

مبحث یازدهم: تابع مطلوبیت تک‌شاخصه

اهداف یادگیری

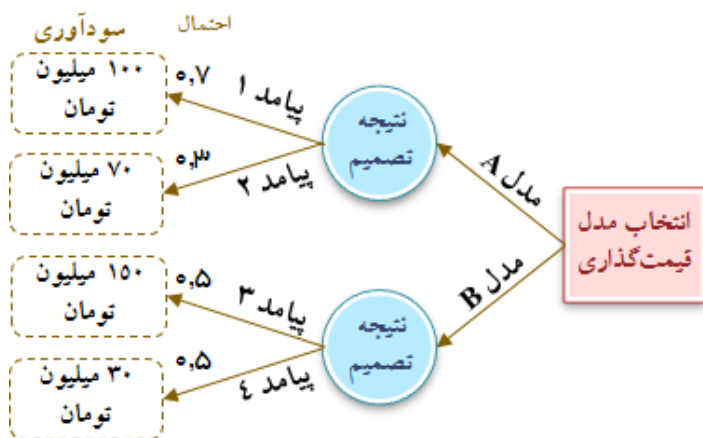
- خواننده پس از مطالعه این مبحث قادر خواهد بود:
- ضمن بیان تفاوت تصمیم‌گیری در شرایط ریسک و عدم قطعیت، تکنیک مناسب تصمیم‌گیری برای هر حالت را تشخیص دهد.
- بر اساس معیار بازده مورد انتظار گزینه‌ها را در شرایط تصمیم‌گیری ریسکی رتبه‌بندی نماید.
- تابع مطلوبیت تصمیم‌گیرنده را برای تصمیمات تک‌شاخصه در شرایط احتمالی تعیین نموده و بر اساس آن میزان ترجیح تصمیم‌گیرنده را برای هر گزینه محاسبه کند.
- مسائل تصمیم در شرایط احتمالی را با استفاده از درخت تصمیم مدل‌سازی کرده و با انجام محاسبات بر روی درخت تصمیم گزینه برتر را تعیین کند.

مقدمه

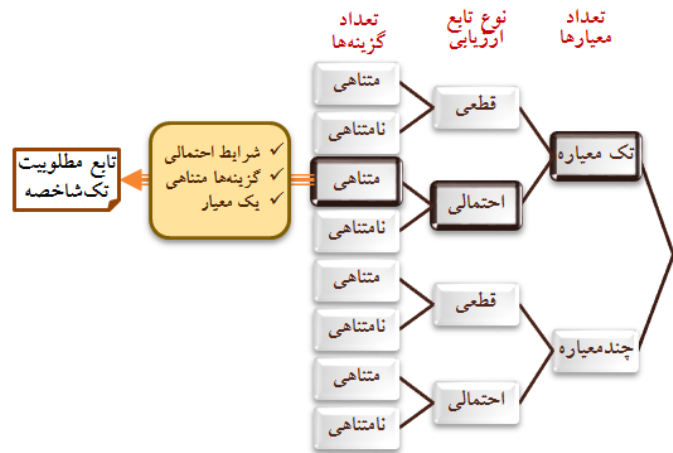
در بسیاری موقعیت‌ها نمی‌توان پیامدهای انتخاب هر گزینه را به قطعیت تعیین نمود، زیرا تصمیم در آینده اجرا می‌شود و نمی‌توان آینده را پیش‌بینی کرد. گرچه در تمام تکنیک‌هایی که در مباحث قبل معرفی شدند، فرض بر قطعی بودن شرایط تصمیم بوده است. با این وجود از این تکنیک‌ها می‌توان در اغلب تصمیمات دنیای واقعی در شرایط عدم قطعیت نیز استفاده کرد، زیرا در بسیاری موارد عدم قطعیت‌ها ناچیز است. همچنین در تصمیماتی که به صورت مکرر و متعدد اتخاذ می‌شوند، آنچه اهمیت دارد برآیند یا میانگین پیامدهاست و می‌توان با در نظر گرفتن میانگین مقادیر احتمالی، از تکنیک‌های تصمیم‌گیری قطعی استفاده کرد. تکنیک‌های تصمیم‌گیری احتمالی دارای پیچیدگی بیشتر است و استفاده از آن‌ها مستلزم دسترسی به دانش، زمان و اطلاعات بیشتری است. در صورت عدم تحقق این الزامات، از تکنیک‌های تصمیم‌گیری قطعی برای تعیین جواب‌های تقریبی یا اولیه می‌توان استفاده کرد. اما اگر درجه عدم قطعیت در پیامدها قابل توجه باشد و عدم توجه به ریسک تصمیمات منجر به تبعات سنگین گردد، باید از تکنیک‌های تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت استفاده کرد. برای تصمیمات مهمی که یکبار یا به

تعداد کم رخ می‌دهد نیز لازم است عدم قطعیت‌ها بر اساس نگرش تصمیم‌گیرنده نسبت به ریسک در نظر گرفته شود.

در شرایط احتمالی، انتخاب هر گزینه می‌تواند پیامدهای مختلف داشته باشد. عدم قطعیت در خروجی معمولاً با استفاده از توزیع احتمال مدل می‌شود. به مثال شرکتی که می‌خواهد برای محصول جدید خود قیمت تعیین کند توجه کنید (شکل ۱): شرکت باید



شکل ۱. یک مسأله تصمیم با پیامدهای احتمالی



شکل ۲. تکنیک‌های احتمالی در دسته‌بندی تکنیک‌های تصمیم

تکنیک زمانی کاربرد دارد که باید از میان چند گزینه یکی انتخاب شود و این انتخاب بر اساس تنها یک شاخص یا معیار انجام می‌شود. چگونگی تصمیم‌گیری در شرایط احتمالی اگر لازم باشد بیش از یک شاخص مورد توجه قرار گیرد، موضوع بحث جلسه بعدی خواهد بود.

مبانی تصمیم‌گیری در شرایط احتمالی

در تصمیمات احتمالی با دو مقوله سروکار داریم: گزینه‌های تصمیم و حالات طبیعت. گزینه‌ها، اقدامات یا راه‌حلهایی هستند که در اختیار داریم و باید یکی از آن‌ها انتخاب شوند. به آن‌ها عوامل تحت کنترل گفته می‌شود. حالات طبیعت یعنی شرایط محیطی و عوامل غیرقابل کنترلی که تعیین کننده پیامد تصمیم است. به عنوان مثال شخصی در نظر دارد مبلغی را سرمایه‌گذاری نماید و یکی از طرح‌های A، B و C را می‌تواند انتخاب کند (گزینه‌های تصمیم). مبلغ سودی که از سرمایه‌گذاری حاصل خواهد شد تابعی است از حالات طبیعت یعنی شرایط

جدول ۱. مقادیر بازده در مثال سرمایه‌گذاری

		حالات طبیعت			احتمال	
		مطلوب	معمولی	نامطلوب		
بازده مورد انتظار	بدترین	بهترین	۰,۳	۰,۴	۰,۳	
طرح A	۱۰۰	۵۵	۳۰	۱۰۰	۰,۳	
طرح B	۹۰	۸۵	۴۰	۷۳	۰,۴	
طرح C	۸۰	۷۰	۶۰	۶۰	۰,۳	

اقتصادی. برای شرایط اقتصادی سه حالت مطلوب، معمولی و نامطلوب متصور است. مقدار سود در هر یک از این حالات و برای هر طرح انتخابی در جدول ۱ آمده است.

گرچه واژه‌های عدم قطعیت و ریسک در بسیاری مواقع معادل هم بکار می‌روند، اما در تئوری تصمیم مفهوم تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت و ریسک متفاوت است. وقتی که وقوع

بیش از یک پیامد برای هر گزینه ممکن، اما احتمال هر پیامد مشخص نباشد، بدان تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت گفته می‌شود. اما اگر احتمال هر یک از پیامدهای ممکنه معلوم باشد، می‌گوییم تصمیم‌گیری در شرایط ریسک انجام می‌شود. برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت (احتمالات نامعلوم) می‌توان از روش خوش‌بینانه (Maximax) یا بدبینانه (Maximin) برای انتخاب گزینه برتر استفاده کرد. در روش خوش‌بینانه،

¹ Single Attribute Utility Function - SAUF

تصمیم‌گیرنده نسبت به موقعیت خوش‌بین است و فرض می‌کند که بهترین شرایط طبیعت رخ می‌دهد. در مثال سرمایه‌گذاری، تصمیم‌گیرنده‌ی خوش‌بین پیش‌بینی می‌کند شرایط اقتصادی مطلوب است و سرمایه‌گذاری در طرح‌های A، B و C به ترتیب ۱۰۰، ۹۰ و ۸۰ میلیون تومان سود خواهد داشت. در نتیجه طرح A انتخاب می‌شود که بیشترین سود را دارد. در روش بدبینانه، تصمیم‌گیرنده نسبت به آینده بدبین است و فرض می‌کند بدترین حالت طبیعت رخ می‌دهد. پس برای هر گزینه کمترین مقدار را مشخص کرده و در میان بدترین‌ها، طرحی انتخاب می‌شود که بهترین است. در مثال سرمایه‌گذاری کمترین مقدار برای طرح A، B یا C به ترتیب برابر است با ۳۰، ۴۰ و ۶۰ میلیون تومان. بنابراین طرح C انتخاب می‌شود که بیشترین مقدار در میان این بدترین‌ها را دارا می‌باشد. اگر شاخص منفی باشد، روش Maximax تبدیل به Minimin و روش Maximin تبدیل به Minimax می‌شود.

معمولاً می‌توان برآوردی از احتمال وقوع پیامدهای ممکنه برای تصمیم در شرایط غیرقطعی ارائه داد که در این صورت باید از روش‌های تصمیم‌گیری در شرایط ریسک استفاده کرد. ساده‌ترین روش برای تصمیم‌گیری در این شرایط استفاده از معیار بازده مورد انتظار^۲ است. بازده مورد انتظار برای هر گزینه برابر است با مجموع حاصلضرب مقدار بازده برای هر حالت در احتمال وقوع آن حالت: $EV_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot x_{ij}$. در مثال با فرض این که احتمال وقوع شرایط اقتصادی مطلوب، معمولی و نامطلوب به ترتیب ۰,۳، ۰,۴ و ۰,۳ باشد، بازده مورد انتظار برای هر یک از طرح‌های A، B و C برابر است با:

$$EV(A) = 0.3 \times 100 + 0.4 \times 55 + 0.3 \times 30 = 61$$

$$EV(B) = 0.3 \times 90 + 0.4 \times 85 + 0.3 \times 40 = 73$$

$$EV(C) = 0.3 \times 80 + 0.4 \times 70 + 0.3 \times 60 = 70$$

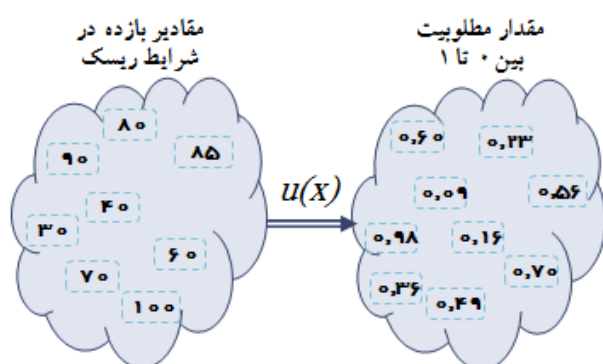
در نتیجه بر اساس معیار بازده مورد انتظار طرح B انتخاب می‌شود که بازده مورد انتظار آن بیشتر است. بدیهی است که در صورت منفی بودن شاخص، گزینه‌ای که مقدار مورد انتظار کوچکتری دارد انتخاب خواهد شد. بازده مورد انتظار برآوردی است از میانگین مقدار بازده در صورت تکرار تصمیم برای دفعات متعدد. بنابراین برای تصمیماتی مناسب است که به دفعات و تعداد زیاد اتخاذ می‌شود و برای تصمیمات یکباره یا موردی مناسب نیست. در معیار بازده مورد انتظار به ریسک تصمیم توجه نمی‌شود. اما افراد در بسیاری تصمیمات ریسک را نیز در نظر می‌گیرند و در نتیجه ممکن است گزینه‌ای را انتخاب کنند که بازده مورد انتظار آن کمتر و حتی منفی است. اگر معیار تصمیم بازده مورد انتظار باشد احتمالاً هیچکس خودرو خود را بیمه نمی‌کند، کالای دارای گارانتی با قیمت بالاتر نمی‌خرد، بر روی اسب‌های مسابقه شرط‌بندی نمی‌کند، ... مثال‌های فوق دو وجه دارد:

- شرکت بیمه‌گر یا فروشنده‌ی کالای دارای گارانتی: بازده مالی مورد انتظار آن‌ها از خدمات گارانتی یا فروش بیمه باید مثبت باشد در غیر این صورت در درازمدت ورشکست می‌شوند.
- خریداران بیمه‌نامه یا کالای دارای گارانتی: گرچه مقدار مورد انتظار بازده برای مشتری منفی است (برخی مشتریان با دریافت خسارت سود می‌برند اما اغلب در این معامله پول خود را از دست می‌دهند که منجر به منفی شدن مقدار مورد انتظار بازده می‌شود) اما با خرید بیمه‌نامه یا گارانتی ریسک خود را کاهش می‌دهند. یعنی تبعات منفی را برای حالاتی که احتمال وقوع کم اما هزینه زیادی دارد کم می‌کنند.

^۲ Expected Value - EV

تابع مطلوبیت تک‌شاخصه

برای تصمیم‌گیری با در نظر گرفتن ریسک می‌توان از مفهوم تابع مطلوبیت کمک گرفت. تابع مطلوبیت نگاشتی است از فضای پیامدهای احتمالی به مقادیر حقیقی در فاصله ۰ تا ۱. به عبارت ساده‌تر تابع مطلوبیت بیان می‌کند هر مقدار شاخص که حاصل وقوع یک پیامد در شرایط احتمالی است (مثلاً سود حاصل از سرمایه‌گذاری



شکل ۳. تابع مطلوبیت نگاشتی است از مقادیر بازده به اعدادی در فاصله ۰ تا ۱

در شرایط ریسک) چقدر برای تصمیم‌گیرنده مطلوبیت دارد. تابع مطلوبیت با $u(X)$ نشان داده می‌شود که X مقدار شاخص تصمیم است. مثلاً $u(85) = 0.6$ یعنی سود ۸۵ میلیون تومانی برای تصمیم‌گیرنده، مطلوبیتی معادل ۰.۶ دارد. تابع مطلوبیتی مفهومی ذهنی و مختص تصمیم‌گیرنده است که بر اساس نگرش او نسبت به ریسک تعیین می‌شود. افراد مختلف در شرایط یکسان بر اساس میزان ریسک‌پذیری، توابع مطلوبیت متفاوت دارند. در ابتدا فرض می‌کنیم که تصمیم‌گیری تنها بر اساس یک

شاخص انجام می‌شود و چگونگی تعیین تابع مطلوبیت تک‌شاخصه را با استفاده از یک مثال تشریح می‌کنیم:

جدول ۲: مثال انتخاب محل برگزاری رویداد بازاریابی

گزینه‌ها	استقبال بالا		استقبال کم		سود مورد انتظار
	احتمال	سود حاصله	احتمال	سود حاصله	
هتل مجلل	۰.۶	۳۰۰	۰.۴	۱۱۰	۲۲۴
مرکز نمایشگاهی	۰.۵	۶۰۰	۰.۵	-۱۰۰	۲۵۰

مثال: یک شرکت تجاری عرضه کننده تجهیزات مهندسی برای معرفی و فروش محصولات خود باید از میان یک هتل مجلل و یک مرکز نمایشگاهی یکی را جهت برگزاری این رویداد انتخاب کند. این رویداد ممکن است با استقبال بالا یا کم مواجه شود که احتمال وقوع هر کدام و سود حاصله

در هر حالت در جدول ۲ آمده است. بر اساس معیار بازده مورد انتظار مرکز نمایشگاهی انتخاب می‌شود چون سود مورد انتظار حاصله بیشتر است:

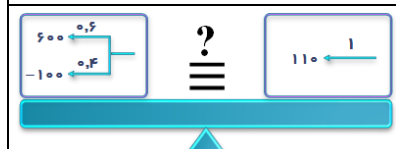
$$EV(\text{هتل مجلل}) = 0.6 \times 300 + 0.4 \times 110 = 224$$

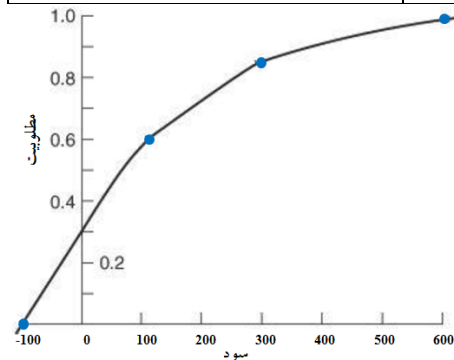
$$EV(\text{مرکز نمایشگاهی}) = 0.5 \times 600 + 0.5 \times (-110) = 250$$

مورد انتظار شاید تصمیم معقولی نباشد چون ریسک بالایی دارد و ۵۰٪ احتمال دارد منجر به زیان ۱۰۰ میلیون تومانی شود. برای در نظر گرفتن ریسک در چنین تصمیمی ابتدا باید تابع مطلوبیت تعیین شود. یک روش رایج در فرایند تعیین تابع مطلوبیت تصمیم‌گیرنده بدین ترتیب است که او به صورت نظام‌مند در موقعیت‌هایی قرار می‌گیرد که در هر کدام باید ترجیح خود را بین یک مبلغ دریافتی قطعی و شرکت در قرعه‌کشی با مبالغ دریافتی و احتمالات مشخص بیان نماید. بر اساس پاسخ‌های تصمیم‌گیرنده، نقاطی بر روی تابع مطلوبیت شناسایی و یک منحنی بر این نقاط برازش شود. مراحل تعیین تابع مطلوبیت با استفاده از مثال در جدول ۳ تشریح شده است.

جدول ۳: نحوه تعیین تابع مطلوبیت

<table border="1"> <thead> <tr> <th>مطلوبیت</th><th>سود حاصله</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۱</td><td>۶۰۰</td></tr> <tr> <td>?</td><td>۳۰۰</td></tr> <tr> <td>?</td><td>۱۱۰</td></tr> <tr> <td>۰</td><td>-۱۰۰</td></tr> </tbody> </table>	مطلوبیت	سود حاصله	۱	۶۰۰	?	۳۰۰	?	۱۱۰	۰	-۱۰۰	ابتدا تمام مقادیر بازده موجود در جدول بازده از بهترین به بدترین مرتب شده، به بهترین مقدار، مطلوبیت ۱ و به بدترین مقدار، مطلوبیت ۰ اختصاص می‌یابد.
مطلوبیت	سود حاصله										
۱	۶۰۰										
?	۳۰۰										
?	۱۱۰										
۰	-۱۰۰										
	برای تعیین مطلوبیت سایر مقادیر بازده، تصمیم‌گیرنده در معرض مجموعه‌ای از انتخاب‌ها میان دریافت مبلغ قطعی معادل بازدهی که در پی یافتن میزان مطلوبیت آن هستیم و یا مبالغ شانسی معادل کمترین و بیشترین مقادیر جدول بازده با احتمالات مشخص قرار می‌گیرد. مثلاً برای تعیین مطلوبیت سود ۳۰۰ میلیون تومانی از تصمیم‌گیرنده می‌پرسیم کدام را ترجیح می‌دهد: - دریافت مبلغ قطعی ۳۰۰ میلیون تومان (۱ در شکل یعنی ۱۰۰٪) - شرکت در یک قرعه‌کشی که ۷۰٪ احتمال دارد مبلغ ۶۰۰ میلیون برنده شود یا با احتمال ۳۰٪ مبلغ ۱۰۰ میلیون تومان (-۱۰۰) بازنده می‌شود. (توجه کنید که در گزینه دوم پیشنهادی ۶۰۰ و ۱۰۰ - کمترین و بیشترین مقدار بازده در جدول هستند. احتمال برنده شدن یعنی ۰,۷۰ ابتدا به دلخواه تعیین شده و بر اساس پاسخ تصمیم‌گیرنده، مقدار آن را تغییر می‌دهیم) اگر تصمیم‌گیرنده یکی را بر دیگری ترجیح دهد بر اساس گزینه انتخابی احتمال برنده شدن تغییر می‌کند تا جایی که تصمیم‌گیرنده بین دو گزینه بی‌تفاوت باشد و بر اساس آن میزان مطلوبیت تعیین می‌شود. فرض کنید تصمیم‌گیرنده پاسخ می‌دهد: "احتمال ۳۰٪ برای زیان ۱۰۰ میلیون تومانی بسیار زیاد است، دریافت مبلغ ۳۰۰ میلیون تومان قطعی را ترجیح می‌دهم."										
	برای پیدا کردن نقطه بی‌تفاوتی، احتمال برنده شدن را افزایش داده و این بار از تصمیم‌گیرنده می‌پرسیم: کدام را ترجیح می‌دهد: - دریافت قطعی ۳۰۰ میلیون تومان - دریافت ۶۰۰ میلیون تومانی با احتمال ۹۰٪ یا زیان ۱۰۰ میلیون تومانی با احتمال ۱۰٪ تصمیم‌گیرنده پاسخ می‌دهد: "شانس ۹۰٪ برای مبلغ ۳۰۰ میلیون تومان احتمال بالایی است، شرکت در قرعه‌کشی را به دریافت قطعی ۳۰۰ میلیون تومان ترجیح می‌دهم."										
	در نتیجه برای رسیدن به نقطه بی‌تفاوتی باید احتمال برنده شدن بین ۷۰٪ تا ۹۰٪ باشد. سرانجام بین دو گزینه زیر تصمیم‌گیرنده بی‌تفاوت خواهد بود: - دریافت قطعی ۳۰۰ میلیون تومان - دریافت ۶۰۰ میلیون تومانی با احتمال ۸۵٪ یا زیان ۱۰۰ میلیون تومانی با احتمال ۱۵٪										

<table border="1"> <thead> <tr> <th>مقدار سود</th><th>مطلوبیت</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۶۰۰</td><td>۱</td></tr> <tr> <td>۳۰۰</td><td>۰,۸۵</td></tr> <tr> <td>۱۱۰</td><td>?</td></tr> <tr> <td>-۱۰۰</td><td>۰</td></tr> </tbody> </table>	مقدار سود	مطلوبیت	۶۰۰	۱	۳۰۰	۰,۸۵	۱۱۰	?	-۱۰۰	۰	چون تصمیم‌گیرنده دو گزینه را معادل می‌داند، مقدار مطلوبیت مورد انتظار هر دو یکسان است: $u(300) = 0.85 \times u(600) + 0.15 \times u(-100)$ $= 0.85 \times 1 + 0.15 \times 0 = 0.85$ در اینجا گفته می‌شود که معادل قطعی^۳ دریافت ۶۰۰ میلیون تومان با احتمال ۰,۸۵ یا زیان ۱۰۰ میلیون تومانی با احتمال ۰,۱۵ برابر است با ۳۰۰. توجه کنید که در محاسبه مطلوبیت مورد انتظار گزینه‌ای که به صورت قرعه ارائه شده است، چون مطلوبیت کمترین بازده ۰ و مطلوبیت بیشترین بازده ۱ است، همواره نتیجه نهایی برابر است با احتمال وقوع بیشترین بازده که در این جا ۰,۸۵ است. بنابراین مطلوبیت دریافتی قطعی ۳۰۰ میلیون تومان برابر است با ۰,۸۵ که در جدول وارد می‌شود.
مقدار سود	مطلوبیت										
۶۰۰	۱										
۳۰۰	۰,۸۵										
۱۱۰	?										
-۱۰۰	۰										
 <table border="1"> <thead> <tr> <th>مقدار سود</th><th>مطلوبیت</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۶۰۰</td><td>۱</td></tr> <tr> <td>۳۰۰</td><td>۰,۸۵</td></tr> <tr> <td>۱۱۰</td><td>۰,۶۰</td></tr> <tr> <td>-۱۰۰</td><td>۰</td></tr> </tbody> </table>	مقدار سود	مطلوبیت	۶۰۰	۱	۳۰۰	۰,۸۵	۱۱۰	۰,۶۰	-۱۰۰	۰	مقدار مطلوبیت ۱۱۰ میلیون تومان نیز به همین روش بدست می‌آید. پس از پرسش مجموعه‌ای از سؤالات مشابه تصمیم‌گیرنده بیان می‌دارد که بین دریافت ۱۱۰ میلیون تومان به صورت قطعی و یک قرعه‌کشی با احتمال ۰,۶۰ دریافت ۶۰۰ میلیون تومان یا احتمال ۰,۴۰ زیان ۱۰۰ میلیون تومانی بی‌تفاوت است. بنابراین: $u(110) = 0.60 \times u(600) + 0.40 \times u(-100)$ $= 0.60 \times 1 + 0.40 \times 0 = 0.60$
مقدار سود	مطلوبیت										
۶۰۰	۱										
۳۰۰	۰,۸۵										
۱۱۰	۰,۶۰										
-۱۰۰	۰										



شکل ۴. نمودار تابع مطلوبیت در مثال تعیین محل برگزاری رویداد بازاریابی

$$EU(\text{هتل مجلل}) = 0.6 \times 0.85 + 0.4 \times 0.6 = 0.75$$

$$EU(\text{مرکز نمایشگاهی}) = 0.5 \times 1 + 0.5 \times 0 = 0.5$$

مقدار مورد انتظار مطلوبیت برای هر گزینه برابر است با مجموع حاصل ضرب احتمال وقوع هر مقدار بازده در میزان مطلوبیت آن مقدار از بازده برای تمام مقادیر ممکنه. ملاحظه می‌شود که مقدار مورد انتظار مطلوبیت برای گزینه اول یعنی هتل مجلل بیشتر بوده و بنابراین با در نظر گرفتن نگرش تصمیم‌گیرنده نسبت به ریسک، باید این گزینه انتخاب شود.

³ Certainty Equivalent – CE

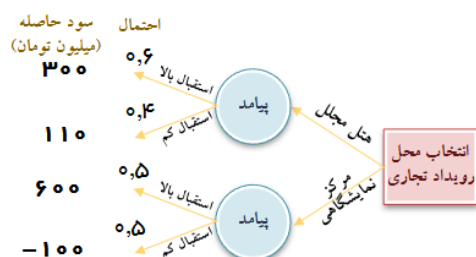
⁴ Expected Utility – EU

درخت تصمیم

در دنیای واقعی بسیاری از موقعیت‌های تصمیم از مجموعه‌ای متوالی از تصمیمات و پیامدها تشکیل شده‌اند. برای مدل کردن مسائل تصمیم پیچیده در شرایط احتمالی و تعیین گزینه برتر بر اساس بازده یا مطلوبیت مورد انتظار می‌توان از درخت تصمیم استفاده کرد. در یک درخت تصمیم توالی تصمیمات و پیامدها با دو نوع گره نمایش داده می‌شود:

- گره تصمیم که با چهارگوش نشان داده شده و بیانگر نقاط زمانی است که در آن باید تصمیمی اتخاذ شود و انشعاب‌های خروجی آن گزینه‌های قابل انتخاب را نشان می‌دهد.

- گره پیامد که با دایره نمایش داده می‌شود و انشعاب‌های خروجی از آن نشان دهنده تمامی پیامدهای ممکنه برای یک گزینه است. در شرایط ریسک، برای هر انشعاب خروجی از گره پیامد، احتمال وقوع آن نیز درج می‌شود. مجموع احتمالات برای تمام انشعاب‌های خروجی از یک گره پیامد باید برابر با ۱ باشد.



شکل ۵. درخت تصمیم در مثال تعیین محل برگزاری رویداد بازاریابی

همچنین برای هر انشعاب (خروجی از گره تصمیم یا پیامد) می‌توان مقداری را درج کرد که بیانگر بازده حاصل از مسیری است که به آن انشعاب ختم می‌شود. درخت تصمیم برای مثال تعیین محل برای رویداد بازاریابی در شکل ۵ رسم شده است.

مثال: به منظور تشریح چگونگی استفاده از درخت تصمیم از یک مثال کمک می‌گیریم. شرکتی می‌خواهد تصمیم‌گیری نماید که آیا یک محصول جدید را توسعه داده و به بازار ارائه نماید یا خیر؟ قبل از اتخاذ این تصمیم، شرکت می‌تواند از یک موسسه تحقیقات بازار جهت پیش‌بینی میزان استقبال از این محصول مشاوره بگیرد. بنابراین دو تصمیم به صورت متوالی باید اتخاذ شود:

- بکارگیری یا عدم بکارگیری مشاور

- توسعه یا عدم توسعه محصول جدید

بکارگیری مشاور دو پیامد دارد:

- پیش‌بینی استقبال بازار از محصول جدید توسط مشاور

- پیش‌بینی عدم استقبال بازار از محصول جدید توسط مشاور

در صورت توسعه محصول دو حالت رخ می‌دهد:

- استقبال بازار از محصول جدید

- عدم استقبال بازار از محصول جدید

اطلاعات ریالی مسأله بدین صورت است:

- در صورت استقبال از محصول جدید ۵۰۰ میلیون تومان سود نصیب شرکت خواهد شد.

- در صورت عدم استقبال از محصول جدید شرکت ۱۰۰ میلیون تومان زیان متحمل می‌شود.

- هزینه بکارگیری مشاور ۶۰ میلیون تومان است.

با توجه به اطلاعات داده شده درخت تصمیم رسم شده است (شکل ۶). نحوه رسم درخت با اشاره به شماره گره مربوطه و چگونگی محاسبه بازده نهایی در هر انشعاب به شرح زیر است:

گره ۱. در ابتدا باید در مورد بکارگیری مشاور تصمیم‌گیری کرد. بنابراین در ابتدای درخت یک گره تصمیم با دو انشعاب یعنی دو گزینه داریم.

گره ۲. با فرض عدم استفاده از مشاور، تصمیم بعدی توسعه یا عدم توسعه محصول است. بنابراین در نقطه ۲ نیز یک گره تصمیم داریم. اگر تصمیم عدم توسعه محصول باشد فرایند تصمیم به پایان می‌رسد و چون هیچ هزینه‌ای نشده و درآمدی نیز حاصل نشده، بازده نهایی صفر است.

گره ۴. اگر تصمیم به توسعه محصول گرفته شود دو پیامد ممکن دارد: استقبال یا عدم استقبال از محصول که احتمالات ۰,۷ و ۰,۳ برای آن‌ها پیش‌بینی شده است. استقبال برای شرکت ۵۰۰ میلیون تومان سود خواهد داشت و عدم استقبال ۱۰۰ میلیون زیان.



شکل ۶. درخت تصمیم برای مثال توسعه محصول جدید

گره ۳. اگر تصمیم به استفاده از مشاور گرفته شود، دو حالت ممکن است رخ دهد (گره پیامد): پیش‌بینی مشاور مبنی بر استقبال یا عدم استقبال از محصول جدید با احتمالات ۰,۷۲ و ۰,۲۸.

گره ۵ و ۶. صرف نظر از این که پیش‌بینی مشاور استقبال یا عدم استقبال از محصول جدید باشد، دو گزینه پیش‌روی تصمیم‌گیرنده است: توسعه یا عدم توسعه محصول. در هر دو حالت در صورت عدم توسعه محصول، فرایند تصمیم‌گیری با زیان ۶۰ میلیون تومان (دستمزد مشاور) به پایان می‌رسد.

گره ۷. اگر پیش‌بینی مشاور استقبال بازار باشد و محصول توسعه یابد، احتمال موفقیت نسبت به حالتی که از مشاور استفاده نشد، بیشتر خواهد بود (۰,۸۷۵) و سود در این حالت برابر است با ۴۴۰ میلیون تومان (دستمزد ۶۰

میلیون تومانی مشاور از سود ۵۰۰ (میلیون تومان کسر می‌شود). احتمال عدم‌استقبال از محصول در این حالت ۰,۱۲۵ است و شرکت زبانی برابر با هزینه شکست در بازار (۱۰۰ میلیون تومان) به اضافه دستمزد مشاور (۶۰ میلیون تومان) متحمل خواهد شد.

گره ۸: اگر پیش‌بینی مشاور عدم‌استقبال بازار باشد اما محصول توسعه یابد، احتمال استقبال از محصول جدید ۰,۲۵ است. در این صورت سود مشابه گره ۷ برابر با ۴۴۰ میلیون تومان است. احتمال عدم‌استقبال از محصول در این حالت ۰,۷۵ است و شرکت همانند گره ۷ با زیان ۱۶۰ میلیون تومانی مواجه خواهد شد.

محاسبه بازده مورد انتظار بر روی درخت تصمیم

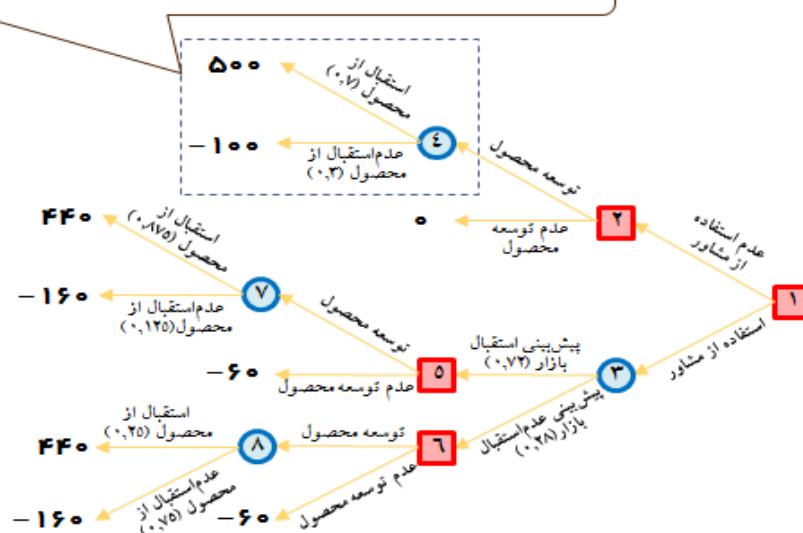
برای تعیین گزینه برتر بر اساس معیار بازده مورد انتظار محاسبات را می‌توان بر روی درخت تصمیم انجام داد. بدین منظور از شاخه‌های انتهایی درخت شروع کرده و درخت را هرس می‌کنیم تا به اولین گره برسیم. نحوه هرس یک گره پیامد و یک گره تصمیم متفاوت است:

- اگر به یک گره پیامد رسیدیم، بازده مورد انتظار در آن نقطه محاسبه، گره حذف و مقدار بازده مورد انتظار جایگزین می‌شود.

- اگر به یک گره تصمیم رسیدیم، گزینه‌ای که بازده بیشتر دارد انتخاب، آن گره حذف و مقدار بازده بیشتر از میان انشعاب‌های خروجی از آن گره، جایگزین می‌شود.

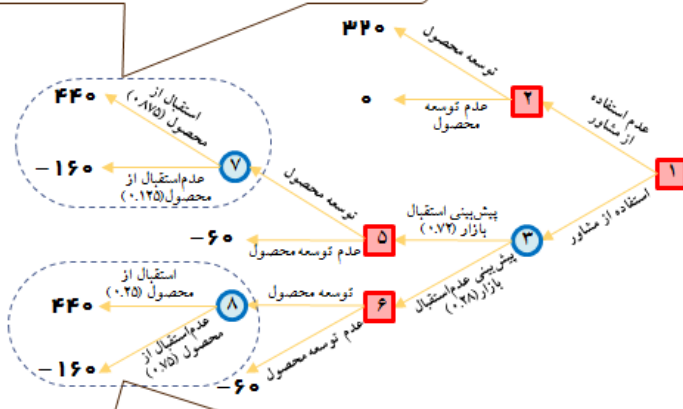
به گره ۴ توجه کنید (شکل ۷)، دو پیامد ممکنه داریم با بازده و احتمال مشخص، مقدار مورد انتظار بازده برابر است با ۳۲۰. گره ۴ و انشعابات پس از آن، با مقدار ۳۲۰ جایگزین می‌شود (شکل ۸).

$$EV(\text{گره ۴}) = 0.7 \times 500 + 0.3 \times (-100) = 320$$



شکل ۷. حذف گره پیامد ۴ و جایگزینی آن با بازده مورد انتظار

$$EV(7\text{ گرو}) = 0.875 \times 440 + 0.125 \times (-160) = 365$$



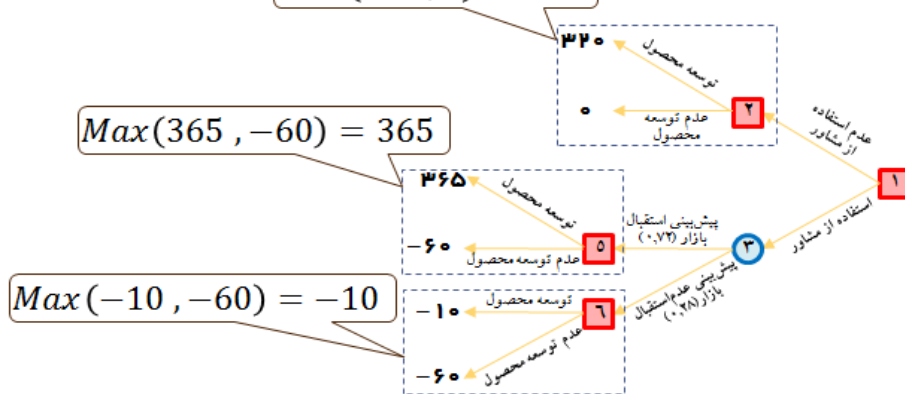
$$EV(8\text{ گره}) = 0.25 \times 440 + 0.75 \times (-160) = -10$$

شکل ۸. حذف گره‌های پیامد ۷ و ۸ و جایگزینی آن‌ها با بازده مورد انتظار

به همین ترتیب مقدار مورد انتظار برای گره‌های ۷ و ۸ که گره‌های پیامد هستند برابر با ۳۶۵ و ۱۰- بدست می‌آید (شکل ۸). این مقادیر جایگزین گره‌های ۷ و ۸ و انشعابات پس از آن‌ها می‌شوند (شکل ۹).

گره‌های ۲، ۵ و ۶ گره‌های تصمیم‌اند. برای هر گره تصمیم انشعابات خروجی نشان دهنده گزینه‌های قابل انتخاب

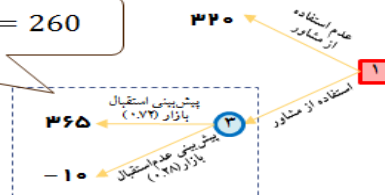
$$\boxed{Max(320, 0) = 320}$$



شکل ۹. جایگزینی گره‌های تصمیم ۲، ۵ و ۶ با بهترین مقدار بازده

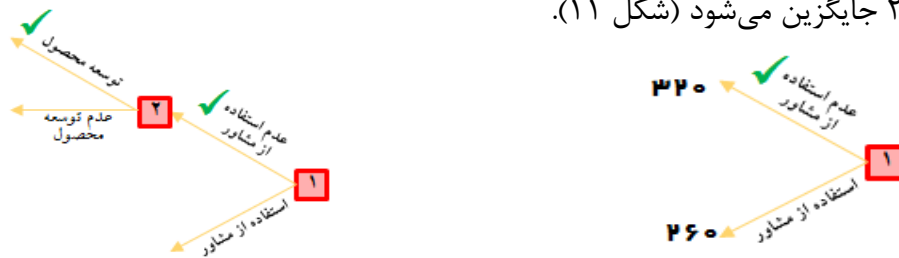
است و گزینه‌ای انتخاب می‌شود که مقدار بازده بزرگتری دارد. پس گره تصمیم و انشعابات آن با مقدار بازده بزرگتر جایگزین شده (شکل ۹). و بجای گره‌های ۲، ۵ و ۶ مقادیر ۳۲۰، ۳۶۵ و ۱۰- درج می‌شود (شکل ۱۰). مقادیر بازده در هر سه گره فوق دلالت بر این امر دارد که بین توسعه و عدم توسعه محصول جدید، اولی باید انتخاب شود.

$$EV(3\text{ گره}) = 0.72 \times 365 + 0.28 \times (-10) = 260$$



شکل ۱۰. جایگزینی گره ۳ با بازده مورد انتظار

در گره ۳ مقدار مورد انتظار را حساب می‌کنیم که برابر است با ۲۶۰ (شکل ۱۰). این گره و انشعابات پی‌آیند آن حذف و مقدار ۲۶۰ جایگزین می‌شود (شکل ۱۱).



شکل ۱۱. انتخاب بر اساس بازده در گره ۱ شکل ۱۲. توالی بهینه تصمیمات بر اساس بازده

سرانجام در گره ۱ که گره تصمیم است، عدم استفاده از مشاور بازده بیشتری دارد و این گزینه باید انتخاب شود (شکل ۱۱). در نتیجه جواب نهایی بر اساس دو گره‌ای که در آن‌ها باید تصمیم اتخاذ گردد عبارتست از عدم استفاده از مشاور در گره ۱ و توسعه محصول در گره ۲ (شکل ۱۲).

تصمیم‌گیری بر اساس مقدار مورد انتظار مطلوبیت به کمک درخت تصمیم
برای تصمیم‌گیری بر اساس تابع مطلوبیت برای مسأله‌ای که در قالب درخت

تصمیم ارائه شده دقیقاً مشابه قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که بجای بازده،

مقدار مطلوبیت برای هر مقدار بازده بر روی انشعابات پایانی نوشته شده و محاسبات با استفاده از آن‌ها انجام می‌شود. یعنی هر گره پیامد، با مقدار مطلوبیت مورد انتظار جایگزین می‌شود و هر گره تصمیم، با بزرگترین مقدار مطلوبیت در انشعابات خروجی آن. برای مثال توسعه محصول جدید، به روش تشریح شده مطلوبیت برای مقادیر سود مطابق جدول ۴ بدست آمده‌اند. برای تعیین گزینه برتر بر اساس مقدار مطلوبیت، ابتدا بر روی درخت تصمیم، مقادیر مطلوبیت جایگزین مقادیر سود می‌شود (شکل ۱۳).

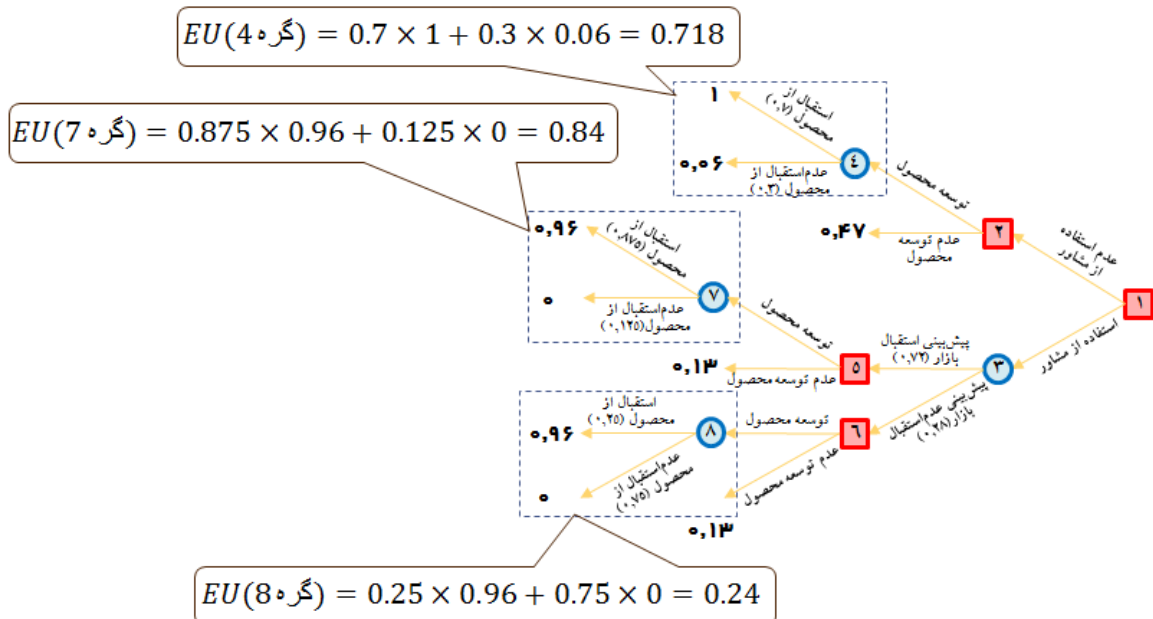
جدول ۴. مقادیر مطلوبیت در مثال توسعه محصول جدید

مقدار سود	مطلوبیت
۵۰۰	۱
۴۴۰	۰.۹۶
۰	۰.۴۷
-۶۰	۰.۱۳
-۱۰۰	۰.۰۶
-۱۶۰	۰

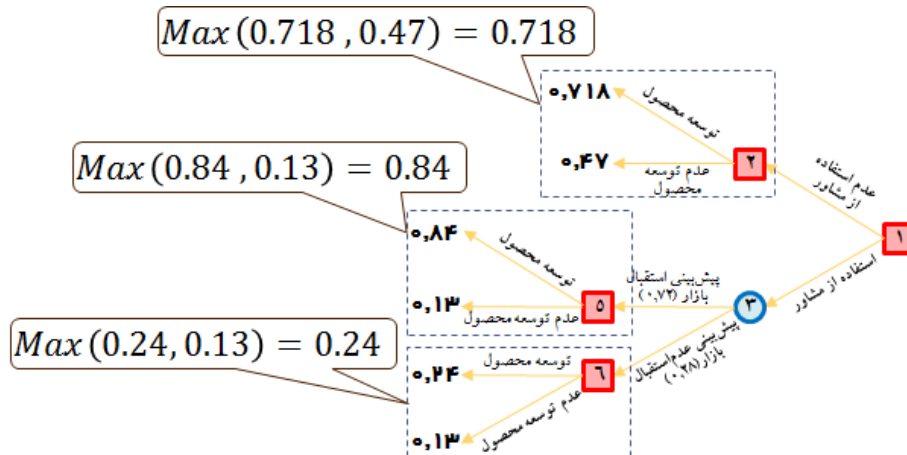


شکل ۱۳. جایگزینی مقادیر مطلوبیت بجای بازده در مثال توسعه محصول جدید

در گام بعدی مقدار مطلوبیت مورد انتظار محاسبه و با گره‌های ۴، ۷ و ۸ جایگزین می‌شود (شکل‌های ۱۴ و ۱۵)

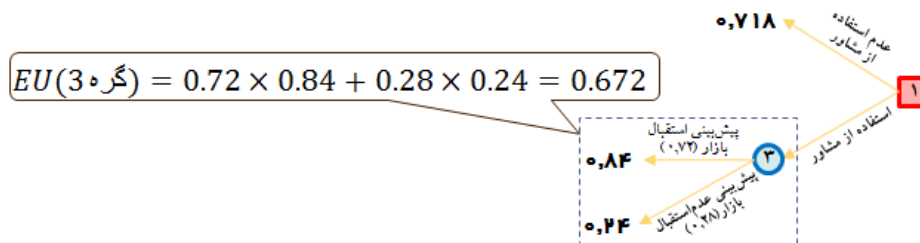


شکل ۱۴. حذف گره‌های ۴، ۷ و ۸ و جایگزینی آن‌ها با مطلوبیت مورد انتظار



شکل ۱۵. جایگزینی گره‌های تصمیم ۲، ۵ و ۶ با بیشترین مقدار مطلوبیت

در شکل ۱۵ گره‌های ۲، ۵ و ۶ که گره تصمیم هستند با مقدار بیشتر جایگزین می‌شود (شکل ۱۶). مشاهده می‌شود که در هر سه گره، تصمیم بهتر عبارتست از توسعه محصول جدید.



شکل ۱۶. جایگزینی گره ۳ با بیشترین مقدار مطلوبیت

در شکل ۱۶ مقدار مورد انتظار مطلوبیت گره ۳ محاسبه و جایگزین این گره و انشعاب‌های آن‌ها می‌شود (شکل ۱۷). سرانجام در گره ۱ که گره تصمیم است، عدم استفاده از مشاور انتخاب می‌شود چون مطلوبیت بیشتری دارد (شکل ۱۷). در نتیجه نهایی توالی بهینه تصمیمات بر اساس دو گره‌ای که در آن‌ها باید تصمیم اتخاذ گردد عبارتست از عدم استفاده از مشاور در گره ۱ و توسعه محصول در گره ۲ (شکل ۱۸).



شکل ۱۷. انتخاب بر اساس مطلوبیت در گره ۱

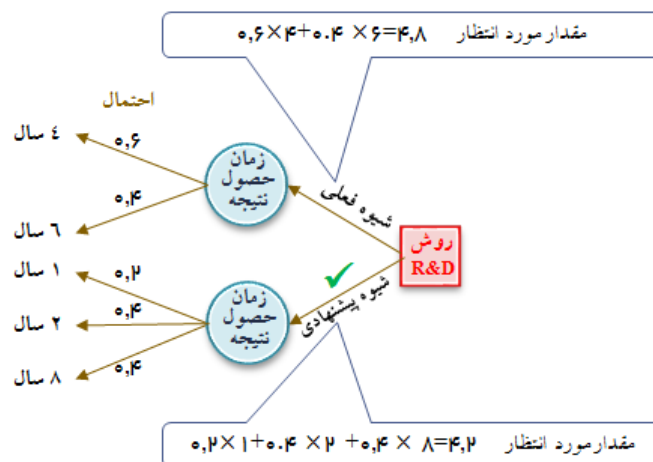
شکل ۱۸. توالی بهینه تصمیمات بر اساس مطلوبیت

جمع‌بندی

در این بحث دیدیم که برای تصمیم‌گیری در شرایط احتمالی نمی‌توان پیامد انتخاب هر گزینه را به قطعیت بیان کرد و چندین پیامد محتمل است. اگر احتمال وقوع هر پیامد مشخص باشد تصمیم در شرایط ریسک گرفته می‌شود. مسأله تصمیم در حالت احتمالی با استفاده از درخت تصمیم مدل‌سازی می‌شود. به عنوان مثال یک شرکت داروسازی را در نظر بگیرید که در پی توسعه دارویی جدید است. بدین منظور دو گزینه پیش‌رو دارد:

- استفاده از شیوه فعلی تحقیق و توسعه که برآورد می‌شود ۴ یا ۶ سال طول بکشد با احتمالات ۶۰٪ و ۴۰٪
- بکارگیری یک رویکرد جدید R&D که اگر موفقیت‌آمیز باشد حصول نتیجه ۱ یا ۲ سال زمان می‌برد با احتمالات ۲۰٪ و ۴۰٪. اما ۴۰٪ احتمال دارد که شیوه جدید شکست بخورد و در این صورت باید به روش قبل بازگشت که باعث می‌شود کل پروژه هشت سال طول بکشد.

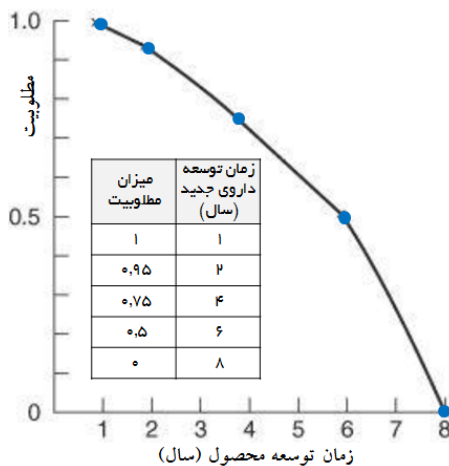
در شکل ۱۹ این مسأله به کمک درخت تصمیم مدل‌سازی شده است. برای انتخاب گزینه برتر می‌توان از معیار بازده مورد انتظار استفاده کرد که با ضرب مقادیر احتمال در بازده هر پیامد بدست می‌آید. در مثال مقدار مورد



شکل ۱۹. درخت تصمیم برای مثال انتخاب شیوه توسعه داروی جدید

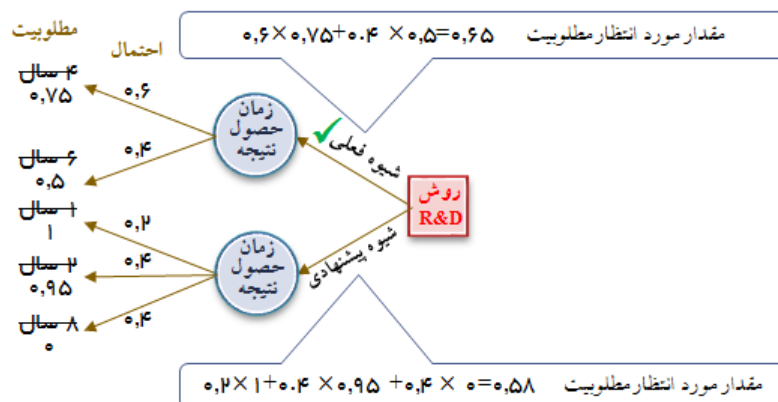
انتظار برای شیوه فعلی ۴,۸ سال و برای شیوه پیشنهادی ۴,۲ سال بدست آمده است. با توجه به این که شاخص تصمیم یعنی زمان توسعه داروی جدید منفی است (مقادیر کوچکتر مطلوبیت بیشتری دارند)، شیوه جدید که مقدار مورد انتظار کمتری دارد انتخاب می‌شود. تصمیم‌گیری بر اساس معیار بازده مورد انتظار چند ویژگی دارد. اولاً نشان دهنده میانگین بازده در تکرارهای زیاد است برای تصمیماتی از قبیل مسأله مورد بررسی در این مثال که یکبار یا به تعداد دفعات کم اتخاذ می‌شود مناسب نیست. دوم آن که در تصمیم‌گیری بر اساس این معیار ریسک در نظر گرفته نمی‌شود و فرض می‌شود که تصمیم‌گیرنده نسبت به ریسک خنثی بوده ریسک‌پذیر یا ریسک‌گریز نمی‌باشد.

روش جایگزین استفاده از تابع مطلوبیت است. تابع مطلوبیت نشان‌دهنده نگرش تصمیم‌گیرنده نسبت به ریسک است. دیدیم که برای تعیین تابع مطلوبیت چگونه می‌توان با پرسش سؤالاتی از تصمیم‌گیرنده در خصوص ترجیح او در انتخاب از میان یک گزینه با پیامدی قطعی و یک گزینه با پیامدهای احتمالی، تابع مطلوبیت او را برآورد کرد. برای مثال مورد اشاره مقادیر مطلوبیت برای زمان‌های مختلف توسعه‌ی داروی جدید تعیین و نمودار



شکل ۲۰. تابع مطلوبیت در مثال توسعه داروی جدید

تابع مطلوبیت رسم شده است (شکل ۲۰). مشاهده می‌شود که با افزایش زمان توسعه محصول، مطلوبیت کاهش می‌یابد. برای تصمیم‌گیری بر اساس مطلوبیت بر روی درخت تصمیم بجای مقدار بازده هر پیامد، مطلوبیت متناظر با آن‌ها درج شده و مقدار مورد انتظار مطلوبیت با ضرب مقادیر مطلوبیت در احتمال هر پیامد بدست می‌آید (شکل ۲۱). گزینه برتر گزینه‌ای است که بیشترین مقدار مطلوبیت مورد انتظار را دارد. در مثال ملاحظه می‌شود که با در نظر گرفتن تابع مطلوبیت تصمیم‌گیرنده، گزینه اول انتخاب می‌شود چون مطلوبیت مورد انتظار آن بیشتر است و استفاده از رویکرد جدید تجویز نمی‌شود.



شکل ۲۱. تصمیم‌گیری بر اساس مطلوبیت برای مثال توسعه داروی جدید

در مبحث بعد خواهیم دید که چگونه می‌توان بر اساس تابع مطلوبیت نگرش تصمیم‌گیرنده نسبت به ریسک را تعیین کرد. همچنین چگونگی استخراج تابع مطلوبیت وقتی بیش از یک شاخص در تصمیم‌گیری باید در نظر گرفته شود تشریح می‌شود.

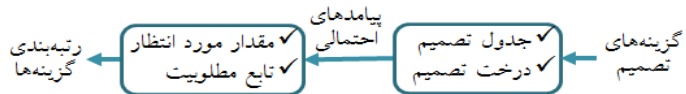
مبحث دوازدهم: تابع مطلوبیت چندشاخصه

اهداف یادگیری

- خواننده پس از مطالعه این مبحث قادر خواهد بود:
- بر اساس تابع مطلوبیت، تعیین کند تصمیم‌گیرنده ریسک‌پذیر، ریسک‌گریز یا خنثی نسبت به ریسک است.
- ضمن درک مفهوم استقلال مطلوبیت، برقرار بودن این شرط برای شاخص‌های تصمیم را بررسی نماید.
- وقتی شرط استقلال متقابل مطلوبیت بین شاخص‌ها برقرار است، با ترکیب توابع مطلوبیت تک‌شاخصه، تابع مطلوبیت چندشاخصه را برای تصمیم‌گیرنده تعیین کند.
- با داشتن تابع مطلوبیت چندشاخصه برای تصمیم‌گیرنده، گزینه‌ها را در شرایط احتمالی رتبه‌بندی نماید.

مقدمه

در مبحث قبل دیدیم که بسیاری از تصمیمات در شرایط احتمالی اتخاذ می‌شوند و بخش مهمی از مباحث تئوری تصمیم به تکنیک‌های تصمیم در شرایط احتمالی اختصاص دارد. برای تصمیم‌گیری در شرایط احتمالی به دو دسته تکنیک نیاز داریم (شکل ۱):



- تکنیک‌هایی برای مدل‌سازی مسأله

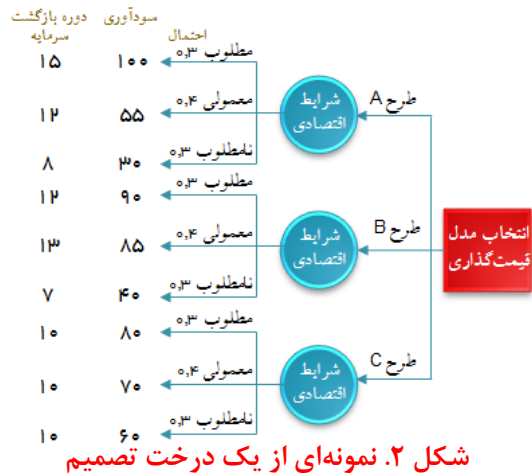
شکل ۱. تکنیک‌های مورد نیاز برای تصمیم‌گیری در شرایط احتمالی

در شرایط احتمالی یعنی ابزاری که با استفاده از آن بتوان پیامدهای ممکنه برای هر گزینه را همراه با احتمالات مربوطه تعیین کرد. در جلسه قبل دیدیم که بدین منظور می‌توان از جدول تصمیم یا درخت تصمیم استفاده کرد.

- روش‌هایی برای تعیین ترجیحات تصمیم‌گیرنده در خصوص پیامدهای احتمالی جهت رتبه‌بندی گزینه‌ها و تعیین گزینه‌ی برتر. بدین منظور می‌توان از معیار بازده مورد انتظار یا توابع مطلوبیت استفاده کرد.
- در جدول تصمیم، معمولاً گزینه‌ها در سطرها، پیامدهای ممکنه در ستون‌ها و بازده برای هر حالت در خانه‌های جدول درج می‌شود (جدول ۱). درخت تصمیم برای تصمیمات پیچیده مشتمل بر یک توالی از تصمیمات و پیامدها مناسب‌تر است و در آن تصمیمات با چهارگوش و انتخاب‌های هر تصمیم با انشعابات خروجی از آن نمایش داده می‌شود. پیامدها با دایره و حالات ممکن الوقوع برای آن‌ها با انشعاب‌های خروجی از آن به تصویر کشیده می‌شود (شکل ۲).

حالات طبیعت			احتمال	
مطلوب	معمولی	نامطلوب		
۰,۳	۰,۴	۰,۳		
۳۰	۵۵	۱۰۰	A طرح	۰,۶
۴۰	۸۵	۹۰	B طرح	
۶۰	۷۰	۸۰	C طرح	

مقدار بازده مورد انتظار هر گزینه از ضرب مقادیر بازده در احتمالات مربوطه بدست آمده و بیانگر میانگین بازده در تکرارهای زیاد تصمیم است. در آن ریسک در نظر گرفته نشده و برای تصمیماتی که مکرر اخذ می‌شود مناسب است. تابع مطلوبیت بیانگر ترجیحات تصمیم‌گیرنده در شرایط احتمالی است و میزان مطلوبیت هر پیامد احتمالی با مقداری بین ۰ تا ۱ تعیین می‌شود. تابع مطلوبیت مبتنی است بر سلائی و ترجیحات تصمیم‌گیرنده و بازتاب نگرش او نسبت به ریسک است.

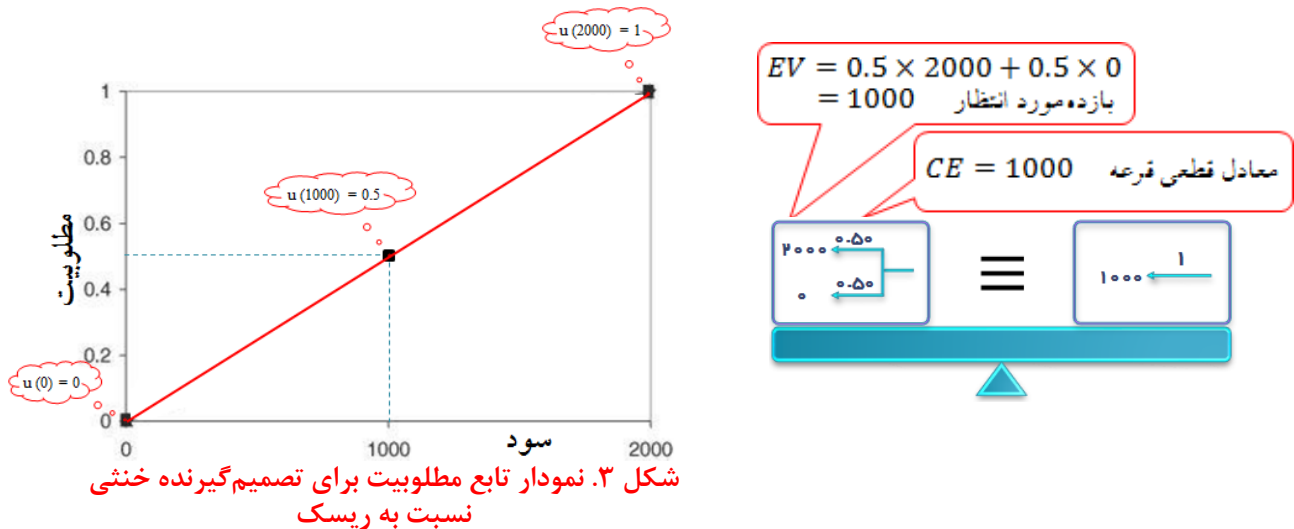


در این مبحث ابتدا خواهیم دید که چگونه می‌توان بر اساس تابع مطلوبیت، در خصوص میزان ریسک‌پذیری افراد قضاوت نمود. در بسیاری از تصمیمات احتمالی، بیش از یک شاخص باید در نظر گرفته شود. به عنوان نمونه در شکل ۲ یک تصمیم‌گیرنده در انتخاب یک طرح برای سرمایه‌گذاری، علاوه بر بازده، ممکن است به دوره بازگشت سرمایه نیز در انتخاب گزینه نهایی توجه داشته باشد. در صورتی که تصمیم‌گیری در شرایط احتمالی در برگرفته‌ی بیش از یک شاخص باشد، باید تابع مطلوبیت چندشاخصه را بکار گرفت که چگونگی استخراج و استفاده از آن برای تصمیم‌گیری را در این جلسه خواهیم آموخت.

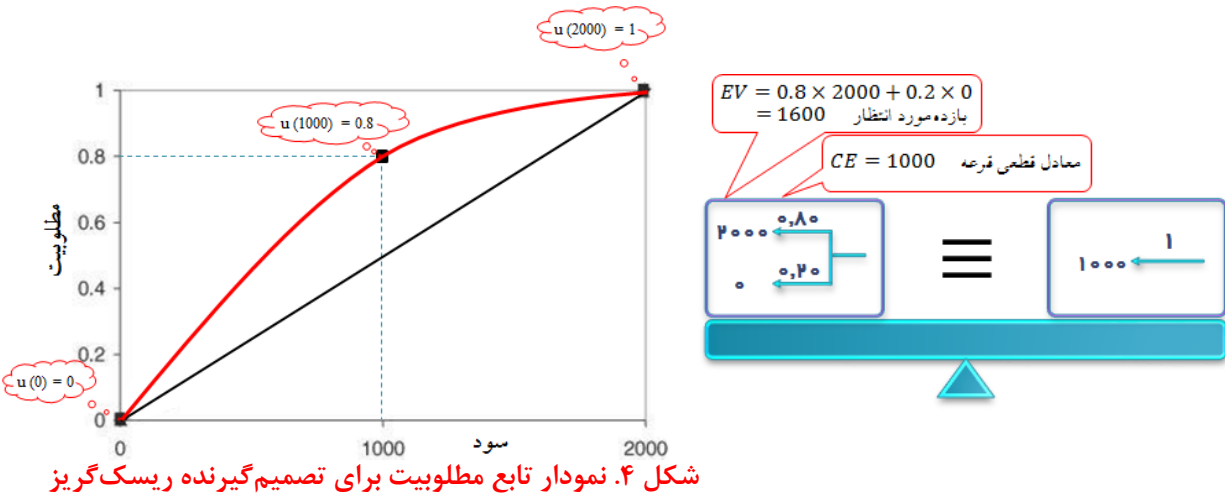
تعیین نگرش تصمیم‌گیرنده نسبت به ریسک

تصمیم‌گیرندگان بر اساس نگرشی که نسبت به ریسک دارند، به سه دسته‌ی ریسک‌پذیر، ریسک‌گریز یا خنثی نسبت به ریسک تقسیم می‌شوند. در مبحث قبل دیدیم که چگونه می‌توان تابع مطلوبیت را برای یک تصمیم‌گیرنده تعیین کرد. بر اساس تابع مطلوبیتی که برای یک تصمیم‌گیرنده در خصوص یک تصمیم خاص بدست می‌آید، می‌توان نگرش او را نسبت به ریسک تعیین کرد. تابع مطلوبیت به واقع نگرش تصمیم‌گیرنده نسبت به ریسک را کمی‌سازی می‌کند. برای درک این مفهوم فرایند تعیین تابع مطلوبیت را در قالب پرسش سؤالات متوالی بخاطر بیاورید. فرض کنید می‌خواهیم برای یک سرمایه‌گذاری ریسکی که کمترین مقدار دریافتی آن ۰ و بیشترین مقدار دریافتی ۲۰۰۰ تومان است، مطلوبیت یک مقدار دلخواه بین ۰ و ۲۰۰۰ مثلاً ۱۰۰۰ تومان را تعیین کنیم. به دریافتی ۰ مقدار مطلوبیت ۰ و به دریافتی ۲۰۰۰ مطلوبیت ۱ اختصاص می‌یابد. فرض کنید یک تصمیم‌گیرنده بین دریافت قطعی ۱۰۰۰ تومان و قرعه‌کشی که شانس برنده شدن مبلغ ۲۰۰۰ تومان در آن ۵۰٪ و احتمال دریافت مبلغ ۰ نیز ۵۰٪ باشد بی‌تفاوت است. یعنی برای او مقدار مطلوبیت ۱۰۰۰ برابر با ۰.۵ است، $u(1000) = 0.5$ و تابع مطلوبیت از نقاط $(0, 0)$ ، $(1000, 0.5)$ و $(2000, 1)$ می‌گذرد و در نتیجه یک تابع خطی است (شکل ۳). وقتی تابع مطلوبیت برای یک تصمیم‌گیرنده خطی باشد، گفته می‌شود او نسبت به ریسک خنثی است (نه ریسک‌پذیر و نه ریسک‌گریز). در این حالت مقدار مورد انتظار دریافتی برای قرعه پیشنهادی برابر است با $EV = 0.5 \times 2000 + 0.5 \times 0 = 1000$. با توجه به این که تصمیم‌گیرنده بین این قرعه و دریافتی قطعی ۱۰۰۰ تومان بی‌تفاوت است، ۱۰۰۰ تومان معادل قطعی^۱ این قرعه می‌باشد و برای یک تصمیم‌گیرنده خنثی نسبت به ریسک معادل قطعی یک دریافتی احتمالی با مقدار مورد انتظار این دریافتی احتمالی برابر است. در نتیجه می‌توان گفت که تصمیم‌گیرنده خنثی نسبت به ریسک بر اساس مقدار بازده مورد انتظار تصمیم می‌گیرد و معیار بازده مورد انتظار مبنای تصمیم‌گیری برای این دسته از تصمیم‌گیرندگان است.

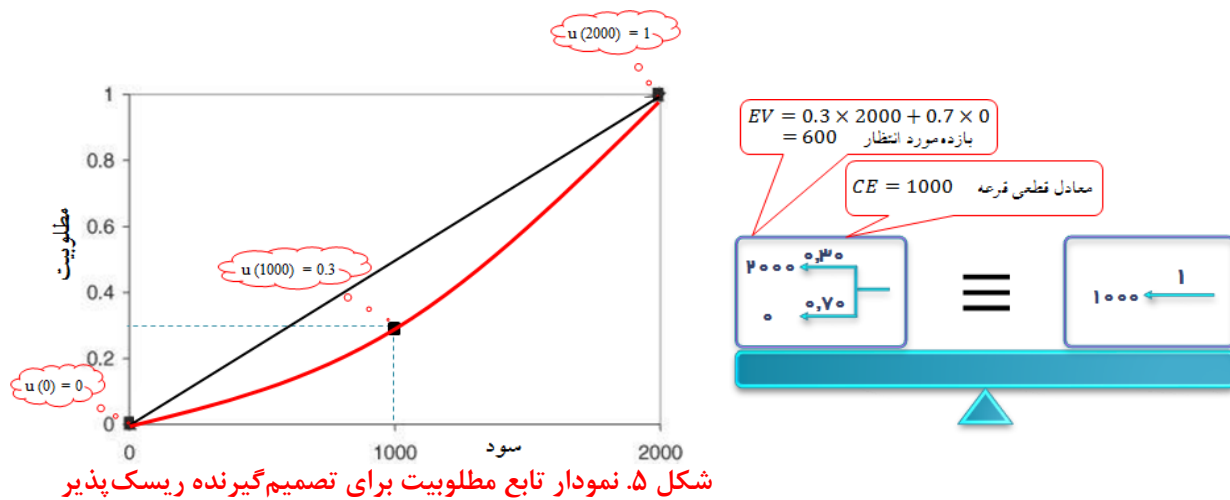
^۱ Certainty Equivalent – CE



اکنون تصمیم‌گیرنده‌ی دیگری را در نظر بگیرید که در انتخاب بین دو گزینه دریافتی قطعی ۱۰۰۰ تومان و دریافتی احتمالی ۲۰۰۰ تومان با احتمال ۵۰٪ و ۰ با احتمال ۵۰٪، احتمال ۵۰٪ برای برنده شدن را پایین دانسته و انتظار دارد احتمال برنده شدن بالاتر باشد (مثلاً ۸۰٪) تا بین دریافت قطعی ۱۰۰۰ و دریافتی احتمالی بی تفاوت باشد. یعنی برای این تصمیم‌گیرنده، مقدار مطلوبیت ۱۰۰۰ برابر با ۰٫۸ است، $u(1000) = 0.8$. پس منحنی مطلوبیت او علاوه بر نقاط ثابت $(0, 0)$ و $(2000, 1)$ از نقطه $(1000, 0.8)$ نیز عبور می‌کند. در شکل ۴ مشاهده می‌شود که نمودار تابع مطلوبیت این تصمیم‌گیرنده بالاتر از منحنی مطلوبیت یک تصمیم‌گیرنده خنثی نسبت به ریسک قرار دارد. وقتی نقاط منحنی مطلوبیت یک تصمیم‌گیرنده بالاتر از خطی قرار گیرد که نقاط دارای مطلوبیت ۰ و ۱ را به هم وصل می‌کند (یعنی تابع مطلوبیت یک تصمیم‌گیرنده خنثی به ریسک)، گفته می‌شود تصمیم‌گیرنده ریسک‌گریز است. به چنین منحنی‌هایی مقعر گفته می‌شود و تابع مطلوبیت برای تصمیم‌گیرندگان ریسک‌گریز مقعر است. هر چه فاصله این منحنی از خط مستقیم بیشتر باشد یعنی تصمیم‌گیرنده از ریسک گریزان‌تر است. برای ریسک‌گریزان مقدار مورد انتظار یک گزینه احتمالی بیش از معادل قطعی آن است. در مثال اخیر که تصمیم‌گیرنده بین دریافت قطعی ۱۰۰۰ تومان و قرعه‌کشی که شانس برنده شدن مبلغ ۲۰۰۰ تومان در آن ۸۰٪ و احتمال دریافت مبلغ ۰ نیز ۲۰٪ است، بی تفاوت می‌باشد، بازده مورد انتظار قرعه پیشنهادی برابر است با $EV = 0.8 \times 2000 + 0.2 \times 0 = 1600$ که از معادل قطعی آن یعنی ۱۰۰۰ بزرگتر است.



این بار فرض کنید یک تصمیم‌گیرنده حتی با احتمال موفقیت کمتر از ۰,۵ قرعه‌کشی را به دریافت قطعی ۱۰۰۰ تومان ترجیح می‌دهد و نقطه‌ی بی‌تفاوتی او در نقطه‌ای است که احتمال بردن ۲۰۰۰ تومان در آن کوچکتر از ۰,۵ است. مثلاً بین دریافت قطعی ۱۰۰۰ و دریافت ۲۰۰۰ با احتمال ۰,۳ دریافت ۰ با احتمال ۰,۷ بی‌تفاوت است. یعنی برای این تصمیم‌گیرنده، مقدار مطلوبیت ۱۰۰۰ برابر با ۰,۳ است: $u(1000) = 0.3$. پس منحنی مطلوبیت او علاوه بر نقاط ثابت (۰, ۰) و (۱, ۲۰۰۰) از نقطه (۰,۳, ۱۰۰۰) عبور می‌کند. در شکل ۴ مشاهده می‌شود که نمودار تابع مطلوبیت این تصمیم‌گیرنده پائین‌تر از منحنی مطلوبیت یک تصمیم‌گیرنده خنثی نسبت به ریسک قرار دارد. به طور کلی وقتی منحنی تابع مطلوبیت یک تصمیم‌گیرنده پائین‌تر از خطی قرار گیرد که نقاط دارای مطلوبیت ۰ و ۱ را به هم وصل می‌کند (یعنی منحنی یک تصمیم‌گیرنده خنثی به ریسک)، گفته می‌شود تصمیم‌گیرنده ریسک‌پذیر است. به چنین منحنی‌هایی محدب گفته می‌شود و تابع مطلوبیت برای تصمیم‌گیرندگان ریسک‌پذیر محدب است. هر چه فاصله منحنی از خط مستقیم بیشتر باشد یعنی تصمیم‌گیرنده ریسک‌پذیرتری دارد. برای ریسک‌پذیران مقدار مورد انتظار یک گزینه احتمالی کمتر از معادل قطعی آن است. این تصمیم‌گیرنده بین دریافت قطعی ۱۰۰۰ تومان و قرعه‌کشی که شانس بردن مبلغ ۲۰۰۰ تومان در آن ۳۰٪ و احتمال دریافت مبلغ ۰ نیز ۷۰٪ است، بی‌تفاوت است، بنابراین بازده مورد انتظار قرعه پیشنهادی برابر است با $EV = 0.3 \times 2000 + 0.7 \times 0 = 600$ که از معادل قطعی آن یعنی ۱۰۰۰ کوچکتر است.



مبانی تابع مطلوبیت چندشاخصه^۲

در تمامی مثال‌های مبحث قبل با تصمیماتی در شرایط احتمالی مواجه بودیم که تصمیم‌گیری تنها بر اساس یک شاخص انجام می‌شد. در حالی که اغلب تصمیمات در دنیای واقعی بر اساس چندین شاخص اتخاذ می‌شود. برای تصمیم‌گیری در شرایط احتمالی با چندین شاخص، بجای تابع مطلوبیت تک‌شاخصه از تابع مطلوبیت چندشاخصه استفاده می‌شود. برای درک مفاهیم تابع مطلوبیت چندشاخصه از یک مثال کمک می‌گیریم.

مثال: یک شرکت مهندسی، قراردادی برای تعمیرات اساسی تجهیزات یک کارخانه عقد کرده است. مشتری مایل است تعمیرات در ۱۲ هفته به پایان برسد و اگر شرکت بتواند با کمترین انحراف این کار را انجام دهد اعتبار

² Multi Attribute Utility Function – MAUF

او نزد مشتری و صنعت به میزان قابل توجهی افزایش می‌یابد. برای افزایش احتمال برآورده شدن این محدودیت زمانی، شرکت باید نیروی کار بیشتری به کار گرفته و برخی کارها را به صورت سه شیفته انجام دهد که منجر به افزایش هزینه‌ها خواهد شد. بنابراین شرکت دو هدف متعارض دارد:

• حداقل کردن زمان انحراف از تاریخ هدف برای پایان پروژه

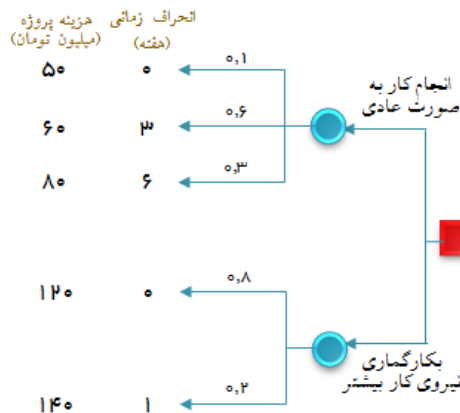
• حداقل کردن هزینه‌های پروژه

همچنین شرکت دو گزینه دارد:

• انجام کار به صورت معمول

• بکارگیری نیروی کار بیشتر و انجام کار شبانه روزی

تخمینی زده شده که اگر پروژه به صورت معمول انجام شود، تنها ۱۰٪ احتمال دارد که کار به موقع تمام شود و در این حالت هزینه در کمترین مقدار خود یعنی ۵۰ میلیون تومان است. در انجام کار به صورت معمول ۶۰٪ احتمال دارد ۳ هفته تأخیر و ۶۰ میلیون تومان هزینه داشته باشیم و ۳۰٪ محتمل است که انحراف زمانی ۶ هفته و هزینه ۸۰ میلیون تومان شود. اگر از نیروی کار اضافه استفاده شود احتمال اتمام پروژه بدون تأخیر ۸۰٪ است که با هزینه ۱۲۰ میلیون تومانی همراه خواهد بود و ۲۰٪ احتمال دارد که تأخیر تنها ۱ هفته و هزینه مبلغ قابل توجه ۱۴۰



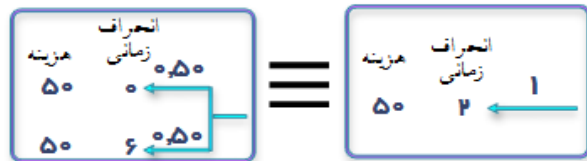
شکل ۶. درخت تصمیم در مثال شرکت مهندسی

میلیون تومان باشد. پیامدهای ممکنه‌ی فوق برای دو گزینه در قالب یک درخت تصمیم (شکل ۶) نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که برای هر یک از گزینه‌ها، با افزایش زمان تکمیل پروژه، هزینه نیز زیاد می‌شود چون باید دستمزد و هزینه بیشتری بابت کارکنان و تجهیزات داده شود. در این مساله‌ی تصمیم‌گیری احتمالی، دو شاخص داریم و برای تحلیل مسأله باید تابع مطلوبیت چندشاخصه بدست آید که به مدیر پروژه امکان دهد گزینه‌ها را بر اساس میزان مطلوبیت آن‌ها با هم مقایسه و رتبه‌بندی کند.

تعیین تابع مطلوبیت چندشاخصه در حالت کلی کار

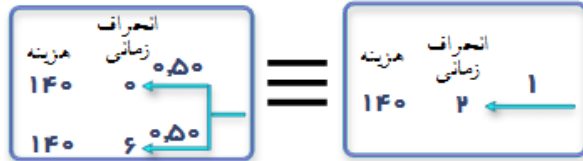
دشواری است اما اگر شرطی که بدان شرط استقلال مطلوبیت گفته می‌شود برای شاخص‌ها برقرار باشد، می‌توان تابع مطلوبیت را برای هر شاخص جداگانه بدست آورد و با تلفیق آن‌ها، تابع مطلوبیت چندشاخصه را استخراج نمود. برای درک مفهوم استقلال مطلوبیت فرض کنید که در مثال فوق، تصمیم‌گیرنده بین گزینه‌های نشان داده شده در شکل زیر بی تفاوت است:

- پروژه‌ای که انحراف زمانی آن به قطعیت ۲ هفته و هزینه آن مبلغ قطعی ۵۰ میلیون تومان است.
- پروژه‌ای که طی آن ۵۰٪ احتمال دارد انحراف زمانی ۱ هفته و هزینه ۵۰ میلیون و ۵۰٪ محتمل است انحراف زمانی ۲ هفته و هزینه ۵۰ میلیون تومان باشد.



توجه کنید که در هر دو حالت هزینه‌ها یکسان است و مقادیر انحراف زمانی متفاوت است. اکنون فرض کنید همین دو گزینه به مدیر پروژه پیشنهاد شود با این تفاوت که هزینه ۵۰ میلیون تبدیل به ۱۴۰ میلیون تومان شده است:

- پروژه‌ای که انحراف زمانی آن به قطعیت ۲ هفته و هزینه آن مبلغ قطعی ۱۴۰ میلیون تومان است.



- پروژه‌ای که در آن ۵۰٪ محتمل است انحراف زمانی ۰ و هزینه ۱۴۰ میلیون و ۵۰٪ محتمل است انحراف زمانی ۶ هفته و هزینه ۱۴۰ میلیون تومان باشد.

اگر همچنان تصمیم‌گیرنده بین این دو بی تفاوت باشد نشان می‌دهد که ترجیحات او در خصوص انحراف‌های زمانی بستگی به مقدار هزینه ندارد. اگر این موضوع برای تمام مقادیر هزینه برقرار باشد گفته می‌شود انحراف زمانی دارای استقلال مطلوبیت نسبت به هزینه‌های پروژه است. تعریف: "شاخص A نسبت به شاخص B دارای استقلال مطلوبیت است اگر ترجیحات تصمیم‌گیرنده برای گزینه‌های احتمالی با مقادیر مختلف A وابسته به مقدار B نباشد." اگر هزینه‌های پروژه نیز دارای استقلال مطلوبیت نسبت به انحراف زمانی باشد گفته می‌شود که انحراف زمانی و هزینه پروژه دارای *استقلال مطلوبیت متقابل* هستند. مزیت بزرگ استقلال مطلوبیت متقابل این است برای بدست آوردن تابع مطلوبیت در تصمیمات چندشاخصه، می‌توان تابع مطلوبیت را برای هر شاخص جداگانه بدست آورد و سپس با تلفیق آن‌ها تابع مطلوبیت چندشاخصه را تعیین نمود. در صورت برقرار نبودن شرط استقلال مطلوبیت، تعیین تابع مطلوبیت چندشاخصه بسیار پیچیده و خارج از حوصله این درس است.

مراحل تعیین تابع مطلوبیت چندشاخصه

گام ۱. تعیین توابع مطلوبیت تک‌شاخصه برای هر یک از شاخص‌ها

گام ۲. تعیین تابع مطلوبیت چندشاخصه با ترکیب توابع مطلوبیت تک‌شاخصه

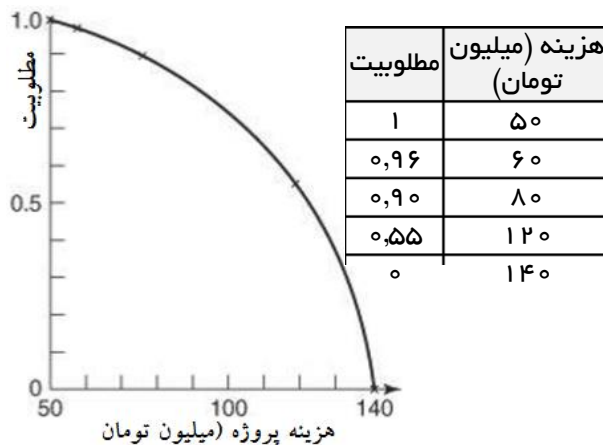
گام ۳. محاسبه مطلوبیت و رتبه‌بندی گزینه‌ها بر اساس تابع مطلوبیت چندشاخصه

شکل ۶. مراحل تعیین تابع مطلوبیت چندشاخصه

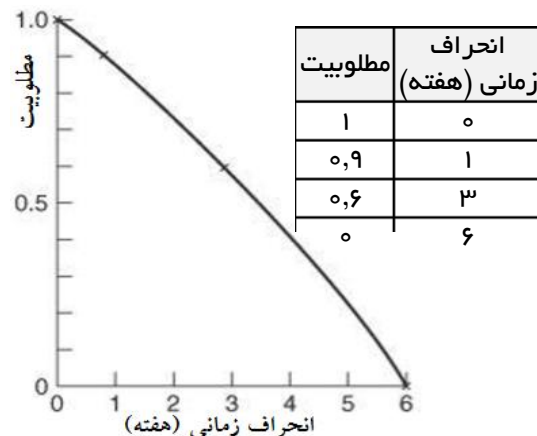
با فرض برقرار بودن شرط استقلال مطلوبیت متقابل، مراحل استخراج تابع مطلوبیت چندشاخصه و تصمیم‌گیری بر اساس آن به شرح شکل ۶ است. با استفاده از مثال شرکت مهندسی با چگونگی اجرای این گام‌ها آشنا می‌شویم:

گام ۱. تعیین توابع مطلوبیت تک‌شاخصه برای هر یک از شاخص‌ها (انحراف زمانی و هزینه پروژه): ابتدا تابع مطلوبیت را برای انحراف زمانی بدست می‌آوریم. طبق روشی که در مبحث قبل آموختیم ابتدا به بهترین مقدار (انحراف زمانی ۰) مطلوبیت ۱ و به بدترین مقدار (انحراف زمانی ۶ هفته) مطلوبیت ۰ تخصیص می‌یابد. مطلوبیت برای سایر مقادیر انحراف زمانی با پرسش در خصوص ترجیح بین یک مبلغ دریافتی قطعی و مبالغ

دریافتی با احتمالات مشخص بدست می‌آید (شکل ۷). تابع مطلوبیت برای مقادیر مختلف هزینه به روش مشابه استخراج می‌شود (شکل ۸). توجه کنید که هر دو شاخص منفی و در نتیجه تابع مطلوبیت آن‌ها نزولی است.



شکل ۸. تابع مطلوبیت برای هزینه



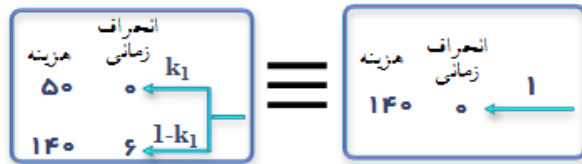
شکل ۷. تابع مطلوبیت برای انحراف زمانی

گام ۲. ترکیب توابع مطلوبیت تک شاخصه و بدست آوردن تابع مطلوبیت چندشاخصه: در این مرحله باید توابع مطلوبیت دو شاخص را با هم تلفیق کرد تا تابع مطلوبیت چندشاخصه بدست آید. اگر دو شاخص دارای استقلال مطلوبیت متقابل باشند، ثابت می‌شود که تابع مطلوبیت چندشاخصه به فرم زیر خواهد بود:

$$u(x_1, x_2) = k_1 u(x_1) + k_2 u(x_2) + k_3 u(x_1)u(x_2)$$

در این رابطه $u(x_1, x_2)$ تابع مطلوبیت چندشاخصه، x_1 مقدار شاخص اول، x_2 مقدار شاخص دوم، $u(x_1)$ تابع مطلوبیت شاخص اول، $u(x_2)$ تابع مطلوبیت شاخص دوم و k_1 و k_2 و k_3 ضرایب وزنی هستند که نحوه تعیین آنها در ادامه تشریح می‌شود. برای تعیین k_1 که وزن شاخص اول یعنی انحراف زمانی است از مدیر پروژه درخواست می‌شود از بین این دو پیشنهاد یکی را انتخاب کند:

- پروژه‌ای که انحراف زمانی آن مقدار قطعی ۰ (بهترین مقدار) و هزینه آن مقدار قطعی ۱۴۰ میلیون تومان (بدترین مقدار) است.

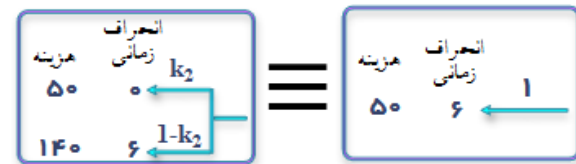


- پروژه‌ای که پیامد آن بهترین مقادیر برای انحراف زمانی و هزینه (۰ هفته و ۵۰ میلیون تومان) با

احتمال k_1 و یا بدترین مقادیر برای این شاخصها (۶ هفته و ۱۴۰ میلیون تومان) با احتمال $1-k_1$ است.

مقادیر احتمال k_1 را به صورت نظام‌مند تغییر می‌دهیم تا به مقداری از k_1 برسیم که به ازای آن مدیر پروژه بین دو گزینه بی‌تفاوت باشد. فرض کنید این مقدار برابر است با $k_1=0.8$. یعنی تصمیم‌گیرنده تنها در صورتی گزینه احتمالی را که یکی از پیامدهای آن تحقق بهترین مقادیر برای هر دو شاخص است به گزینه قطعی که شاخص انحراف زمانی در آن بهترین و شاخص هزینه بدترین مقدار را دارد ترجیح می‌دهد که احتمال تحقق پیامد مطلوب برای گزینه احتمالی قابل توجه (بزرگتر از ۰,۸) باشد. این بدان معناست که شاخص انحراف زمانی برای تصمیم‌گیرنده اهمیت زیادی دارد. به طور کلی در چنین انتخابی هر چه تصمیم‌گیرنده در مقدار احتمال بالاتری به نقطه بی‌تفاوتی برسد یعنی برای شاخص اول اهمیت بیشتری قائل است.

برای تعیین k_2 وزن شاخص هزینه، دو پیشنهاد مشابه به مدیر پروژه ارائه می‌شود. در این حالت برای گزینه‌ی دارای پیامد قطعی، هزینه در بهترین مقدار خود (۵۰ میلیون تومان) و انحراف زمانی در بدترین مقدار (۶ هفته) قرار می‌گیرد. گزینه احتمالی دارای دو پیامد محتمل است، در اولی هر دو شاخص بهترین مقادیر ممکنه را دارند و در دومی دارای بدترین مقادیر هستند:



- پروژه‌ای که انحراف زمانی آن مقدار قطعی ۶ هفته (بدترین مقدار) و هزینه آن مقدار قطعی ۵۰ میلیون تومان (بهترین مقدار) است.

- پروژه‌ای که پیامد آن بهترین مقادیر برای انحراف زمانی و هزینه (۰ هفته و ۵۰ میلیون تومان) با احتمال k_2 و یا بدترین مقادیر برای این شاخصها (۶ هفته و ۱۴۰ میلیون تومان) با احتمال $1-k_2$ است.

فرض کنید مدیر پروژه به ازای $k_2=0.6$ بین این دو بی‌تفاوت است، یعنی ارتقا از بدترین به بهترین مقدار هزینه برای او کم‌اهمیت‌تر از ارتقا از بدترین به بهترین مقدار انحراف زمانی است. مجموع k_1 و k_2 و k_3 باید برابر ۱ باشد بنابراین مقدار k_3 طبق رابطه $k_3=1-k_1-k_2$ بدست می‌آید: $k_3=1-0.8-0.6 = -0.4$. در نتیجه تابع مطلوبیت

چندشاخصه به صورت $u(x_1, x_2) = 0.8u(x_1) + 0.6u(x_2) - 0.4u(x_1)u(x_2)$ بدست می‌آید. توجه داشته باشید که k_1 و k_2 باید بین ۰ تا ۱ باشند در حالی که k_3 می‌تواند مقداری بین -۱ تا ۱ داشته باشد.

گام ۳. تعیین مطلوبیت و رتبه‌بندی گزینه‌ها با استفاده از تابع مطلوبیت چندشاخصه: اکنون می‌توان با استفاده از تابع مطلوبیت چندشاخصه، مطلوبیت پیامدهای مختلف را بدست آورد. مثلاً برای آوردن مطلوبیت پیامدی که انحراف زمانی آن ۳ هفته و هزینه آن ۶۰ میلیون تومان است، ابتدا با توجه به توابع مطلوبیت تک‌شاخصه، مقدار مطلوبیت را برای انحراف زمانی ۳ هفته‌ای و هزینه ۶۰ میلیون تومان تعیین می‌کنیم: $u(3) = 0.6$ و $u(60) = 0.96$. با جایگذاری این مقادیر در تابع مطلوبیت چندشاخصه داریم:

$$u(3, 60) = 0.8 \times 0.6 + 0.6 \times 0.96 - 0.4 \times 0.6 \times 0.96 = 0.8256$$

برای سایر پیامدها به همین ترتیب مقدار مطلوبیت محاسبه می‌شود:

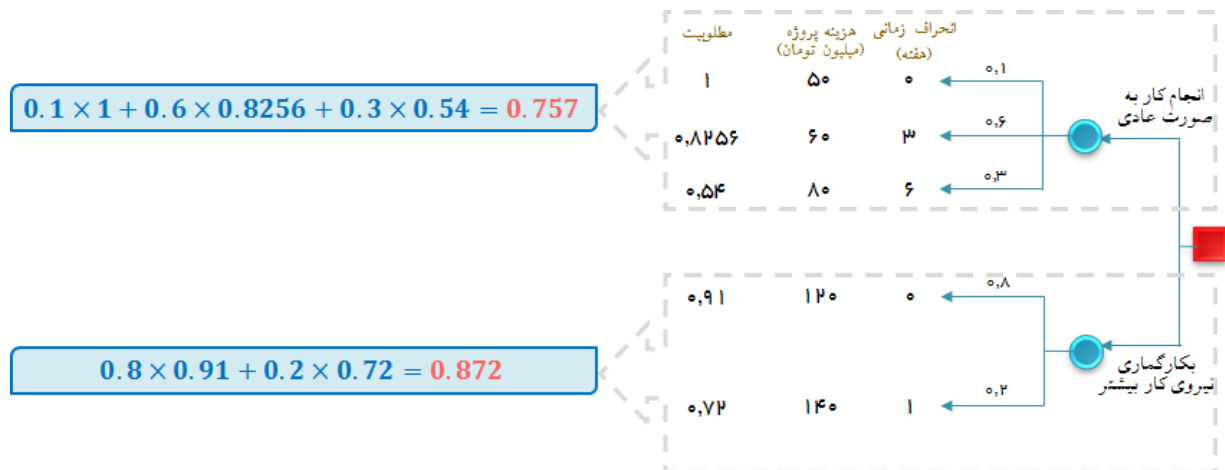
$$u(0, 50) = 0.8 \times 1 + 0.6 \times 1 - 0.4 \times 1 \times 1 = 1$$

$$u(6, 80) = 0.8 \times 0 + 0.6 \times 0.9 - 0.4 \times 0 \times 0.9 = 0.54$$

$$u(0, 120) = 0.8 \times 1 + 0.6 \times 0.55 - 0.4 \times 1 \times 0.55 = 0.91$$

$$u(1, 140) = 0.8 \times 0.9 + 0.6 \times 0 - 0.4 \times 0.9 \times 0 = 0.72$$

بر روی درخت تصمیم مقادیر شاخص‌ها برای هر پیامد با مقدار مطلوبیت متناظر جایگزین می‌شود (شکل ۹). با ضرب احتمال هر پیامد در مطلوبیت آن و جمع آن برای تمام پیامدهای یک گزینه، مقدار مطلوبیت مورد انتظار برای آن گزینه بدست می‌آید. در شکل ۹ ملاحظه می‌کنید که مطلوبیت گزینه دوم یعنی بکارگیری نیروی کار اضافه و انجام کار به صورت شبانه‌روزی بیشتر است، پس این گزینه باید اجرا شود.



شکل ۹. انتخاب گزینه برتر بر اساس مقدار مورد انتظار مطلوبیت

جمع‌بندی

در این جلسه دیدیم که بر اساس نوع نگرش نسبت به ریسک، تصمیم‌گیرندگان به سه دسته تقسیم می‌شوند: خنثی به ریسک، ریسک‌گریز و ریسک‌پذیر. با استفاده از تابع مطلوبیت یک تصمیم‌گیرنده می‌توان نگرش او را نسبت به ریسک ارزیابی کرد. در جدول ۲ رابطه بین تابع مطلوبیت و نگرش به ریسک بیان شده است. می‌توان گفت که یک تصمیم‌گیرنده‌ی ریسک‌گریز تنها در صورتی یک گزینه با پیامدهای احتمالی را می‌پذیرد که احتمال

جدول ۲: رابطه تابع مطلوبیت و نوع نگرش به ریسک

نگرش به ریسک	خنثی	ریسک‌گریز	ریسک‌پذیر
تابع مطلوبیت	خطی	مقعر	محدب
معادل قطعی یک دریافتی احتمالی	برابر با مقدار مورد انتظار	بزرگتر از مقدار مورد انتظار	کوچکتر از مقدار مورد انتظار

موفقیت در آن قابل توجه باشد و گزینه‌هایی را که در آن‌ها احتمال موفقیت ضعیف است تا حد امکان انتخاب نمی‌کند. البته باید به این نکته توجه داشت که ریسک‌پذیری یا ریسک‌گریزی ویژگی ثابت افراد نبوده و یک نفر در برخی تصمیمات ممکن است ریسک‌پذیر و در برخی دیگر ریسک‌گریز باشد.

اگر بیش از یک شاخص در تصمیم اثرگذار باشد، باید از توابع مطلوبیت چندشاخصه استفاده کرد. بدست آوردن تابع مطلوبیت چندشاخصه فرایندی پیچیده است اما اگر شرط استقلال مطلوبیت متقابل بین شاخص‌ها برقرار باشد تعیین تابع مطلوبیت آسان‌تر است. البته در اغلب کاربردهای عملی اگر این شرط برقرار نباشد می‌توان شاخص‌ها را بگونه‌ای بازتعریف کرد که نسبت به هم دارای استقلال مطلوبیت متقابل باشند. با توجه به این که استخراج تابع مطلوبیت چه در حالت تک‌شاخصه و چه در حالت چندشاخصه دشوار و مستلزم پرسش سؤالات متعدد جهت استخراج ترجیحات تصمیم‌گیرنده است، این پرسش مطرح می‌شود که آیا تعیین گزینه برتر در شرایط احتمالی بر اساس تابع مطلوبیت، ارزش این همه زحمت را دارد؟ در پاسخ باید گفت که اگر تصمیم‌گیرنده دارای نگرش کمی بوده و با مفاهیم ریاضی از قبیل احتمالات آشنا باشد و اتخاذ تصمیمی دقیق منطبق با ترجیحات تصمیم‌گیرنده حائز اهمیت باشد توصیه بر استفاده از تابع مطلوبیت است. اما استفاده از تابع مطلوبیت همیشه ضروری نیست و در بسیاری موارد، معیار ساده‌تر بازده مورد انتظار منجر به نتیجه‌ای قابل قبول می‌گردد. در یک پژوهش در خصوص کاربرد تکنیک‌های نظریه تصمیم در کاربردهای واقعی نتیجه گرفته شده که در شرایط احتمالی برای حدود دوسوم موارد معیار تصمیم بازده مورد انتظار بوده و در مابقی از تابع مطلوبیت استفاده شده است.