به نام خدا

موضوع پروژه:معادله لاپلاس و پواسون:

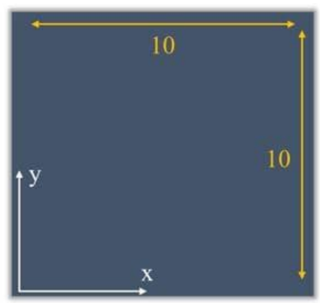
مقدمه:

معادله لاپلاس نوعی معادله دیفرانسیل دو بعدی و بیضوی است که به فرم زیر نوشته میشود:

$$\nabla^2 u(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

شماتیک مسئله لاپلاس به همراه شرایط مرزی:

معادله لاپلاس یک معادله دیفرانسیل دوبعدی با مشتقات جزئی است که کاربرد فراوانی در ریاضیات، فیزیک و مهندسی دارد که ما در اینجا به بررسی پتانسیل دو بعدی میپردازیم.



B.C. Ex01: u(x=0,y)=10 u(x,y=0)=10
u(x=10,y)=exp(0.1y) u(x,y=10)=10

B.C. Ex02: u(x=0,y)=10 du(x,y=0)/dy=0
u(x=10,y)=10 u(x,y=10)=5sin(x)

گسسته سازی معادله لاپلاس برای حل به روش تفاضل محدود:

برای حل معادله دیفرانسیل لاپلاس به روش اختلاف محدود مشتق‌های مکانی به صورت مرکزی گسسته سازی می‌شوند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله دیفرانسیل اصلی، رابطه زیر حاصل خواهد شد:

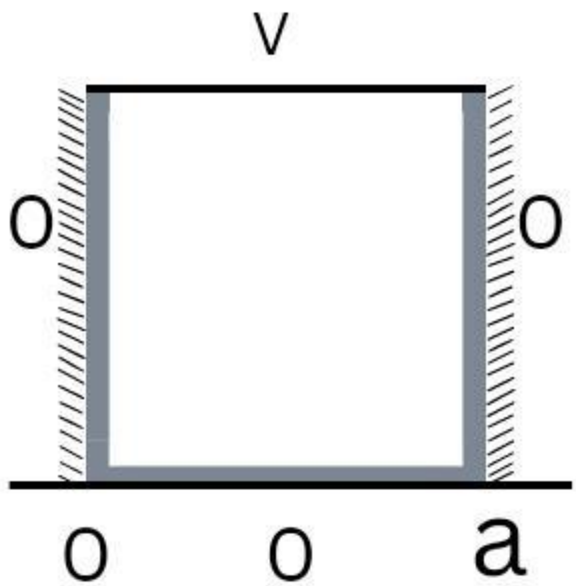
$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right) - \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)u_{i,j} = 0$$

روش تحلیلی:

یافتن پتانسیل به روش لاپلاس در یک جعبه دو بعدی:

پتانسیل سطح بالا =v

و بقیه سطوح=0



$$\nabla^2\phi = 0 \rightarrow \nabla^2\phi(x,y) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \phi = XY$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = m^2 x \Longrightarrow \begin{cases} A_m \cos(mx) \\ B_m \sin(mx) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -m^2 x \Rightarrow \begin{cases} A'_m \sinh(my) \\ B'_m \cosh(my) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi'(x,y) = \sum_n \left[A_m \sin(mx) + B_m \cos(mx)\right]\left[A'_m \sinh(my) + B'_m \cosh(my)\right] \\ \Phi(0,y) = 0 \Rightarrow B_m = 0 \quad \& \quad \Phi(a,y) = 0 \Rightarrow \sin(m\pi) = 0 \Rightarrow \alpha\pi = nm \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{m\pi}{a}$$

$$\text{if} \begin{cases} \phi(x,y) \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow Y = e^{-\alpha y} \Rightarrow \phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} \sin\frac{n\pi}{a} x$$

$\Rightarrow$ کف $\Rightarrow \phi(V) = V \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant a \;,\; y = 0$

$$\Rightarrow V = \sum A_n e^{\frac{n\pi}{a}(0)} \sin\frac{n\pi}{a} x \Rightarrow V = \sum A_n \sin\frac{n\pi}{a} x$$

$$\Rightarrow V\int_0^a \sin\frac{n'\pi}{a} x\, dx = \sum A_n \int_0^a \underbrace{\sin\frac{n\pi}{a} x \sin\frac{n\pi}{a} x\, dx}_{\frac{a}{2}\delta_{nn'}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = \sum_{1,n} \frac{4\pi}{n\pi} e^{-\frac{n\pi}{a}} \sin\frac{n\pi}{a} x}$$

$$\Rightarrow \phi_{ij} = \left[\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}\right]/4$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \& \qquad \Delta\phi_{ij} = \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}$$

$$\frac{\Delta^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\Delta^2\phi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta^2\phi_x + \Delta^2\phi_y}{\Delta l^2} = 0 \longrightarrow \Delta x = \Delta y = \Delta l$$

$$\Delta^2\phi_x + \Delta^2\phi_y = 0 \Rightarrow \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} = 4\phi_{ij}$$

از طرفی : $\Delta(\Delta\phi)_{ij} = \Delta\phi_{ij} - \Delta\phi_{i-1,j} = [\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}] - [\phi_{ij} - \phi_{i-1,j}]$

$$= \phi_{i+1,j} - 2\phi_{ij} + \phi_{i-1,j}$$

$$\Rightarrow \Delta(\Delta\phi)_{ij} = \phi_{i,j+1} - 2\phi_{ij} + \phi_{i,j-1}$$

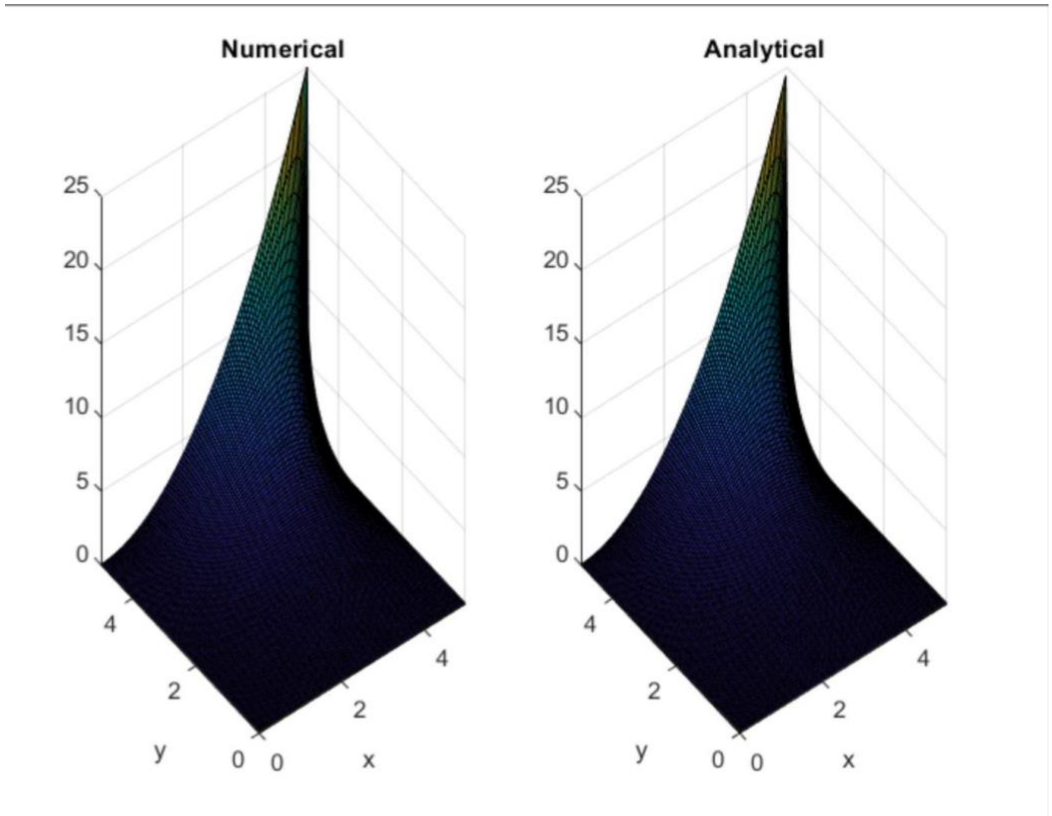
کد نویسی:

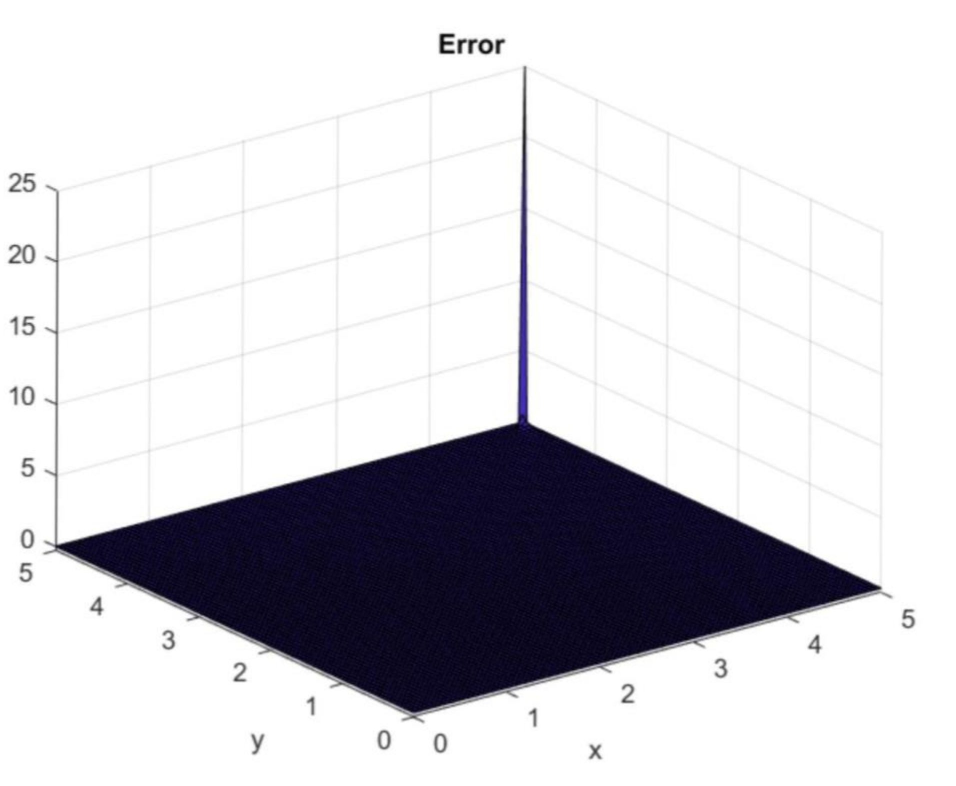
```
clc
clear
close all

N = 100; % Number of point on each axis
range = [0 5]; % Range of each axis

x = linspace(range(1), range(2), N);
```

```
dx = x(2) - x(1);
y = linspace(range(1), range(2), N);

Phi = zeros(N,N);
Phi(N,:) = x.^2;

% Numeric method
MaxItaration = 5000;

for k=1:MaxItaration
   Phi(2:N-1,2:N-1)=(Phi(1:N-2,2:N-1)+Phi(3:N,2:N-1)+...
       Phi(2:N-1, 3:N)+Phi(2:N-1, 1:N-2))/4;
end


[x1, x2] = meshgrid(x, y);

v = x.^2;
m = 100;
phi0 = 0;
for c=1:m
   A = 2/range(2) * sum(v.*sin(c*pi()/range(2).*x))*dx/sinh(c*pi());
   phi0 = phi0 + A*sin(c*pi()/range(2).*x1).*sinh(c*pi()/range(2).*x2);
end

figure Name 'electerical potential' NumberTitle off
subplot(1,2,1)
surf(x1, x2 , Phi)
title('Numerical')
```

```
xlabel('x')

ylabel('y')

axis([0 5 0 5 0 25])

subplot(1,2,2)

surf(x1, x2 , phi0)

title('Analytical')

xlabel('x')

ylabel('y')

axis([0 5 0 5 0 25])

figure Name 'error plot' NumberTitle off

surf(x1, x2 , Phi - phi0)

title('Error')

xlabel('x')

ylabel('y')

axis([0 5 0 5 -0.3 25])
```

مقایسه نمودار حل تحلیلی و حل عددی:





نتیجه: نتایج تقریبا مشابه هستند،پس کد نویسی به طور دقیق انجام شده است.

و میزان خطا برابر است با: نمودار رسم شده ۲

پروژه:فیزیک محاسباتی (دکتر محمدی اسلامی)

انجام دهنده:رامین رازقی