باسمه تعالی

آقای دکتر مقدادی

تمرینات ریاضیات پیشرفته

۱- مقادیر زیر را حساب کنید:

الف) $\left(\frac{\pm 1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^{6}$ ب) $\left(\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}$ ج) $(-i)^{i}$ د) $(1+i)^{i}$

۲- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $z^2-2z+2=0$ ب) $z^5+32=0$

۳- باتوجه به اینکه $|z_2-z_1|$ فاصله بین دو نقطه z_1 و z_2 است:

الف) نشان دهید معادله $|z-4i|+|z+4i|=10$ نشان دهنده یک بیضی به کانونهای $(0,\pm 4)$ در صفحه xy است.

ب) بیان هندسی معادله $|z-1|=|z+i|$ را بدست آورید.

۴- ابتدا رابطه $1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{(1-z^{n+1})}{(1-z)}$ را اثبات نمایید و سپس با استفاده از آن اتحاد مثلثاتی لاگرانژ را بدست آورید:

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

۵- با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید:

الف) $f(z)=\frac{1}{z}\Rightarrow f'(z)=-\frac{1}{z^2}$

ب) تابع $f(z)=Re(z)$ در هیچ جا مشتق پذیر نیست.

۶- با استفاده از قضیه کوشی-ریمان نشان دهید

الف) توابع مقابل در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیستند. $f_1(z)=\bar{z}\ ,\ f_2(z)=e^{x}e^{-iy}$

ب) تابع $f(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ در تمامی نقاط تعریفش مشتق پذیر بوده و $f'(z)=\frac{1}{2f(z)}$

۷- نشان دهید اگر $f=u+iv$ در ناحیه D تحلیلی و $|f(z)|$ ثابت باشد آنگاه $f(z)$ باید ثابت باشد.

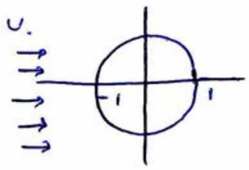
۸- نشان دهید اگر $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ در ناحیه D که شامل مبدأ نمی‌باشد تحلیلی و مشتقات پاره‌ای u و v پیوسته باشند آنگاه u و v معادله لاپلاس به فرم قطبی $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$ را ارضا می‌کنند.

۹- نشان دهید توابع زیر هارمونیک بوده و برای هرکدام مزدوج همساز آنها را بدست آورید.

$u(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ u(x,y)=\sinh x\,\sin y$

۱۰- با استفاده از تبدیلهای واسطه $w_1 = z-1$ ، $w_2 = i\,\frac{1-w_1}{1+w_2}$ و $w = i\,w_2$ نشان دهید تبدیل $w = \frac{z-2}{z}$ داخل دایره واحد $|z-1| \leq 1$ را به نیم صفحه چپ تصویر می کند.

۱۱- با استفاده از نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$ جریان ایدئال حول یک استوانه را حل کنید.



نکته: نگاشت فوق نقاط داخل دایره واحد را به پاره خط $-2 \leq u \leq 2$ و نقاط خارج آن را به دیگر نقاط صفحه تصویر می کند.

۱۲- نشان دهید تبدیل $w = \sin^2 z$ ناحیه $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \geq 0$ را به $v \geq 0$ تبدیل می کند.

۱۳- تصویر ناحیه $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ و $y \geq 0$ تحت تبدیل $w = \frac{i - \sin^2 z}{i + \sin^2 z}$ را پیدا کنید.

باسمه تعالی

تمرینات ریاضی پیشرفته

۱- برای تابع زیر سری فوریه را بدست آورید و از روی آن مقدار سری زیر را حساب کنید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}x+2 & -\pi<x\leq 0 \\ 2 & 0<x<\pi \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=?$$

۲- برای تابع $f(x)=\begin{cases} -x & -1<x<0 \\ 1 & 0<x<1 \end{cases}$ سری فوریه را بدست آورید و ثابت کنید که $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

۳- با استفاده از نمایش انتگرال فوریه نشان دهید:

الف) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x\omega+\omega\sin x\omega}{1+\omega^2}d\omega=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{\pi}{2} & x=0 \\ \pi e^{-x} & x>0 \end{cases}$

ب) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x\omega}{1+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-x}$

۴- معادله حرارت $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$u(0,t)=at \quad , \quad u(l,t)=0 \quad , \quad u(x,0)=f(x)$$

راهنمایی: از تغییر متغیر $u=V(x)+\frac{a(l-x)t}{l}+W(x,t)$ استفاده کنید.

۵- معادله حرارت $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را با شرایط زیر حل کنید.

$$u(0,t)=u_0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=q_0 \quad , \quad u(x,0)=f(x)$$