



دانشکده فنی

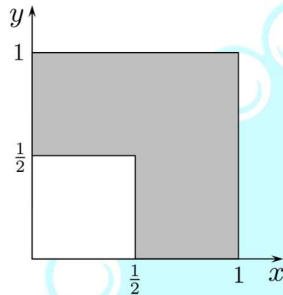
بسمه تعالی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
تمرین سری هشتم فرآیندهای اتفاقی



دانشگاه تهران

برخی از سئوالات این مجموعه با کسب اجازه از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سعید نادر اصفهانی از تمرین‌های درس فرآیندهای اتفاقی ایشان انتخاب شده‌اند. بدینوسیله از بذل محبت ایشان صمیمانه قدردانی می‌نمایم.



(۱) X و Y به طور یکنواخت در ناحیه خاکستری در شکل روبرو توزیع شده‌اند.

الف) تخمین خطی Y را با فرض مشاهده‌ی X با معیار MMSE به‌دست آورده و خطای تخمین را تعیین کنید.

ب) تخمین Y را با فرض مشاهده‌ی X با معیار MMSE به‌دست آورده و خطای تخمین را تعیین کنید.

(۲) در صورتی که X و Y دو متغیر تصادفی توأماً نرمال با میانگین صفر و ماتریس همبستگی $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ باشند.

الف) بهترین تخمین X^2 با معیار MMSE را برحسب Y به‌دست آورید. میانگین مربع خطای این تخمین چقدر است؟

ب) بهترین تخمین خطی X^2 با معیار MMSE را برحسب Y به‌دست آورید. میانگین مربع خطای این تخمین چقدر است؟

(۳) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس واحد باشد. همچنین N ، $i = 1, \dots, N$ ، $Y_i = X + \nu_i$ که در آن ν_i متغیرهای تصادفی i.i.d. گوسی با میانگین صفر و واریانس σ^2 و ناهمبسته با X باشند. تخمین خطی X با معیار MMSE را برحسب $\{Y_i\}_{i=1}^N$ و خطای این تخمین را به‌دست آورید.

(۴) فرض کنید $s = Gw$ باشد. در این رابطه $w = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T$ یک بردار تصادفی سفید نرمالیزه است که دو مؤلفه اول آن یعنی w_1 و w_2 مشاهده شده است و G ماتریسی به‌صورت زیر است:

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

الف) تخمین LMMSE دو مؤلفه دیگر یعنی w_3 و w_4 برحسب w_1 و w_2 و میانگین مربع خطای این تخمین‌ها را بیابید.

ب) تخمین LMMSE بردار s را برحسب w_i ‌های مشاهده شده (یعنی w_1 و w_2) به‌دست آورید و میانگین مربع خطای تخمین را نیز پیدا کنید.

(۵) در صورتی که $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ X \end{bmatrix}$ یک بردار تصادفی با میانگین صفر و ماتریس همبستگی $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$ باشد.

الف) در صورتی که $\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Y}_3 \end{bmatrix}$ بردار ابداع باشد. ماتریس $\mathbf{A}$ را طوری بیابید که $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Y}_3 \end{bmatrix}$ برقرار باشد.

ب) ماتریس همبستگی ماتریس $\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \hat{Y}_3 \end{bmatrix}$ و ماتریس کوواریانس متقابل X را به دست آورید.

پ) ضرایب a, b, c را به گونه ای بیابید که $E[(X - a\hat{Y}_1 - b\hat{Y}_2 - c\hat{Y}_3)^2]$ حداقل شود.

۶) فرض کنید برای فرآیند نرمال و حقیقی $X(t)$ بدانیم $\mathbb{E}\{X(0)^2\} = 1$ و همچنین

$$\mathbb{E}\{X(t_2)|X(t_1)\} = \cos(\pi(t_2 - t_1)) 2^{-|t_2 - t_1|} X(t_1), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

الف) میانگین و تابع خودهمبستگی این فرآیند را به دست آورید. [۷ نمره]

ب) بهترین تخمین مستوی $X(2)$ را با معیار MMSE برحسب بردار مشاهده‌ی $\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}$ (یعنی $\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}$) محاسبه کنید.

پ) بهترین تخمین $X(0)$ را با معیار MAP برحسب $X(2)$ و $X(-2)$ پیدا کنید.

۷) فرض کنید که X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{\mu^2 - x^2}}, & |x| < \mu \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همچنین فرض کنید که n نمونه مستقل از X مشاهده شده‌اند.

الف) تخمین ML مجهول μ را برحسب نمونه‌های مشاهده شده $x_1, x_2, \dots, x_N$ به دست آورید.

ب) بند الف) را با فرض این که X به صورت یکنواخت روی بازه $[-\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}]$ توزیع شده باشد، مجدداً حل کنید.

۸) تابع چگالی احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_N$ به صورت $f_{X_k}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$ است و این متغیرهای تصادفی تماماً مستقل هستند.

الف) با فرض مشخص بودن λ ، تخمین ML برای a با دانستن یک تحقق از N متغیر تصادفی $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ بیابید.

ب) با توجه به نتیجه بند الف)، با فرض نامشخص بودن هر دو پارامتر a و λ ، تخمین ML برای پارامترهای a و λ را برحسب $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ محاسبه کنید.