



کاربرد نظریه تماس هرتز در مدل سیلندرهای لاستیکی غلتشی

چو هونگیان، آن ران، کای لیگانگ

مهندسی مکانیک، دانشگاه فناوری پکن، پکن، چین

آدرس ایمیل:

artorias1990@163.com (آن ران)

برای استناد به این مقاله:

چو هونگیان، آن ران، کای لیگانگ. کاربرد نظریه تماس هرتز در مدل استوانه‌های لاستیکی غلتشی. مجله بین‌المللی مهندسی مکانیک و کاربردها. جلد 4، شماره 6، 2016، صفحات 242-248. doi: 10.11648/j.ijmea.20160406.15

دریافت: 20 اکتبر 2016؛ پذیرش: 7 دسامبر 2016؛ انتشار: 28 دسامبر 2016

چکیده: نظریه تماس هرتز (HCT) مطالعه‌ای بر تنش تماسی و تغییر شکل است که به طور گسترده در بسیاری از زمینه‌های مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این حال، شرایط محدودکننده زیادی برای کاربردهای HCT وجود دارد. در این مقاله، مدل تماس بین یک استوانه پلاستیکی و یک استوانه لاستیکی با دو شرط محدودکننده مطابقت ندارد: تغییر شکل کوچک و عدم حرکت جسم صلب. با اعمال مدل‌های المان محدود سه‌بعدی، تغییر شکل و حداکثر تنش تماسی دو استوانه چرخان مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. با مقایسه نتایج شبیه‌سازی و نتایج نظری، کاربرد نظریه تماس هرتز در این مدل مورد بحث قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که: در شرایط تغییر شکل بزرگ، نتایج نظری حداکثر تنش تماسی با وضعیت واقعی مطابقت دارد، اما نصف عرض ناحیه تماس مطابقت ندارد. در شرایط غلتش، حداکثر تنش تماسی نظری انحراف زیادی با نتیجه شبیه‌سازی دارد.

کلمات کلیدی: نظریه تماس هرتز، تغییر شکل بزرگ، تنش تماسی، استوانه الاستیک

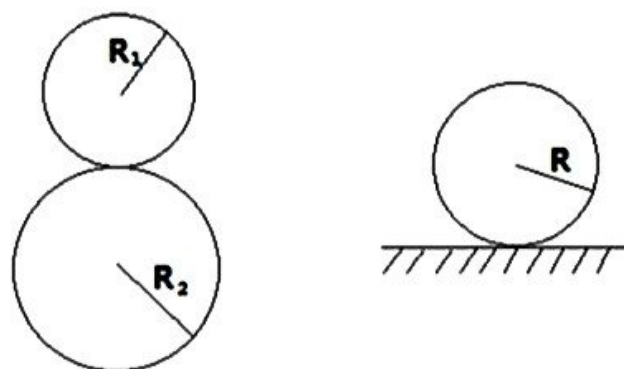
1. مقدمه

نظریه تماس هرتز یک نظریه تماس کلاسیک است که می‌تواند تنش تماسی و تغییر شکل را محاسبه کند. از آنجایی که نتیجه نظریه تماس هرتز یک راه حل تقریبی در چارچوب بسیاری از فرضیات است، در بسیاری از زمینه‌ها کمتر مناسب است. در سال‌های اخیر، با توسعه مداوم نرم‌افزارهای تحلیل اجزای محدود، استفاده از نرم‌افزار تحلیل اجزای محدود نیز روشی مؤثر برای تحلیل مسائل تماس است تا استفاده از نظریه تماس هرتز برای محاسبه، با این حال، برای تحلیل دقیق تماس، به یک مدل دقیق و قیود مناسب نیاز است و ساخت یک مدل دقیق دشوار است. مدل دو استوانه الاستیک در سیستم جوهر افشان و سایر زمینه‌ها رایج است، اما تحلیل تنش تماسی و تغییر شکل با نرم‌افزار تحلیل اجزای محدود دشوار است. استفاده از نظریه تماس هرتز برای محاسبه تنش تماسی و تغییر شکل می‌تواند در زمان زیادی صرفه‌جویی کند. در این مقاله، نویسنده از نرم‌افزار ANSYS برای تحلیل مدل دو استوانه غلتشی استفاده می‌کند و مقدار تنش تماسی و تغییر شکل را تحلیل و مقایسه می‌کند تا کاربرد نظریه تماس هرتز را در این مدل تماس مورد بحث قرار دهد و راهنمایی‌هایی برای برخی از زمینه‌های مهندسی ارائه دهد.

2. نظریه تماس هرتز

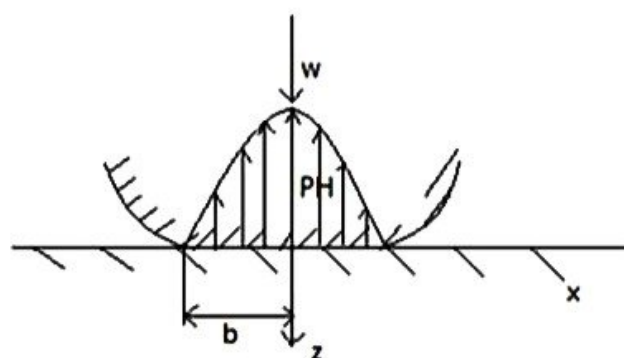
نظریه تماس هرتز در سال 1882 توسط هاینریش هرتز منتشر شد. او مسئله تماس دو جسم الاستیک با سطوح منحنی را حل کرد. این راه حل کلاسیک که هنوز هم مرتبط است، پایه و اساسی برای مسائل مدرن در نظریه تماس فراهم می‌کند. نظریه تماس هرتز به طور گسترده در بسیاری از زمینه‌های مهندسی استفاده می‌شود. با این حال، شرایط محدودکننده زیادی برای کاربردهای HCT وجود دارد. هنگام استفاده از نظریه تماس هرتز برای محاسبه تنش تماسی و تغییر شکل، فرضیاتی وجود دارد: (1) هر دو جسم الاستیک هستند؛ (2) هیچ حرکت جسم صلب وجود ندارد؛ (3) تغییر شکل کوچک در ناحیه تماس؛ (4) ابعاد قابل توجه ناحیه تماس باید بسیار کوچکتر از ابعاد و شعاع انحنا اجسام در تماس باشد. هنگامی که شرایط فوق برقرار باشد، استفاده از نظریه تماس هرتز برای محاسبه تنش و کرنش تماسی بسیار دقیق است. اما در عمل، حتی اگر برخی از فرضیات را برآورده نکند، می‌توان محاسبه دقیقی به دست آورد. با استفاده از HCT، چونجون دینگ در دانشگاه شیان جیانوتونگ مسائل تماس چرخ-ریل را تجزیه و تحلیل می‌کند، مقادیر نتیجه محاسبه شده و نتیجه شبیه‌سازی بسیار مشابه هستند [2]. مینگ‌یونگ لیو در دانشگاه چونگ‌کینگ تحقیقاتی در مورد روانکاری هیدروپنایمیکی ترموالاستیک بر اساس

با استفاده از تماس خط محدود، توزیع فشار در ناحیه تماس را بدست می‌آورد [3]. زونگده فانگ در دانشگاه پلی‌تکنیک نورث وسترن، یک جفت چرخ‌دنده مخروطی مارپیچی را تجزیه و تحلیل کرد و کاربرد نظریه تماس هرتز را در مدل تماس چرخ‌دنده مورد بحث قرار داد. [4]. این مقاله به بررسی تنش تماسی و تغییر شکل دو استوانه غلتشی مختلف خواهد پرداخت. یکی از استوانه‌ها از پلاستیک ساخته شده و سطح استوانه دیگر از لاستیک ساخته شده است. به دلیل مدول الاستیک کوچک لاستیک، تغییر شکل زیادی در ناحیه تماس خواهد داشت و استوانه‌ها در حال غلتش هستند، بنابراین با فرضیات عدم حرکت جسم صلب و تغییر شکل کوچک مطابقت ندارد. شکل ۱ یک نمونه معمول از تماس هرتز را نشان می‌دهد.



شکل 2. استوانه‌ای معادل و تخت معادل.

تحت بار طول واحد w ، دو استوانه یکدیگر را فشرده می‌کنند و سطح تماس یک مستطیل باریک است. طبق نظریه تماس هرتز، می‌توانیم یک مدل تماس ساده‌شده [6-9] که در شکل 3 نشان داده شده است را بدست آوریم.



شکل 3. مدل ساده‌شده.

نصف عرض سطح را می‌توان به صورت b بیان کرد

$$b = \left(\frac{8 w R}{\pi E'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

P تنش تماسی روی سطح تماس است، اگر دو جسم ناهم‌شکل الاستیک با هم تماس پیدا کنند، طبق HCT، توزیع فشار تماسی در این ناحیه بیضوی یک نیمه‌بیضی را نشان می‌دهد که می‌تواند به صورت [10-11] بیان شود:

$$P = p_H \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

حداکثر تنش تماسی را می‌توان با فرمول 5 محاسبه کرد

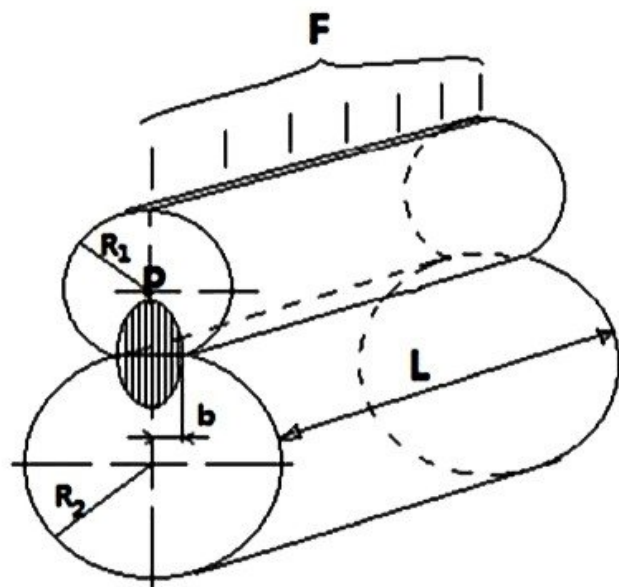
$$p_H = \frac{2w}{\pi b} = \sqrt{\frac{wE'}{\pi b}} \quad b$$

مقدار نصف عرض ناحیه تماس و p_H حداکثر تنش تماسی است.

3. مدل اجزای محدود

3.1. نرم‌افزار ANSYS Mechanical

ANSYS Mechanical ابزاری برای تحلیل اجزای محدود است



شکل ۱. نمونه معمول از تماس هرتز

در این مقاله، نویسنده تنش تماسی و تغییر شکل دو استوانه مختلف را بررسی خواهد کرد که استوانه سخت از پلاستیک و استوانه نرم از لاستیک تشکیل شده است. از آنجا که استوانه نرم دارای سطح لاستیکی است، به دلیل اینکه مدول الاستیک لاستیک بسیار کوچکتر از پلاستیک است، تغییر شکل زیادی در استوانه لاستیکی خواهد داشت، این شرط با فرض تغییر شکل کوچک در ناحیه تماس مطابقت ندارد. و هنگامی که استوانه‌ها شروع به غلتیدن می‌کنند، این مدل با فرض عدم حرکت جسم صلب مطابقت ندارد. نویسنده در مورد کاربرد نظریه تماس هرتز در این دو شرط بحث خواهد کرد.

شکل 2 نشان می‌دهد که دو استوانه را می‌توان با یک استوانه معادل و یک صفحه صلب جایگزین کرد، شعاع دو استوانه $R1$ و $R2$ [5] است، اگر:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (1)$$

R شعاع استوانه معادل است که شعاع انحنای معادل نامیده می‌شود.

مدول الاستیک دو استوانه $E1$ و $E2$ هستند و نسبت‌های پواسون μ_1 و μ_2 هستند، اگر:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\mu_1}{E_1} + \frac{1-\mu_2}{E_2} \right) \quad (2)$$

E را می‌توان مدول الاستیک معادل نامید.

تحلیل سازه، شامل مطالعات خطی، غیرخطی و دینامیکی. این محصول شبیه‌سازی کامپیوتری، المان‌های محدود را برای مدل‌سازی رفتار فراهم می‌کند و از مدل‌های مواد و حل‌کننده‌های معادلات برای طیف وسیعی از مسائل طراحی مکانیکی پشتیبانی می‌کند. ANSYS Mechanical همچنین شامل تحلیل حرارتی و قابلیت‌های فیزیک کوپل شده شامل آکوستیک، پیزوالکتریک، تحلیل ترموالکتریک حرارتی-سازه‌ای و ... است.

شکل ۴. مدل استوانه نرم و سخت.

مدل تماس از دو سیلندر تشکیل شده است، سیلندر سخت از پلاستیک ساخته شده است و سیلندر نرم دارای سطح لاستیکی است. این مدل تماس دو سیلندر الاستیک در سیستم جوهر افشان و سایر زمینه‌ها گسترده است، زیرا مدول الاستیک لاستیک بسیار کوچکتر از پلاستیک است و تغییر شکل زیادی در سیلندر نرم وجود دارد. سیلندر نرم دارای یک شفت فولادی و یک سطح لاستیکی است و شفت فولادی مرکزی هنگام تماس با سیلندر سخت تغییر شکل بسیار کمی دارد. بنابراین، ما فقط سطح لاستیکی سیلندر نرم را ایجاد می‌کنیم. **solid186** یک واحد سه‌بعدی 20 گره‌ای است که برای شبکه نامنظم آنالوک استفاده می‌شود و ماده الاستیک تراکم‌ناپذیر را شبیه‌سازی می‌کند. مدل **Mooney-Rivlin** برای شبیه‌سازی تغییر شکل بزرگ مواد فوق الاستیک و شبیه‌سازی اکثر خواص مکانیکی لاستیک مناسب است. در این مقاله، نویسنده واحد **Solid 186** و مدل **Mooney-Rivlin** را برای شبیه‌سازی لاستیک سیلندر نرم انتخاب کرده است، واحد **MPC 184** یک واحد اتصال است که برای شبیه‌سازی چرخش سیلندر نرم به دور مرکز آن استفاده می‌شود. نوع تماس باید هنگام ایجاد مدل تماس انتخاب شود. انواع مسائل تماس را می‌توان به دو نوع اساسی تقسیم کرد: نوع صلب-انعطاف‌پذیر و نوع انعطاف‌پذیر-انعطاف‌پذیر، از آنجا که شکاف مدول الاستیک بزرگ جنس استوانه وجود دارد، ما در این مدل یک تماس صلب-انعطاف‌پذیر را انتخاب کردیم.

۲.۱ مدل اکستروژن خالص

در این بخش، تحت نیروی بار در استوانه سخت، دو استوانه در ناحیه تماس شروع به تماس می‌کنند. نقاط مرکزی را در دو انتهای استوانه سخت انتخاب کنید، نیرویی رو به پایین به این دو نقطه اعمال کنید تا دو استوانه در حالت فشاری باقی بمانند، این دو نیروی بار شیب‌دار، بارگذاری را در عرض ۱ ثانیه به پایان می‌رسانند. در عین حال، باید جابجایی در جهت X و Z و چرخش در جهت‌های X ، Y و Z دو نقطه را محدود کنیم تا مطمئن شویم که فقط می‌توان آن را در جهت Y حرکت داد. محدودیت این گره در شکل ۵ نشان داده شده است.

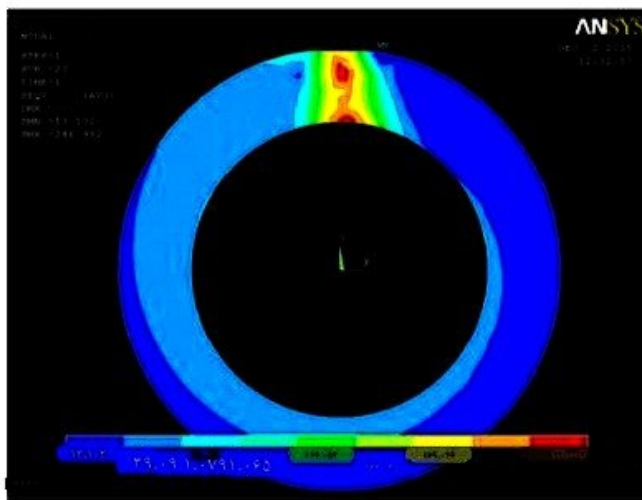
			IMAG
بر حسب کرد و لغز			
226 UX			
226 UZ			
	agla FFP		
			0.00000000
.....			
FFP خدای من	A.....		
987 UX			
987 UZ			
KAV خدای من	)		
KAV خدای من	(.....)		
			
KAV خدای من	A.....		

۴.۱.۲ نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود با تنظیم نیروهای بار

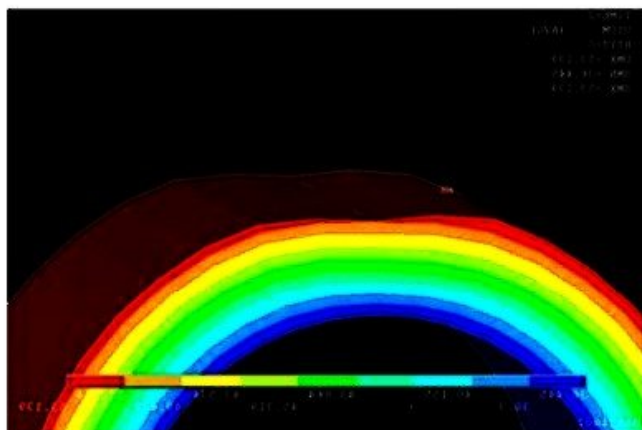
۱۰۰ نیوتن، فشار تماس ناحیه تماس را مطابق شکل ۶ استخراج کنید.

شکل ۶. قمش قماسی استوانه نرم

شکل ۶ نشان می‌دهد که مرکز ناحیه تماس دارای حداکثر تنش تماسی در ناحیه تماس است. حداکثر مقدار ۰.۳۹۷ مگاپاسکال، عرض ناحیه تماس حدود ۱۶.۳۸ میلی‌متر است، تنش تماسی و تغییر شکل در ناحیه تماس در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است، تغییر شکل آشکار در استوانه نرم رخ داده است، حداکثر تغییر شکل در جهت ۷ برابر با ۱.۶۰۴ میلی‌متر است.



شکل ۷. شماتیک تنش تماسی.



شکل ۸. شماتیک تغییر شکل.

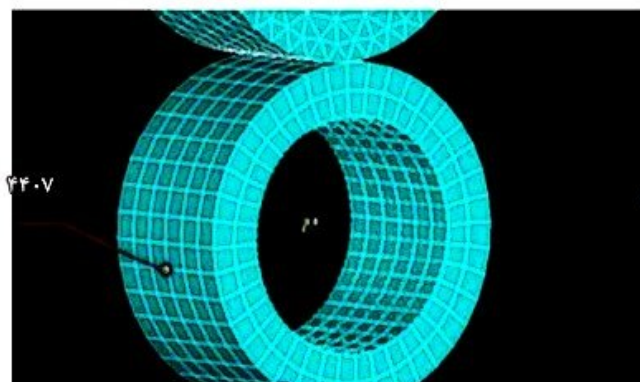
۴.۲. مدل غلتشی فشرده دو استوانه

۴.۲.۱. بارها و شرایط مرزی

بر اساس مدل فشردگی خالص، با اضافه کردن غلتش استوانه سخت، استوانه سخت حول مرکز هندسی خود در جهت محیطی، سرعت چرخش ۸ رادیان بر ثانیه و زمان چرخش ۱ ثانیه است و تحت نیروی اصطکاک، استوانه نرم شروع به چرخش محیطی می‌کند.

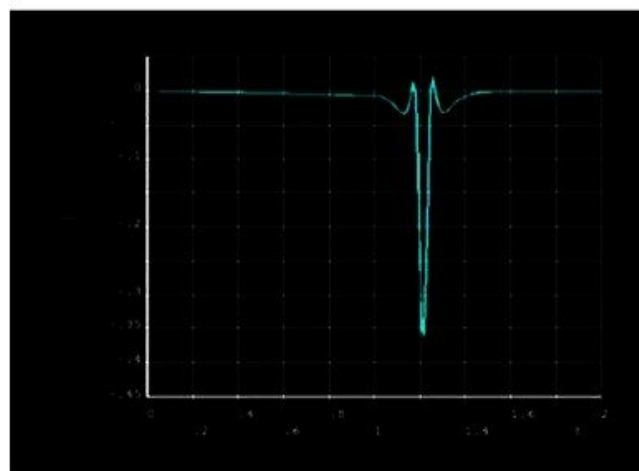
4.2.2. نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود

در این بخش، نویسنده به بررسی کاربرد نظریه تماس هرتز در مدل غلتش خواهد پرداخت. نیروی بار را ۱۰۰ نیوتن در نظر گرفته و کره ۴۴۰۷ را مطابق شکل ۹ انتخاب می‌کنیم.



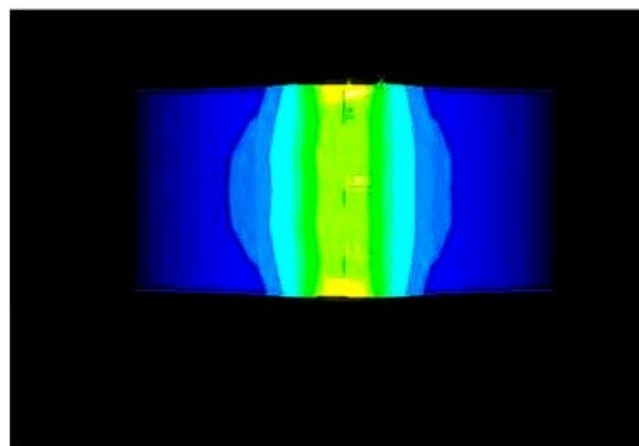
شکل ۹. کره را انتخاب کنید.

کل روند تغییرات تنش تماسی کره ۴۴۰۷ را استخراج کنید، در شکل ۱۰ می‌توانیم منحنی تنش تماسی را ببینیم. با ورود کره به ناحیه تماس، تنش تماسی شروع به افزایش می‌کند و سپس کمی کاهش می‌یابد و سپس دوباره افزایش می‌یابد، در ناحیه تماس میانی، تنش تماسی به حداکثر خود می‌رسد.



شکل ۱۰. تنش تماسی کره.

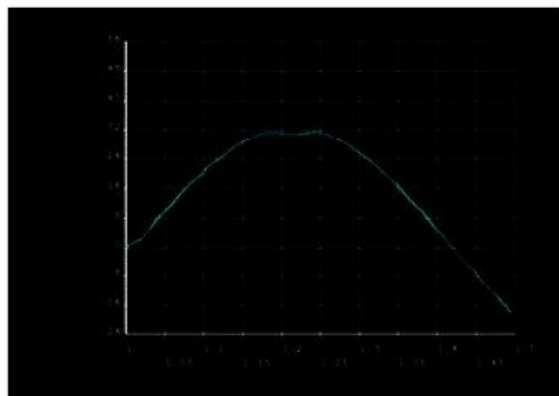
تنش تماسی در ناحیه تماس در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۱. تنش تماسی در ناحیه تماس.

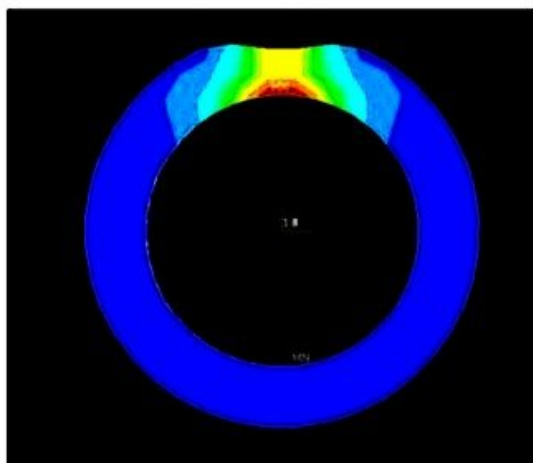
همانطور که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، حداکثر تنش تماسی کره ۴۴۰۷ در کل فرآیند نورد ۰.۳۶۱ مگاپاسکال است.

جابجایی گره ۲۴۰۷ در جهت Y را همانطور که در شکل ۱۲ نشان داده شده است، استخراج کنید.



شکل ۱۲. جابجایی در جهت Y.

شعاع استوانه نرم ۲۲.۵ میلی‌متر است، به دلیل فشرده شدن استوانه سخت، گره در جهت Y جابجایی دارد. پس از یک محاسبه ساده، می‌توانیم بدانیم که حداکثر تغییر شکل گره ۲۴۰۷، ۱.۶۹۱ میلی‌متر است. از شکل ۱۲ به وضوح می‌توانیم ببینیم که تغییر شکل بزرگی در ناحیه تماس در استوانه نرم وجود دارد.



شکل ۱۳. تغییر شکل در استوانه نرم.

۴.۳. محاسبات نظری نظریه تماس هرتز

با استفاده از نظریه تماس هرتز برای محاسبه تنش تماسی مدل استوانه‌های فشرده خالص، با استفاده از فرمول‌های (1)، (2) و (5)، می‌توانیم مدول الاستیک معادل، شعاع انحنای معادل و تنش تماسی را محاسبه کنیم، $E=2.319\text{MPa}$ ، $R=16.25\text{mm}$ ، $PH=0.389\text{MPa}$. یعنی، وقتی فقط فشرده می‌شود، حداکثر تنش تماسی 0.389MPa است. با استفاده از فرمول (3)، می‌توانیم نصف عرض ناحیه تماس را محاسبه کنیم، $b=10.906\text{mm}$.

5. کاربرد نظریه تماس هرتز در مدل

5.1. کاربرد نظریه تماس هرتز در موقعیت تغییر شکل بزرگ

تغییر شکل بزرگی در استوانه نرم در ناحیه تماس وجود دارد

هنگام فشردن با استوانه سخت. بنابراین، فرضیات تغییر شکل کوچک با این مدل مطابقت ندارد، اما کاربرد نظریه تماس هرتز برای حداکثر تنش تماسی این مدل هنوز نیاز به مطالعه بیشتر دارد. با در نظر گرفتن فقط وضعیت تغییر شکل بزرگ، نتایج حداکثر تنش تماسی کاملاً مشابه است. نتیجه شبیه‌سازی مدل المان محدود نشان می‌دهد که حداکثر تنش تماسی در ناحیه تماس 0.397 مگاپاسکال است و نتایج نظری نظریه تماس هرتز 0.389 مگاپاسکال است. این دو مقدار بسیار نزدیک هستند، اما هنوز تفاوت کمی وجود دارد. خطای بین دو مقدار:

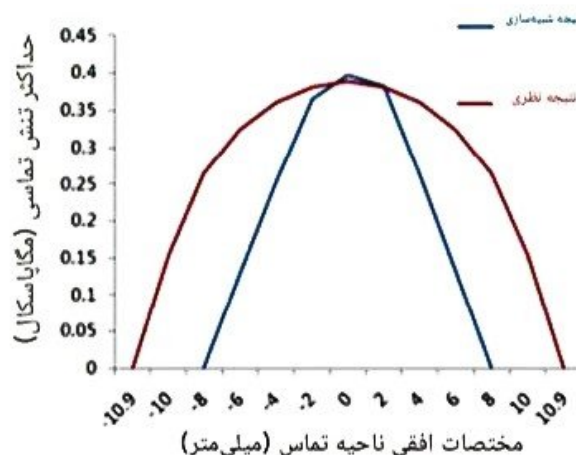
$$\epsilon = \frac{0.397 - 0.389}{0.397} = 2.01\% \quad (6)$$

اگرچه فرضیات تغییر شکل کوچک برای این مدل مناسب نیست، اما مقادیر حداکثر تنش تماسی هنوز بسیار نزدیک به هم هستند، یعنی تحت شرایط تغییر شکل بزرگ در ناحیه تماس، استفاده از نظریه تماس هرتز برای محاسبه حداکثر تنش تماسی هنوز دقیق است. طبق نتیجه شبیه‌سازی مدل اجزای محدود، نصف عرض ناحیه تماس 8.19 میلی‌متر و مقدار نتیجه نظری نصف عرض 10.90 میلی‌متر است. خطای بین این دو مقدار عبارت است از:

$$\epsilon = \frac{8.19 - 10.90}{8.19} = -33.08\% \quad (7)$$

شکاف بزرگی بین نتایج نظری نظریه تماس هرتز و نتیجه شبیه‌سازی در نصف عرض ناحیه تماس وجود دارد، به دلیل کوچک بودن مدول الاستیک لاستیک، استوانه نرم تغییر شکل زیادی در ناحیه تماس دارد که با فرض نظریه تماس هرتز مطابقت ندارد. بنابراین، هنگام محاسبه نصف عرض ناحیه تماس، استفاده از نظریه تماس هرتز نامناسب است.

در نظریه تماس هرتز، توزیع تنش تماسی در ناحیه تماس را می‌توان با فرمول (4) توصیف کرد، در مقایسه با نتایج شبیه‌سازی، می‌توانیم ببینیم که حداکثر تنش تماسی کاملاً مشابه است، همانطور که در شکل 14 نشان داده شده است.



شکل 14. توزیع تنش تماسی.

شکل 14 نشان می‌دهد که حداکثر تنش تماسی نتیجه شبیه‌سازی و نتیجه نظری بسیار نزدیک هستند و هر دو در وسط ناحیه تماس قرار دارند.

نیم‌عرض ناحیه تماس و توزیع تنش تماس کاملاً متفاوت است. نیم‌عرض ناحیه تماس در نتیجه شبیه‌سازی باریک‌تر از نتیجه نظری است.

۵.۲. کاربرد نظریه تماس هرتز در مدل غلتشی

در نظریه تماس هرتز، فرضیات عدم حرکت جسم صلب با این مدل مطابقت ندارد. از نتیجه شبیه‌سازی می‌توانیم بدانیم که حداکثر تنش تماسی در ناحیه تماس ۰.۳۶۱ مگاپاسکال است و نتیجه نظری حداکثر تنش تماسی ۰.۳۸۹ مگاپاسکال است، خطای بین آنها عبارت است از:

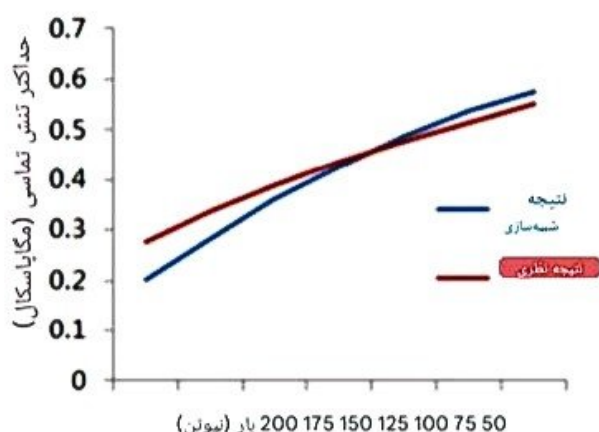
$$E = 0.361 - 0.389 = -0.028 \text{ یا } -7.4\%$$

(۸)

از فرمول (۸) می‌دانیم که هنگام محاسبه حداکثر تنش تماسی سطح تماس در این مدل غلتشی، خطای زیادی وجود خواهد داشت. یعنی، تحت شرایط مدل غلتشی، نتیجه نظری نظریه تماس هرتز دقیق نیست.

به منظور تجزیه و تحلیل روند خطا، با مقایسه حداکثر تنش تماسی نتیجه شبیه‌سازی و نتیجه محاسبه تحت بارهای مختلف.

هنگامی که استوانه‌ها شروع به غلتیدن می‌کنند، شکاف بزرگی بین مقدار شبیه‌سازی و مقدار نظری وجود دارد. به منظور تجزیه و تحلیل تمایل به تغییر خطا، مقدار تنش تماسی و تغییر شکل تحت بارهای مختلف را مقایسه کردیم. نتایج به دست آمده در شکل ۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۵. حداکثر تنش تماسی.

از شکل ۱۵ می‌توانیم ببینیم که نظریه تماس هرتز با مدل غلتشی مطابقت ندارد، هنگام محاسبه حداکثر تنش تماسی خطای زیادی دارد و نتیجه محاسبه وقتی بار کم است، بزرگتر از نتیجه شبیه‌سازی و وقتی بار زیاد است، کوچکتر از نتیجه شبیه‌سازی است.

۶. نتیجه‌گیری

نظریه تماس هرتز یک نظریه تماس کلاسیک است که می‌تواند تنش تماسی و تغییر شکل را محاسبه کند، اما شرایط محدودکننده زیادی برای کاربردهای HCT وجود دارد: (۱) هر دو جسم الاستیک هستند؛ (۲) جسم صلب وجود ندارد

حرکت؛ (۳) تغییر شکل کوچک در ناحیه تماس؛ (۴) ابعاد قابل توجه ناحیه تماس باید بسیار کوچکتر از ابعاد و شعاع انحنا اجسام در تماس باشد. با اعمال مدل‌های المان محدود سه‌بعدی، تغییر شکل و حداکثر تنش تماسی دو استوانه چرخان مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. با مقایسه نتایج شبیه‌سازی و نتایج نظری، کاربرد نظریه تماس هرتز در این مدل مورد بحث قرار گرفته است. نتایج نشان داد که: ۱. در شرایط تغییر شکل زیاد در ناحیه تماس، مقادیر حداکثر تنش تماسی نتیجه شبیه‌سازی و نتیجه نظری بسیار نزدیک هستند، اما در نصف عرض ناحیه تماس، شکاف بزرگی بین نتایج نظری نظریه تماس هرتز و نتیجه شبیه‌سازی وجود دارد. ۲. نظریه تماس هرتز هنگام محاسبه حداکثر تنش تماسی در مدل غلتشی اعمال نمی‌شود.

تقدیر و تشکر

اول از همه، ما بایم از کشیش اعظم، جو هونگیان، به خاطر راهنمایی‌های آموزنده و پیشنهادهای مفیدش در مورد پایان‌نامه‌ام صمیمانه تشکر کنم. از کمک او در تکمیل این پایان‌نامه عمیقاً سپاسگزارم. با حمایت بنیاد ملی علوم طبیعی (51675010)، پروژه علم و فناوری کمیسیون آموزش شهرداری پکن (KM201710005015)

منابع

- [1] تیان هونگیانگ، ژو دالین، فانگ زیفان، کهن هونگلینگ. تماس هرتز به مدت ۱۲۹ سال [J]. مجله دانشگاه سه دره چین (نسخه علوم طبیعی)، ۲۰۱۱، ۶۱: ۷۱-۰۶. جی. کلرک ماکسول، رساله‌ای در مورد الکتریسیته و مغناطیس، ویرایش سوم، جلد ۲. آکسفورد: کلارندون، ۱۸۹۲، صفحات ۶۸-۷۳.
- [2] سان شولی، دینگ جونجون، لی فی، هوانگ بونهوا، ژو زانگ‌یی. تحقیق در مورد مشکل تماس چرخ‌لرل و سایل نقلیه مترو [J]. تحقیقات حمل و نقل ریلی شهری، ۲۰۱۳، ۸: ۴۳-۳۹.
- [3] مینگ‌یونگ لیو. مطالعه روانکاری هیدرودینامیکی ترموالاستیک چرخ‌دنده‌های مارپیچ بر اساس تماس خط محدود [D]. دانشگاه چونگ‌کینگ، ۲۰۱۳
- [4] وانگ زو‌بینگ، فانگ زونگده، سو جین. مطالعه ویژگی‌های درگیری چرخ‌دنده ساده اصلاح‌شده با پروفیل [J]: انتقال مکانیکی؛ فاز ۱۲، ۲۰۱۱.
- [5] اس.‌اچ. گانو، جی. منگ، اِبکس.‌اچ. لانگ. مطالعه پایداری فرزکاری با سختی تماس هرتز بلبرینگ‌ها [J]. آرشیو مکانیک کاربردی، ۲۰۱۱، ۸۱۸.
- [6] ما ون. محاسبه و تحلیل المان محدود مسئله تماس بلبرینگ غلتشی [J]. مهندسی مکانیک و اتوماسیون، ۲۰۱۱، ۵۱: ۵۳-۵۱.
- [7] دبلو. بان، اف. دی. فیشر. کاربرد نظریه تماس هرتز در مسائل تماس چرخ-ریل [J]. آرشیو مکانیک کاربردی، ۲۰۰۰، ۷۰۴.
- [8] وی. جی. ویلک، آی. آی. کوزنکو، ای. بی. الکساندروف. درباره پیاده‌سازی کامپیوتری مدل تماس الاستیک هرتز و ساده‌سازی‌های آن [J]. دینامیک منظم و آشوبناک، ۲۰۰۹، ۱۴۶.