ضرایب انتقال جرم

اهمیت لایه مرزی در محاسبه ضریب انتقال جرم:

- تئوری لایه مرزی در سال ۱۹۰۴ توسط پرناتل ارائه شد. اثرات اصطکاکی فقط در ناحیه ای نزدیک به مرز جسم جامد وجود دارند؛ این ناحیه همان **لایه مرزی** است. ضخامت **لایه مرزی** را فاصله ای تعریف می کند که در آن گردایان سرعت وجود دارد.
- اگر انتقال جرم محدود به لایه آرام باشد نفوذ ملکولی انتقال جرم را کنترل می کند و شدت انتقال جرم از روابط فصل قبل قابل محاسبه می باشد. در قسمت متلاطم انتقال جرم بسیار سریع و گردایان غلظت به مراتب کوچکتر از قسمت آرام می باشد و عامل کنترل کننده انتقال جرم، نفوذ گردابه ای یا جابجایی است.

6

ضرایب انتقال جرم

➤ از لحاظ جرمی:

فرض: $C_{Aw} > C_{A\infty}$

شکل لایه مرزی در زمانی که انتقال جرم از سیال به دیواره داریم

شکل لایه مرزی در زمان انتقال از دیواره به سیال

- با توجه به فرض در نظر گرفته شده، انتقال جرم از دیواره به سیال است زیرا: $C_{Aw} > C_{A\infty}$

7

ضرایب انتقال جرم

در شرایط پایا برای معادلات مومنوم و جرم خواهیم داشت:

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

مومنوم

$$V_x \frac{\partial C_A}{\partial x} + V_y \frac{\partial C_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2}$$

جرم

- اگر $Pe \gg 1$ باشد، از نفوذ در برابر جابجایی در راستای حرکت صرف نظر می شود.
- معادله مومنوم یک معادله برداری است و می توان آن را به ۳ صورت نوشت.

8



ضرایب انتقال جرم

- بنابراین نیاز نیست که معادلات فوق را حل نموده، بلکه کافیسیت آن ها را بی بعد نموده تا بتوان معادلات جابجایی را بر حسب اعداد بی بعد بدست آمده تحلیل نمود.

سرعت بی بعد	طول بی بعد	
$\begin{cases} \bar{V}_x = \frac{V_x}{U_\infty} \\ \bar{V}_y = \frac{V_y}{U_\infty} \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x}{L} \\ \bar{y} = \frac{y}{L} \end{cases}$	$\begin{cases} \bar{C}_A = \frac{C_A - C_{Aw}}{C_{A\infty} - C_{Aw}} & \text{غلظت بی بعد} \\ \bar{P} = \frac{P}{\rho U_\infty^2} & \text{فشار بی بعد} \end{cases}$

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}} \quad Re = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad Pe = Re.Sc \quad Sh = \frac{k_L L}{D_{AB}}$$

9



ضرایب انتقال جرم

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} = \underbrace{\frac{1}{U_\infty L}}_{\frac{\nu}{Re}} \cdot \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} \quad \text{مومنتم}$$

$$\bar{V}_x \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial \bar{y}} = \underbrace{\frac{1}{U_\infty L}}_{\frac{\nu}{Re}} \cdot \underbrace{\frac{\nu}{D_{AB}}}_{Sc} \frac{\partial^2 \bar{C}_A}{\partial \bar{y}^2} \quad \text{جرم}$$

10

ضرایب انتقال جرم

نکته

✓ در لایه زیرین که سیال به سطح جامد چسبیده است، به علت شرط عدم لغزش، سرعت صفر است.

انتقال جرم با مکانیزم نفوذ انجام می شود $\rightarrow V=0 \rightarrow$ no slip condition

11

ضرایب انتقال جرم

$$N_A = k'_c (C_{Aw} - C_{A\infty})$$

$$N_A = -D_{AB} \left. \frac{dC_A}{dy} \right|_{y=0}$$
$$k'_c = \frac{-D_{AB} \left. \frac{dC_A}{dy} \right|_{y=0}}{C_{Aw} - C_{A\infty}}$$

12



ضرایب انتقال جرم

برای بی بعد کردن k' خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_A = \frac{C_A - C_{Aw}}{C_{A\infty} - C_{Aw}} \\ \bar{y} = \frac{y}{L} \end{array} \right. \rightarrow k'_c = \frac{-D_{AB} \frac{(C_{A\infty} - C_{Aw}) \partial \bar{C}_A}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}}{C_{Aw} - C_{A\infty}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{k'_c L}{D_{AB}}}_{Sh} = \frac{\partial \bar{C}_A}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}$$

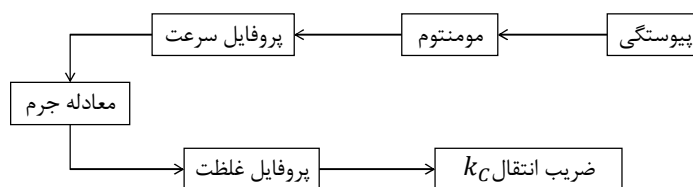
13



ضرایب انتقال جرم

اگر بخواهیم ضریب انتقال جرم را حساب کنیم باید پروفایل غلظت را حساب کنیم و برای بدست آوردن پروفایل غلظت باید دیفرانسیل پروفایل غلظت را حساب کرده که این کار مستلزم حل پروفایل سرعت است. جهت گیری کلی به فرم زیر خواهد بود:

نتیجه ۱:



14

ضرایب انتقال جرم



نتیجه ۲:

$$Sh = \frac{k'_C L}{D_{AB}}$$

• ضریب انتقال جرم در عدد Sh نهفته است همانطور که h ضریب انتقال حرارت که در Nu نهفته است.

$Sh = f(\bar{C}_A)$
 $\bar{C}_A = f(Sc, Re, \bar{x})$

طبق معادله k'_C
 طبق معادله بیلان جرم

$\Rightarrow \begin{cases} Sh_x = f(Re, Sc, \bar{x}) \\ \overline{Sh} = f(Re_L, Sc) \end{cases}$

در جریان اجباری

15

Sherwood Number



عدد بدون بعد شرود به صورت زیر تعریف می شود:

$$Sh = \frac{k'_C L}{D_{AB}} \xrightarrow{F=k'_C C} Sh = \frac{FL}{CD_{AB}}$$

✓ که در اینجا F ضریب انتقال جرم عمومی و L طول مشخصه (طول منطبق بر مسیر جریان) است.

✓ برای صفحه، طول مشخصه L (مسیر منطبق بر جریان)، برای لوله D (قطر لوله) و برای کره نیز قطر کره خواهد بود.

$L = \frac{\text{حجم}}{\text{سطح در معرض انتقال جرم}}$

طول مشخصه

16



Sherwood Number

عدد بدون بعد شروود همان نقشی را در جرم ایفا میکند که در حرارت این نقش بر عهده Nu (ناسلت) است.

$$Nu = \frac{hL}{k}$$

که h ضریب انتقال حرارت جابجایی سیال و k ضریب انتقال حرارت هدایتی سیال می باشند.

✓ اگر ارتباط بین F را با دیگر ضرایب انتقال جرم (فصل گذشته) بدست آوریم، می توانیم رابطه ی عدد Sh را بر حسب دیگر ضرایب انتقال جرم مانند مثال بررسی شده بدست آوریم. برای مثال عدد Sh را برای محلول های رقیق به صورت زیر می توان نوشت:

$$F = k_L C_{Bm} \xrightarrow{C_{Bm} \square C \text{ در محلول های رقیق}} F = k_L C$$

$$Sh = \frac{k_L CL}{CD_{AB}} \Rightarrow Sh = \frac{k_L L}{D_{AB}}$$

17



Sherwood Number

$$\underbrace{\frac{Sh_x}{\frac{F_x}{CD_{AB}}}}_{= \frac{k'_c x}{D_{AB}}} = 0.0296 \underbrace{\frac{Re}{\frac{U_{\infty} x}{\nu}}}_{= \frac{U_{\infty} x}{\nu}}^{0.8} \underbrace{\frac{Sc}{\frac{\nu}{D_{AB}}}}_{= \frac{\nu}{D_{AB}}}^{1/3} \Rightarrow Sh \sim x^{0.8}$$

در جریان درهم صفحه:

$$\rightarrow k'_c \square x^{-0.2} \rightarrow k'_c = \beta x^{-0.2} \quad \xrightarrow{\bar{k}'_c = \frac{\int_0^L k'_c dx}{\int_0^L dx}}$$

$$\bar{k}'_c = \frac{\int_0^L k'_c dx}{\int_0^L dx} = \frac{\int_0^L \beta x^{-0.2} dx}{\int_0^L dx} \rightarrow \bar{k}'_c = \frac{1}{0.8} \beta L^{-0.2}$$

$$\Rightarrow \bar{k}'_c = \frac{1}{0.8} k'_c|_{x=L} \Rightarrow \begin{cases} \bar{k}'_c = \frac{5}{4} k'_{cL} \\ \bar{Sh} = \frac{5}{4} Sh_L \end{cases}$$

18

Sherwood Number



در حالت کلی خواهیم داشت:

$$Sh, Nu \propto x^n \rightarrow \begin{cases} \bar{k} = \frac{1}{n} k_{x=L} \\ \bar{h} = \frac{1}{n} h_{x=L} \\ \overline{Sh} = \frac{1}{n} Sh_{x=L} \\ \overline{Nu} = \frac{1}{n} Nu_{x=L} \end{cases}$$

نتیجه:

برای محاسبه avg نیاز به انتگرال گیری نیست و فقط کافیت توان X در معادله را برعکس کرده و در $Sh_{x=L}$ ضرب شود.

19

Sherwood Number



امتیازی

اگر عدد شروود به صورت زیر تعریف شده باشد، ضریب انتقال جرم k متناسب است با:

$$Sh = \alpha (Re Sc)^{1/3}$$

$D^{1/2}$ (4
 $D^{2/3}$ (3
 D (2
 D^3 (1

20



Sherwood Number

21



Schmidt Number

نسبت سرعت انتقال مومنوم به سرعت انتقال جرم را **عدد بی بعد اشمیت** می نامند.

$$Sc = \frac{v}{D_{AB}} = \frac{\mu}{\rho D_{AB}}$$

✓ μ و ρ ، مربوط به محلول است و اگر محلول رقیق باشد می توان از μ و ρ محیط نفوذ استفاده کرد.

✓ با توجه به رابطه فوق می توان گفت که عدد اشمیت مربوط به خواص فیزیکی سیال است.

✓ از آنجایی که دما بر روی خواص فیزیکی سیال تاثیر دارد، بنابراین مقدار Sc نیز به دما وابسته است.

✓ عدد Sc در انتقال جرم همان نقشی را دارد که عدد Pr در انتقال حرارت دارد.

$$Pr = \frac{v}{\alpha}$$

22

Schmidt Number



عدد/اشمیت در گازها

✓ عدد اشمیت در گازها بین ۰.۵ تا ۲ می باشد و حدودا ۱ در نظر گرفته می شود.

$$Sc \approx \frac{0.01 \times 10^{-3} [\text{Pa.s}]}{1 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \times 10^{-5} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]} \approx 1$$

✓ تغییرات با دما در گازها

$$\begin{cases} \mu \propto \sqrt{T} \\ \rho \propto \frac{1}{T} \\ D_{AB} \propto T^{3/2} \\ Sc \propto T \end{cases} \rightarrow Sc \propto \frac{T^{3/2}}{T^{3/2}} \approx 1$$

✓ بنابراین اثر دما بر عدد اشمیت در گازها ناچیز بوده و قابل نظر است. مثلا اگر دمای گازی را ۲ برابر کنیم، دانستیه گاز نصف شده و ویسکوزیته آن $\sqrt{2}$ شده ولی Sc هیچ تغییری نمیکند.

✓ برای مخلوط های دو جزئی گازی مقدار Sc می تواند به ۵ هم برسد.

23

Schmidt Number



عدد/اشمیت در مایعات

✓ عدد اشمیت برای مایعات همواره از مرتبه ۱۰۰۰ است و تا بالاتر از ۱۰۰۰۰ نیز مشاهده شده است.

$$Sc \approx \frac{1 \times 10^{-3} [\text{Pa.s}]}{10^3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \times 10^{-9} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]} \approx 1000$$

✓ عدد Sc بین ۵ تا ۱۰۰ نشان دهنده غلیظ بودن گاز و یا رقیق بودن مایع است.

✓ در مایعات اثرپذیری اشمیت از μ بیشتر است. یعنی اگر Sc مایعات زیاد بود، می گوییم مایع فوق ویسکوز است، زیرا:

$$Sc_{liq} = \frac{\mu}{\rho D_{AB,liq}} \quad \square \quad \frac{1}{\mu}$$

24



Schmidt Number

تمرین

در یک فرمانتور، O_2 از درون هوا جذب آب می شود. عدد Sc برای جذب O_2 در آب ۲۱۵ است. در صورتی که ویسکوزیته و دانسیته آب و هوا در شرایط مساله برابر باشد با:

$$\mu_{H_2O} = 6.94 \times 10^{-4} \frac{kg}{ms}, \mu_{air} = 0.00173 \frac{kg}{ms}, \rho_{H_2O} = 994 \frac{kg}{m^3}, \rho_{air} = 1.13 \frac{kg}{m^3}$$

ضریب نفوذ O_2 در آب؟

25



Schmidt Number

تمرین

26



Reynolds number

- برای نخستین بار Reynolds با تزریق ماده رنگی به جریان آب در یک لوله شیشه ای پدیده ی جریان های آرام و آشفته را بررسی کرد. وی **عدد بدون بعد Re** تعریف کرد که با آن می توان نوع جریان سیال را مشخص نمود.

$$\text{Reynolds number} = \frac{\text{inertia force}}{\text{viscous force}}$$

- عدد رینولدز را می توان به صورت زیر تعیین کرد:

$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

الف) روی صفحه:

در اینجا L طول مشخصه است.

$$\text{Re} = \frac{\rho UD}{\mu} = \frac{UD}{\nu}$$

ب) درون لوله:

که در آن D قطر لوله است.

27



Peclet Number

عدد بدون بعد پکلت به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Sc}$$

$$\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Sc} \rightarrow \text{Pe} = \left(\frac{\rho UL}{\mu} \right) \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right) = \frac{UL}{D_{AB}}$$

$$\Rightarrow \text{Pe} = \frac{U}{D_{AB}} L$$

- می توان نتیجه گرفت که عدد پکلت عبارت است از نسبت سرعت جریان سیال (U) به سرعت

نفوذ $D_{AB} L$

28



Peclet Number

- عدد پلکت مشخص می کند که چه هنگام می توان از ترم نفوذ در مقابل ترم حرکت توده ای در راستای حرکت سیال صرف نظر کنیم. همانطور که در گفته شد، اگر عدد پلکت بسیار بزرگ باشد، ترم جابجایی بسیار بزرگتر از ترم نفوذ در همان راستا می شود. اما اگر خیلی کوچکتر از یک باشد می توان از ترم جابجایی در مقایسه با ترم نفوذ در راستای حرکت صرف نظر کرد.
- عدد پلکت در انتقال حرارت:

$$Pe = Re \cdot Pr$$