شکار و شکارچی

مدل ساده شده‌ای از یک اکوسیستم بسته مانند جمعیت خرگوش‌ها و روباه‌ها می تواند به صورت زیر باشد.

فرض‌های مدل:

غذا برای خرگوش‌ها همیشه در دسترس است و تغییر فصل نداشته باشیم. خرگوش‌ها به شکل نامحدودی زاد و ولد می‌کنند و نرخ مرگ و میر طبیعی آنها بسیار کمتر از نرخ افزایش جمعیت آنها است و تنها عامل کنترل کنند جمعیت، شکار شدن توسط روباه‌ها است. هیچ شکارچی دیگری نداریم و بیماری مهلکی هم وجود ندارد. از طرف دیگر تنها منبع غذای روباه‌ها شکار خرگوش است و اگر شکار نکنند به سرعت منقرض می شوند. فرض می کنیم همیشه آماده شکار در صورت روبرو شدن با خرگوش هستند و از مرگ و میر آنها ناشی از بیماری چشم پوشی کرده‌ایم و منبع غذایی دیگری هم ندارند.

معادله تحول جمعیت خرگوش‌ها و روباه‌ها به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \alpha r - \beta r f \\ \frac{df}{dt} = \gamma f r - \delta f \end{cases}$$

در اینجا f و r به ترتیب جمعیت روباه‌ها و خرگوش‌ها هستند و ضرایب $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ هم به ترتیب نرخ مرگ و میر روباه‌ها، نرخ زاد و ولد روباه‌ها، نرخ شکار شدن خرگوش‌ها و نرخ زاد و ولد خرگوش‌ها است.

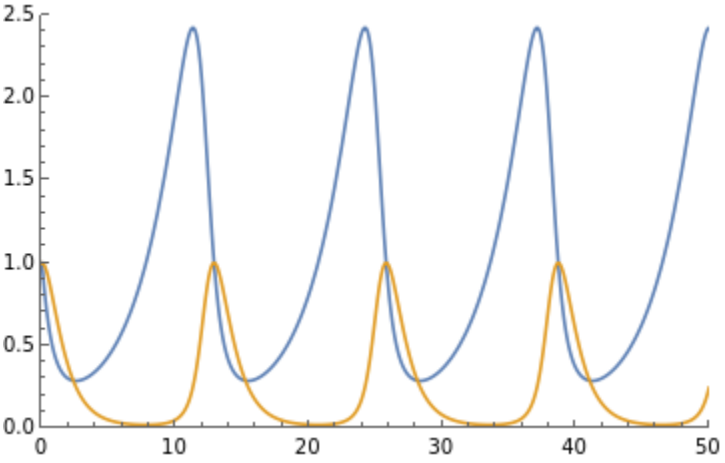
برای مثال از شرایط اولیه و پارامتر های زیر استفاده کنید.

$$r(0) = 1 \qquad f(0) = 1$$
$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3} \quad \gamma = 1, \delta = 1$$

الف) شرایط اولیه را چگونه در نظر بگیریم تا جمعیت خرگوش‌ها و روباه‌ها با زمان تغییر نکنند؟

ب) نشان دهید که روش اویلر برای این معادله جواب درستی نمی‌دهد (اصطلاحا این معادله از نوع *stiff* است).

ج) با استفاده از تابع odeint در scipy که برای حل معادلات دیفرانسیل کاربرد دارد، جواب صحیح (نمودار زیر) را بدست آورید.



از راهنمایی و مثال موجود در لینک زیر استفاده کنید

scipy.integrate.odeint — SciPy v1.7.1 Manual